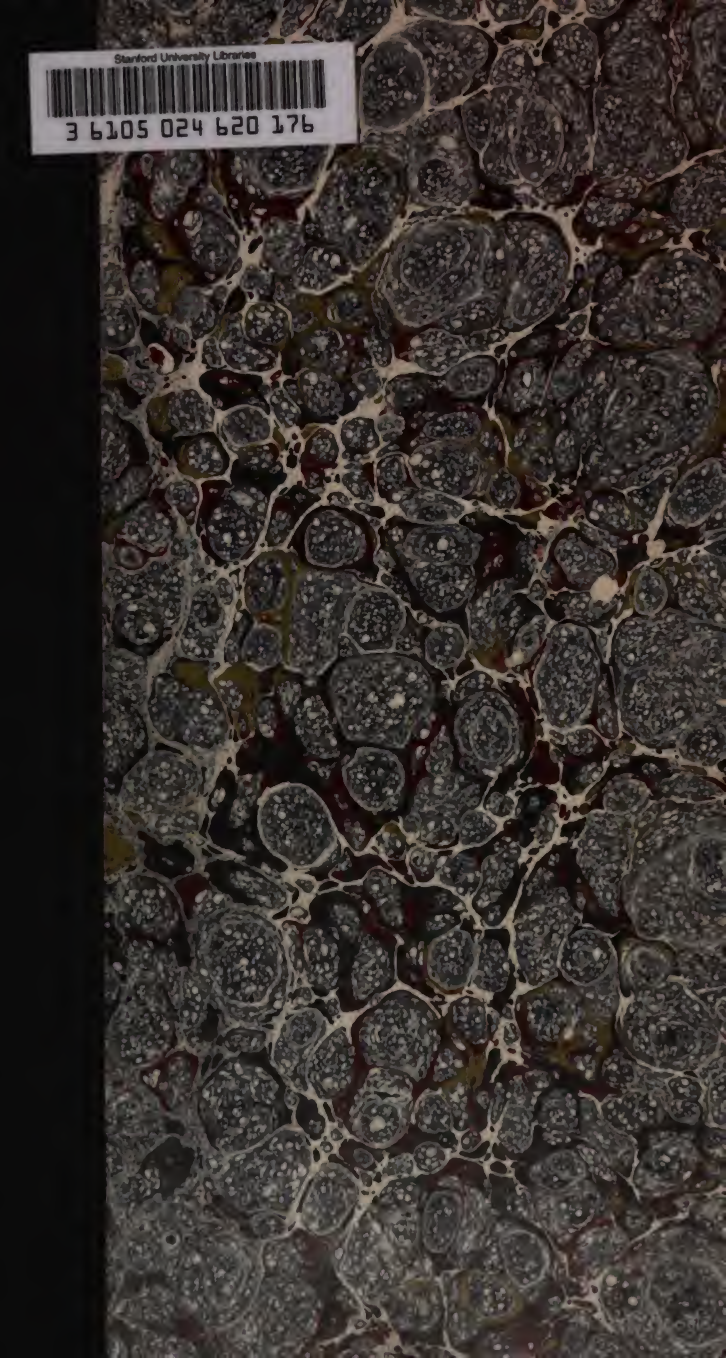
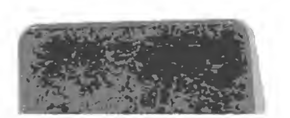




Archiv

der

Iathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Zwölfter Theil.

Mit zehn lithographirten Tafeln.

Greifswald.
C. A. Koch's Separat-Conto.

1849.

Inhaltsverzeichniss des zwölften Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

Geodäsie.

Mechanik.

Praktische Mechanik.

Optik.

Astronomie.

Literarische Berichte*).

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

I.

Ueber trigonometrische Höhenmessung.

Von
Herrn Dr. Wilhelm Matzka,
Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

1.

Die trigonometrische Höhenbestimmung dankt ihr grosses Interesse hauptsächlich ihrer Vergleichung mit der viel leichter ausführbaren barometrischen, die an ihr den Prüfstein ihrer Genauigkeit besitzt. Die Behandlung derselben in den mir zu Gesicht gekommenen praktisch-geometrischen Lehrbüchern, als: von Bauer (eigentlich Stampfer), Benzenberg, Crelle, Francoeur, Netto, Stein, Ulrich, unter denen (nebenher bemerkt) das letzte den höchsten Stand wissenschaftlicher Darstellung seines gesammten Lehrgegenstandes einnimmt, lässt jedoch in Absicht auf sorgfältige Untersuchung mancherlei zu wünschen übrig. Dahin gehört namentlich: die Berücksichtigung der Instrumentshöhe und des Gefälles der Standlinie, die möglichst scharfe Bemessung der irdischen Strahlenbrechung, die Aufstellung theils ganz scharfer, theils für den jeweiligen Zweck hinreichend genauer Rechnungsformeln, ganz vorzüglich aber die Erforschung des bei trigonometrischen Höhenmessungen erreichbaren Grades von Genauigkeit. Denn es kann einen besonnenen Mathematiker nur zum Lächeln bewegen, wenn er die Lobpreisungen der Uebereinstimmung mancher barometrischen Höhenmessung mit einer oft noch alten und mittels mangelhafter Instrumente oder Methoden ausgeführten trigonometrischen liest, nachdem man doch, unbekümmert um das Wieweitsicher des Endergebnisses, beiderlei Formeln durch allerhand Weglassungen von sogenannten unmerklich kleinen Grössen zu beliebten Filigranformeln zugeschnitten hat, um auch wissenschaftlichen Dilettanten, wie wenig sie auch von Logarithmen und Goniometrie verstehen mögen, das Vergnügen zu verschaffen, derlei Höhenberechnungen vornehmen und mit ihren Resultaten prunken zu können. Viel Schuld an der Sucht, diese Höhenformeln so zuzustutzen, hat das Vorurtheil der meisten

praktischen Mathematiker, die gesuchte Grösse selbst aus einem einzigen geschlossenen Ausdrucke sämmtlicher Rechnungsangaben zu berechnen; was natürlich fast immer auf vaste Formeln leiten muss, in deren Aufstellung vornehmlich die Verfasser von Maschinenkunden ihre Meisterschaft bewährt haben. Würde man den Astronomen nachgeahmt haben, so würde man oft statt eines Formelungeheuers zwar mehrere, aber dafür geschmeidige Hilfsbestimmungsgleichungen — von denen zuweilen manche sich sogar recht leicht in bequeme Tafeln bringen lassen — erhalten haben, deren schrittweise Verwendung vielleicht auch kaum mehr algebraische und goniometrische Kenntnisse als jene voraussetzen dürfte.

Das Folgende soll ein Versuch zu einem Fortschritt in der angezogenen Lehre nach dem neueren Stande der mathematischen Wissenschaften sein.

2.

Der Vorgang bei der trigonometrischen Höhenbestimmung ist nach der Grösse der Horizontaldistanz des Höhenobjectes von dem Standorte, an welchem Höhenwinkel gemessen werden, insofern wesentlich verschieden, als diese Distanz entweder so gering sein kann, dass der Einfluss der Krümmung der Erdoberfläche und der irdischen Strahlenbrechung ausser Acht gelassen werden darf, oder als die Entfernung so gross ist, dass diese Umstände berücksichtiget werden müssen.

3.

A. Trigonometrische Höhenmessung auf kurze Entfernungen.

Hier werden alle Verticallinien für parallel unter sich, und die zwischen ihnen enthaltenen ebenen Erdkrümmungsbogen für gerade Linien angesehen; daher sind auch die (scheinbaren) Horizonte (senkrechten Ebenen) verschiedener Verticalen zu einander parallel.

4.

Vor Allem betrachten wir die Verwechslung der Horizonte oder die Ueberführung der Höhenunterschiede von einem Horizont auf einen anderen.

Zur übersichtlichen Darstellung unserer Forschungen und ihrer Ergebnisse bezeichnen wir die Erhöhung eines Punktes oder Horizontes M über einen anderen Punkt oder Horizont A durch $(M-A)$, was man etwa „M über A“ lesen kann.

Danach finden wir leicht folgende Sätze:

1. Wenn der Punkt oder Horizont M nicht höher — wie hier vorausgesetzt worden — sondern niedriger als A ist; so ist der Höhenunterschied zwischen M und A

$$(M-A) = -(A-M),$$

d. i. die negativ genommene Erhöhung von A über M.

2. Aus den Erhöhungen zweier Punkte oder Horizonte M und N über einerlei dritten A erfolgt ihr beiderseitiges Gefälle von M (dem höheren) zu N (dem niederen):

$$(M-N) = (M-A)-(N-A),$$

nemlich in Taf. I. Fig. 1.

$$M''M = M'M - N'N.$$

3. Aus der Erhöhung von M über A und aus der von A über B findet sich die von M über B:

$$(M-B) = (M-A) + (A-B),$$

nemlich, in Taf. I. Fig. 2., $QM = PM + QP$.

4. Ingleichen ist

$$(M-C) = (M-A) + (A-B) + (B-C),$$
$$(M-D) = (M-A) + (A-B) + (B-C) + (C-D),$$

u. s. f. *)

5. Liegen zwei Höhenpunkte (Höhenobjecte), wie M und P in Taf. I. Fig. 2., insbesondere in einerlei Verticallinie, und zwar M höher als P, so ist die Höhe

$$PM = (M-P) \text{ und auch } = (M-B)-(P-B).$$

5.

Ständlinie (Basis) nennen wir diejenige (gerade) Strecke AB, an der wenigstens in einem ihrer Grenzpunkte — zumeist in ihrem Anfangspunkte A — Höhenwinkel gemessen werden, und deren Länge entweder unmittelbar gemessen oder mittelbar (durch Rechnung) gefunden worden oder sonst wie bekannt ist.

Im Allgemeinen ist eine solche Basis gegen den Horizont geneigt. Ist nun b ihre Länge, b' ihre Horizontalprojection, v ihr Neigungswinkel gegen den Horizont, und g ihr Gefälle $(B-A)$ oder ihre Verticalprojection; so gelten — wie leicht zu sehen — die Gleichungen

$$b = \frac{b'}{\cos v} = \frac{g}{\sin v} = \sqrt{b'^2 + g^2}, \quad \frac{g}{b'} = \operatorname{tang} v;$$

mittels derer aus jedem Paar dieser vier Grössen das andere Paar gefunden werden kann.

*) Man sieht leicht, dass diese Höhenunterschiede sich gerade so wie Grössenunterschiede behandeln lassen.

6.

Als **Grenzpunkt** A der **Basis** (Taf. I. Fig. 3.), wenn an ihm ein Höhenwinkel gemessen wird, oder als eigentlichen **Aufstellungspunkt** A des **Winkelmess-Instrumentes**, wo immer ein Höhenwinkel gemessen werde, kann man am vortheilhaftesten den **Mittelpunkt** des Höhenkreises, an dem des Winkels Gradmaass abgelesen wird, oder den Einschnittspunkt der Axe dieses Kreises in die Verticalebene der Höhenvisur ansehen. Denn sehr oft kann hier die geringe **Centrirung des Höhenwinkels**, d. h. die Reduction seines mit ihm selbst veränderlichen Scheitels auf den unwandelbaren Mittelpunkt A des Höhenkreises, vernachlässiget werden.

Wird nemlich ein Höhenpunkt M anvisirt und geht die Visur (optische Axe des Fernrohrs oder die Visirlinie der Diopteru) nicht durch die Axe des Höhenkreises, sondern steht sie von dieser um die Länge $AC=c$ ab; so muss, wenn ε den Höhenwinkel der eigentlich sein sollenden Visur AM, deren Länge $=d$ sein möge, und ε' den unrichtigen am Höhenkreise abgelesenen Höhenwinkel der wirklichen Visur CM vorstellt, am Höhenpunkte M der **paralaktische** Winkel $AMC=\varepsilon-\varepsilon'$ entstehen, für den das an C rechtwinkelige Dreieck ACM die Bestimmungsgleichung liefert:

$$\sin(\varepsilon-\varepsilon')=\frac{c}{d}.$$

Da dieser Winkel immer nur sehr klein ist, so kann man

$$\sin(\varepsilon-\varepsilon')=\frac{\varepsilon-\varepsilon'}{\Gamma}$$

setzen *), wenn Γ die **natürliche** analytische **Winkeleinheit**, d. i. denjenigen Winkel vorstellt, dessen bestimmender Kreisbogen so lang wie sein Halbmesser ist, und für den ich (im Archiv. 8. Bd. 4. H. S. 406.) die Benennung **Gehren** vorgeschlagen habe.

---

*) Gewöhnlich setzt man, wenn der Winkel ω sehr klein ist, $\sin\omega=\omega\sin 1''$ oder $\operatorname{tg}\omega=\omega\sin 1''$. Im letzteren Falle aber sollte der Consequenz halber $\omega\operatorname{tg}1''$ stehen, und jedenfalls wäre es klüger, anstatt $\sin 1''$ und $\operatorname{tg}1''$ den $\operatorname{arc}1''$ zu setzen, weil jedermann den letzteren sich leicht zu berechnen versteht; allein man hat hier nebst dem weitläufigen Schreiben noch die Ungemächlichkeit, diese kleinen Winkel jedesmal gerade durch die **Sekunde** ausmessen zu müssen, wogegen man sie bei meinem Vorgange durch jede beliebige Winkeleinheit messen kann, wenn man nur den Gehren Γ durch diese Einheit ausmisst. Auf diese Weise würde man in allen solchen praktisch-geometrischen Rechnungen statt $\sin 1''$ und $\operatorname{tg}1''$ nur $\frac{1}{\Gamma}$, und anstatt $\frac{1}{\sin 1''}$ und $\frac{1}{\operatorname{tg}1''}$ blos Γ zu schreiben haben, und überdies noch eine klarere Einsicht in die Bedeutung solcher Ausdrücke und Gleichungen gewinnen.

Man findet demnach die Verbesserung des Höhenwinkels

$$\varepsilon - \varepsilon' = \frac{c}{d} \Gamma;$$

wobei

$$\Gamma = \frac{180^0}{\pi} = 57^0 \cdot 29578 \quad = 3437' \cdot 747 \quad = 206264'' \cdot 8,$$

$$\log = 1 \cdot 75812, \ \log = 3 \cdot 53627, \ \log = 5 \cdot 31443$$

ist. Dann ist der verbesserte oder eigentlich gesuchte Höhenwinkel

$$\varepsilon = \varepsilon' + (\varepsilon - \varepsilon').$$

Ist $\delta\varepsilon$ der äusserste Fehler des Höhenwinkels ε, den man bei einer Visur mit dem zu Gebote stehenden Höhenwinkelmesser noch zulassen will; so wird man diese Verbesserung so lange anbringen müssen, als $\varepsilon - \varepsilon' \overline{\overline{>}} \delta\varepsilon$, folglich

$$\frac{c}{d} \Gamma \overline{\overline{>}} \delta\varepsilon, \text{ also } d \overline{\overline{<}} c \frac{\Gamma}{\delta\varepsilon}$$

ist. Z. B. beträgt c 4 Linien und $\delta\varepsilon$ 10 Sek., so ist in Klaftern

$$c \frac{\Gamma}{\delta\varepsilon} = \frac{4}{12.72} \cdot \frac{206264'' \cdot 8}{10} = 20626 \cdot 48 : 216 = 95.5;$$

daher muss, so lange die Distanz d nicht über 95 Klafter beträgt, die angedeutete Verbesserung eintreten.

7.

Steht das Stativ des Höhenwinkelmessers auf freiem Boden, und liegt lothrecht unter seinem Mittelpunkte A auf dem Erdboden der Punkt A', so nennt man die Verticale $A'A$ gewöhnlich die Instrumentshöhe. Sie oder vielmehr eine ihr gleich lange parallele (verticale) Strecke kann in einem solchen Falle leicht durch einen vertical gehaltenen Maassstab (Klafterstab) gemessen werden. Wäre aber A' nur ein Punkt oder eine kurze Ebene am Erdboden in der Nähe des aufgestellten Winkelmessers, etwa der Kopf eines eingeschlagenen Pflockes, die obere Fläche eines Marksteines, oder einer unverrückbaren Steinplatte im Pflaster einer Strasse, Kirche u. dgl., zur Feststellung eines Vergleichungshorizontes; so würde, gleichviel ob der Winkelmesser auf einem Stative frei am Boden oder auf einem Fenster u. dgl. steht, der Höhenunterschied $(A - A')$ die Instrumentshöhe sein. — Es kann aber auch umgekehrt der Mittelpunkt A des Höhenkreises unter einem gewissen voraus festgesetzten Vergleichungshorizonte A' liegen, z. B. unter der Spitze eines Thurmes oder Signals, unter der Axe der Zeiger einer Uhr an einem Thurme u. a. m. Dann ist die Instrumentshöhe $(A - A')$ negativ, nemlich eigentlich eine Instrumentstiefe.

Werden an zwei Punkten, A und B, etwa an den Grenzpunkten einer Basis Höhenwinkel gemessen, wo wieder A und B die Mittelpunkte der Höhenwinkelmesser vorstellen, und sind A', B' Vergleichungspunkte in der Nachbarschaft von A und B; so findet man das Gefälle der Mittelpunkte A und B:

$$g = (B - A) = (B - B') + (B' - A') + (A' - A)$$
$$= (B' - A') + (B - B') - (A - A').$$

8.

Uebergehen wir nun zur eigentlichen trigonometrischen Höhenbestimmung, und setzen wir:

I. Die Basis liege mit dem Höhenpunkte im Alignement (in einerlei Verticalebene);

d. h. man habe in einer Verticalebene des Höhenpunkts eine messbare oder schon gemessene oder sonst wie bekannte gerade Linie; ferner:

1. Die Basis endige in der Lothrechten des Höhenpunktes,

und zwar:

a) Die Basis sei wagrecht. (Taf. I. Fig. 4.)

Lässt sich im Terrain von einem gewissen Orte bis an das Höhenobject eine wagrechte Gerade messen, so stelle man an jenem Orte den Winkelmesser auf und lothe seinen Mittelpunkt A auf den Boden nach dem Punkte A' ab. Nun messe man die Horizontaldistanz $A'B' = b'$, die Instrumentshöhe $A'A = i$, und den Höhenwinkel $MAB = \varepsilon$ oder die Zenithdistanz $MAV = \zeta$. Dann ist die eigentliche Basis $AB = b$ gleich ihrer Horizontalprojection $A'B' = b'$; und sonach hat man trigonometrisch aus der Horizontaldistanz b', und dem Höhenwinkel ε oder der Zenithdistanz ζ des Höhenpunktes M Erhöhung h über den Mittelpunkt A des Höhenwinkelmessers zu bestimmen; diese ist demnach aus dem Dreieck ABM:

$$h = MB = (M - A) = b' \operatorname{tang} \varepsilon = b' \cot \zeta.$$

Sofort ist die Höhe MB' oder die Erhöhung von M über B' oder A'

$$MB' = (M - B') = (M - A') = MB + (BB' = AA')$$
$$= (M - A) + (A - A') = (M - A) + i.$$

Sei nun b' um $\delta b'$, ferner ε um $\delta\varepsilon$ und in Folge dessen h um δh gefehlt oder unsicher, so erhält man, wenn man die Gleichung $h = b' \operatorname{tg} \varepsilon$ oder ihren natürlichen Logarithmen differenzirt und das Differentiationszeichen d mit δ vertauscht, des Höhenunterschiedes h Fehler oder Unsicherheit:

$$\delta h = \text{tg}\,\varepsilon.\delta b' + \frac{b'}{\cos\varepsilon^2}\cdot\frac{\delta\varepsilon}{\Gamma} \text{ und } \frac{\delta h}{h} = \frac{\delta b'}{b'} + \frac{2}{\sin 2\varepsilon}\frac{\delta\varepsilon}{\Gamma}.$$

Sind diese Fehler $\delta b'$, $\delta\varepsilon$, δh die mittleren oder die wahrscheinlichsten, so ist

$$\delta h = \sqrt{(\text{tg}\,\varepsilon.\delta b')^2 + \left(\frac{b'}{\cos\varepsilon^2}\cdot\frac{\delta\varepsilon}{\Gamma}\right)^2}$$

und

$$\frac{\delta h}{h} = \sqrt{\left(\frac{\delta b'}{b'}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sin 2\varepsilon}\frac{\delta\varepsilon}{\Gamma}\right)^2}.$$

9.

b) Die Basis sei geneigt (nicht wagrecht)

und

α) endige sich im Höhenpunkte selbst (Taf. I. Fig. 4.),

d. i. man kenne aus anderweitigen Messungen und Berechnungen die eigentliche (gerade) Entfernung $e = AM$ des Höhenpunktes M vom Mittelpunkte A des Höhenwinkelmessers.

In diesem Falle findet man den Höhenunterschied

$$h = MB = (M - A) = e.\sin\varepsilon = e.\cos\zeta,$$

daher ihre Unsicherheit überhaupt

$$\delta h = \sin\varepsilon.\delta e + d\cos\varepsilon\cdot\frac{\delta\varepsilon}{\Gamma} \text{ und } \frac{\delta h}{h} = \frac{\delta e}{e} + \cot\varepsilon.\frac{\delta\varepsilon}{\Gamma},$$

und insbesondere ihre mittlere oder wahrscheinlichste Ungewissheit

$$\delta h = \sqrt{(\sin\varepsilon.\delta e)^2 + (d\cos\varepsilon.\frac{\delta\varepsilon}{\Gamma})^2}$$

und

$$\frac{\delta h}{h} = \sqrt{\left(\frac{\delta e}{e}\right)^2 + (\cot\varepsilon\frac{\delta\varepsilon}{\Gamma})^2}.$$

10.

β) die Basis endige sich nicht im Höhenpunkte (Taf. I. Fig. 5.),

d. i. das Terrain sei geneigt und man könne von A' bis nach B lothrecht unter M die geneigte Basis $A'B = b$ messen. In diesem Falle messe man die Instrumentshöhe $A'A = i$, den Höhenwinkel

$BAP=\theta$ des Endpunktes B der Basis und den Höhenwinkel $MAP=\varepsilon$ des Höhenpunktes M.

Zunächst findet man, wenn ν den Neigungswinkel der Basis gegen den Horizont vorstellt, im Dreiecke $AA'B$ für den Winkel $\nu-\theta$ an B,

$$\sin(\nu-\theta)=\frac{i}{b}\sin(90^0+\theta)=\frac{i}{b}\cos\theta.$$

daher ist

$$\nu=(\nu-\theta)+\theta,$$

und die Horizontaldistanz $A'B'=AP=b'=b\cos\nu$. Dann ist (gemäss a) der Höhenunterschied

$$(M-A)=b'\operatorname{tang}\varepsilon=b\cos\nu.\operatorname{tang}\varepsilon.$$

Ingleichen ist noch die Erhöhung

$$(B-A)=b'\operatorname{tang}\theta=b\cos\nu.\operatorname{tang}\theta;$$

folglich die Höhe

$$BM=(M-A)-(B-A)=b'(\operatorname{tg}\varepsilon-\operatorname{tg}\theta)=b'\frac{\sin(\varepsilon-\theta)}{\cos\varepsilon\cos\theta}$$

$$=b\frac{\cos\nu\sin(\varepsilon-\theta)}{\cos\varepsilon\cos\theta}.$$

11.

2. Die Basis endige sich nicht in der Lothrechten des Höhenpunktes. (Taf. I. Fig. 6.)

Ist die Höhe PM unzugänglich, so messe man an zwei mit M im Alignement liegenden Punkten A und B die Höhenwinkel $MAP=\varepsilon$ und $MBQ=\eta$, lothe die Mittelpunkte A und B des Winkelmessers auf das Terrain nach A' und B' ab, messe die Instrumentshöhen $A'A=i$ und $B'B=j$, ferner die Horizontalprojection $A'B''=b'$ der Basis, so wie das Gefäll $(B'-A')=g'$, so ist das Gefäll der Basis $(B-A)=BB'+B'B''-A'A$, nemlich

$$g=g'+i-j,$$

folglich die Basis

$$AB=b=\sqrt{b'^2+g^2},$$

und für ihre Neigung ν ist $\operatorname{tang}\nu=\frac{g}{b'}$.

Nun ist im Dreiecke ABM

$$MAB=\varepsilon-\nu,\ MBA=180^0-\eta+\nu,\ AMB=\eta-\varepsilon;$$

daher

$$AM = b\frac{\sin(\eta-\nu)}{\sin(\eta-\varepsilon)},\quad BM = b\frac{\sin(\varepsilon-\nu)}{\sin(\eta-\varepsilon)}.$$

So sind die Abstände des Höhenpunktes M von den Grenzpunkten A und B der Basis oder von den Scheiteln der gemessenen Höhenwinkel bekannt, daher findet man (nach b,α) die Höhenunterschiede

$$(M-A) = AM.\sin\varepsilon = b\frac{\sin(\eta-\nu)\sin\varepsilon}{\sin(\eta-\varepsilon)},$$

$$(M-B) = BM.\sin\eta = b\frac{\sin(\varepsilon-\nu)\sin\eta}{\sin(\eta-\varepsilon)}.$$

Zur Controle dient die Gleichung

$$(M-A)-(M-B) = (B-A) = g.$$

12.

II. Die Basis befinde sich mit dem Höhenpunkte nicht im Alignement. (Taf. I. Fig. 7.)

Finden sich im Terrain keine zwei geeigneten Standorte mit dem Höhenpunkte M im Alignement, so wählt man zwei andere passliche Punkte A' und B'. Lothrecht über ihnen in A und B misst man einerseits die Höhenwinkel $MAP=\varepsilon$ und $MBQ=\eta$, und andererseits entweder, wenn man mit einem Horizontalwinkelmesser (Theodoliten) versehen ist, die Horizontalwinkel $\varkappa$ und λ, die, wie hoch auch A über A' und B über B'' liegen mag, den zu ihnen parallelen Winkeln $RA'B''$ und $RB''A'$ gleichen, oder, wenn man einen Borda'schen Kreis hat, die geneigten Winkel $MAB=\alpha$ und $MBA=\beta$. Nebstbei misst man noch die Instrumentenhöhen $A'A=i$ und $B'B=j$, so wie das Gefälle $(B'-A')=g'$, und endlich die Horizontaldistanz $A'B''=b'$ der Aufstellungspunkte.

Auch hier ist wie vorhin das Gefälle der Basis

$$(B-A) = g = g' + i - j,$$

folglich die Basis $AB = b = \sqrt{b'^2 + g^2}$.

1. Hat man die Horizontalwinkel $\varkappa$ und λ gemessen, so ist im horizontalen Dreiecke $A'B''R$

$$RA'B'' = \varkappa,\quad RB''A' = \lambda;$$

daher

die Horizontaldistanz $A'R = AP = b'\dfrac{\sin\lambda}{\sin(\varkappa+\lambda)}$,

„ „ $B''R = BQ = b'\dfrac{\sin\varkappa}{\sin(\varkappa+\lambda)}$;

daher findet man (gemäss a):



den Höhenunterschied $(M-A) = AP \,.\, \mathrm{tg}\, \varepsilon = b' \dfrac{\sin \lambda}{\sin(\varkappa + \lambda)} \mathrm{tg}\, \varepsilon$,

„ „ $(M-B) = BQ \,.\, \mathrm{tg}\, \eta = b' \dfrac{\sin \varkappa}{\sin(\varkappa + \lambda)} \mathrm{tg}\, \eta$.

2. Hat man dagegen die geneigten Winkel α und β gemessen, so ist im geneigten Dreiecke ABM

die Distanz $AM = b \dfrac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$,

„ „ $BM = b \dfrac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$;

daher findet man (gemäss b, α)

den Höhenunterschied $(M-A) = AM \,.\, \sin \varepsilon = b \dfrac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \sin \varepsilon$,

„ „ $(M-B) = BM \,.\, \sin \eta = b \dfrac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \sin \eta$.

Jedenfalls gilt wie vorhin die Controlgleichung

$$(M-A) - (M-B) = (B-A) = g.$$

13.

B. Trigonometrische Höhenmessung auf weite Entfernungen.

Liegen die Punkte, deren Höhenunterschiede in Betracht genommen werden, schon weiter als eine halbe Stunde oder eine geographische Viertelmeile aus einander; so darf man, um genauer zu sein, das Parallelsein ihrer Verticalen nicht mehr zugestehen, sondern man muss berücksichtigen, dass die Verticalen entweder allesammt in Einem Punkte, dem Mittelpunkte der Erde, sich durchschneiden oder im Allgemeinen sich kreuzen und nur unter gewissen Bedingungen sich schneiden. Erweitert man nämlich in Gedanken die Oberfläche des ruhigen Meeres über die ganze Erde zur s. g. Meeres- oder Erdfläche, so ist diese im Allgemeinen eine Umdrehungsfläche, deren Axe die Erdaxe (Umdrehungsaxe des ganzen Erdkörpers) ist. Nun ist die Verticale (Richtung der Schwerkraft) in was immer für einem Punkt die durch ihn gehende Normale der Erdfläche, und als solche schneidet sie die Axe der Erdfläche; mithin müssen zwei solche Verticalen sich überhaupt kreuzen, ausser sie gehen durch einerlei Parallelkreis (-linie) der Erdfläche, wo sie sich in der Axe durchschneiden, oder sie befinden sich im selben Meridian. Nur in dem besonderen Falle, wo man die Erde für eine Kugel ansieht, schneiden sich alle Verticalen im Mittelpunkte derselben. Gewöhnlich nimmt man an, die Erdfläche sei ein abgeplattetes Umdrehungsellipsoid, obschon auch ein solches mit den bisherigen Erfahrungen wenig übereinstimmt.

Zur Vereinfachung der schwierigen Höhenberechnung bei der Annahme, dass die Erdfläche ein abgeplattetes Umdrehungsellipsoid sei, benützt man den Umstand, dass die weitesten Entfernungen, auf welche man Höhenmessungen ausführt, oder geodätische Dreieckssspitzen von einander entfernt nimmt, fast nie über zehn Meilen oder $\frac{2}{3}$ Breitengrad reichen. In einem solchen verhältnissmässig engen Bereiche kann man nemlich das betreffende Stück der Erdfläche mit zureichender Genauigkeit als ein sphärisches ansehen, dessen Halbmesser der s. g. Erdhalbmesser eines Punktes der Erdfläche von mittlerer geographischer Breite, d. i. das Stück seiner Normale von ihm bis an ihren Einschnitt in die Erdaxe ist.

Denn da ist jeder Erdmeridian eine Ellipse, deren grosse Halbaxe der Halbmesser a des Erdäquators und die kleine Halbaxe der Halbmesser b des Erdpols ist. Wenn daher die Abplattung der Erde $\frac{a-b}{a}=\alpha$, ihr Axenverhältniss $\frac{b}{a}=\mu=1-\alpha$, ihre Excentricität $(c=\sqrt{b^2-a^2}):a=\varepsilon$ gesetzt wird; so ist in Taf. I. Fig. 8. an jenem Punkte M, dessen geographische Breite φ ist, seine bis an die grosse Axe reichende s. g. Normale

$$N=MN=\frac{\mu^2 a}{\cos\psi}, \text{ wofern } \varepsilon\sin\varphi=\sin\psi \text{ ist;}$$

sein Erdhalbmesser $r=MQ=\frac{a}{\cos\psi}$, und sein Krümmungshalbmesser $R=MO=\frac{\mu^2 a}{\cos\psi^3}$. Daraus folgt

$$N=R(1-\varepsilon^2\sin\varphi^2)=r(1-\varepsilon^2), \text{ also } N<R<r;$$

mithin liegt O immer zwischen N und Q, und wegen $R<r$ muss der um Q mit r beschriebene Kreis zwischen den Krümmungskreis und die Tangente von M fallen. Zugleich ist

$$NQ=r-N=\varepsilon^2 r,\quad NO=R-N=R.\varepsilon^2\sin\varphi^2,$$

$$OQ=r-R=R.\frac{\varepsilon^2\cos\varphi^2}{\mu^2},\quad CQ=r\varepsilon^2\sin\varphi;$$

mithin liegt, weil ε sehr klein ist, Q sehr nahe an C und O, und zwar ist für $\varphi=0$ $CQ=0$, $OQ=\varepsilon^2 a$ und für $\varphi=90^0$ $CQ=\frac{\varepsilon^2}{\mu}a$, $OQ=0$.

Aus all diesem erhellt demnach, dass man in der kurzen Ausdehnung von $\frac{1}{3}$ Breitengrad noch mit genügender Genauigkeit die Ellipse durch den Kreis des Erdhalbmessers ersetzen könne, und daher bei der trigonometrischen Höhenmessung das in Betracht kommende Stück der Erdfläche immerhin für sphärisch ansehen dürfe. Zudem ist unsere Kenntniss der Erdabplattung noch sehr unsicher, da sie zwischen $\frac{1}{282}$ und $\frac{1}{334}$ schwankt; daher würde eine

selbst nach den strengsten Formeln berechnete Höhe noch immer höchst bedenklich bleiben.

Im Folgenden nehme ich nach J. C. E. Schmidt (Math. und phys. Geographie. 1. Bd. S. V.) nachstehende, sehr sorgfältig berechnete Werthe an:

$$\alpha = \frac{1}{297 \cdot 479} = 0 \cdot 00336158, \quad \varepsilon^2 = 0 \cdot 00671186,$$

$$a = 3271852 \cdot 318 \text{ Toisen} = 6376958 \cdot 97 \text{ Meter},$$

$$b = 3260853 \cdot 703 \quad „ \quad = 6355522 \cdot 27 \quad “ \ ,$$

indem der Meter $= 443 \cdot 296$ Lin. $= \frac{13 \cdot 853}{27}$ Toise ist. Danach ist der mittlere Halbmesser der Erde $= 6366241$ Meter.

14.

Bei dieser Voraussetzung betrachten wir als wahren Horizont eines Punktes der Erd- oder Meeresfläche die als ihre Stellvertreterin annehmbare Kugelfläche, bei einem höheren Punkte die concentrische Kugelfläche; daher ist der Höhenunterschied jeglicher zwei (wie hier vorausgesetzt nicht allzu weit von einander entfernter) Punkte M und A in Taf. I. Fig. 9. der Unterschied der Halbmesser ihrer Horizonte oder ihrer Radienvectoren OM und OA; also, wenn wir auch da die obige Bezeichnung beibehalten, ist

$$(M - A) = OM - OA.$$

Demgemäss gelten, wie leicht nachweisbar, die oben (in 4.) zur Umtauschung der Horizonte aufgestellten Gleichungen auch hier.

Die Erhöhung eines Punktes über die Erdfläche oder über die Meeresfläche wird auch seine absolute Höhe genannt. Daher besteht der Radiusvector eines über die Erdfläche erhöhten Punktes aus seinem Erdhalbmesser und seiner absoluten Höhe.

15.

Die in einem Punkte auf seine Verticale senkrecht aufgerichtete Ebene heisst desselben scheinbarer Horizont. Das Stück der Verticale eines Punktes dieses scheinbaren Horizontes zwischen ihm und dem wahren Horizonte wird die Erhöhung des scheinbaren Horizontes über den wahren an jenem Punkte genannt.

Der Einschnitt der Verticalen eines Punktes in einen gewissen (wahren oder scheinbaren) Horizont heisst dieses Punktes Horizontalprojection. Der Inbegriff der Horizontalprojectionen sämmtlicher Punkte einer Linie heisst die Horizontalprojection dieser Linie. Wird die Distanz zweier Punkte in einen wahren oder scheinbaren Horizont projicirt, so heisst ihre Projection danach auch die wahre oder scheinbare Horizontal-

distanz der beiden Punkte. Jene ist ein Kreisbogen, diese eine Strecke.

Sei nun in Taf. I. Fig. 10. eines Punktes A Radiusvector R, sein Abstand von einem in seinem scheinbaren Horizonte gelegenen Punkte T oder dessen scheinbare Horizontaldistanz d, und sucht man für diese Distanz die Erhöhung h des scheinbaren Horizontes; so ist des Punktes T Radiusvector $= R + h$, daher in dem von $R+h$, R und d gebildeten rechtwinkligen Dreiecke

$$(R+h)^2 = R^2 + d^2.$$

Hieraus findet man, falls man sich der Fourier'schen Division bedienen will,

$$h = \frac{d}{2R+h},$$

und überhaupt $h = \sqrt{R^2 + d^2} - R$.

Entwickelt man, da $d:R$ immer nur klein ist, die Wurzel in eine Reihe, so ist

$$h = \frac{d^2}{2R} - \frac{d^4}{8R^3} \ldots,$$

wo meist schon das erste Glied allein genügt.

Wäre die wahre Horizontaldistanz D des Punktes T bekannt, so wäre sein Radiusvector $= R \sec \frac{D}{R}$, daher die Erhöhung des scheinbaren Horizontes $h = R(\sec \frac{D}{R} - 1)$, und in eine Reihe entwickelt

$$h = \frac{D^2}{2R} + \frac{5}{8} \frac{D^4}{R^3} \ldots,$$

wo auch meistens das einzige erste Glied genügt.

Ist der Neigungswinkel ω der Verticalen von A und T bekannt, so ist in T der Radiusvector $= R \sec \omega$, daher die Erhöhung $h = R(\sec \omega - 1) = 2R . \frac{\sin \frac{1}{2}\omega^2}{\cos \omega}$. Es ist aber $R = d \cot \omega$, daher auch $h = d \tang \frac{1}{2}\omega$, was ebenso aus dem Dreieck ACT folgt.

16.

Bekanntlich gelangt ein Lichtstrahl von einem irdischen Punkte M (Taf. I. Fig. 11.) in das Auge A eines Beobachters nach einem in der Verticalebene beider Punkte befindlichen Bogen, der gegen die Erdoberfläche hin hohl ist, und das Auge versetzt diesen Punkt in die Richtung AF des auf selbes treffenden Bogenelementes oder der letzten Tangente dieses Strahlenbogens. Der Winkel FAM dieser Richtung mit der geraden Entfernung AM des anvisirten Punktes, heisst der terrestrische Refractionswin-

kel, auch kurz die terrestrische Refraction (irdische Strahlenbrechung).

Die praktischen Geometer nehmen gewöhnlich an, dieser gekrümmte Lichtstrahl sei ein Kreisbogen von einem 6 bis 12 überhaupt $m$mal so grossen Halbmesser $\mathfrak{X}$ als der Radiusvector R des Beobachtungsortes.

I. Kennt man nun die (gerade) Distanz $e = AM$ des anvisirten Punktes vom Augenpunkte A, also die Sehne jenes Kreisbogens, und bezeichnet man mit ϱ den Refractionswinkel FAM, so ist bekanntlich $e = 2\mathfrak{X}.\sin\varrho$, daher

$$\sin\varrho = \frac{e}{2\mathfrak{X}},$$

oder, weil $\mathfrak{X} = mR$, auch

$$\sin\varrho = \frac{1}{2m}\cdot\frac{e}{R} = n\,.\,\frac{e}{R},$$

wenn man $\frac{1}{2m} = n$ setzt.

Da die Distanz e in Vergleich mit R schon sehr klein ist und $2m$ wenigstens $=12$ erachtet wird, so muss der Winkel ϱ so klein ausfallen, dass man immerhin, wenn die genäherte Gleichheit durch $\doteq$ angedeutet wird, $\sin\varrho \doteq \varrho : \Gamma$ setzen kann; dann ist

$$\varrho \doteq \frac{1}{2m}\cdot\frac{e}{R}\,\Gamma \doteq n\,.\,\frac{e}{R}\,\Gamma.$$

II. Kennt man den Winkel $\omega = AOM$ der Verticalen von A und M, und ist $\zeta = VAF$ die gemessene Zenithdistanz des Punktes M an A, folglich $\zeta + \varrho = VAM$ die verbesserte Zenithdistanz desselben, so ist im Dreieck AOM

$$\frac{e}{R} = \frac{AM}{OA} = \frac{\sin AOM}{\sin OMA} = \frac{\sin\omega}{\sin(\zeta + \varrho - \omega)},$$

daher hat man

$$\sin\varrho = \left(\frac{1}{2m} = n\right)\frac{\sin\omega}{\sin(\zeta + \varrho - \omega)}$$

oder

$$\varrho \doteq \left(\frac{1}{2m} = n\right)\frac{\sin\omega}{\sin(\zeta + \varrho - \omega)}\,\Gamma \doteq n\,\frac{\omega}{\sin(\zeta + \varrho - \omega)},$$

wofern im zweiten Theil der Gleichung ϱ einen genäherten Werth der gesuchten Refraction vorstellt. Ein solcher ist

$$\varrho \doteq \left(\frac{1}{2m} = n\right)\frac{\omega}{\sin(\zeta - \omega)},$$

welcher sich auf die Annahmen $\sin\varrho : \sin\omega = \varrho : \omega$ gründet.

Da die Zenithdistanz meist nahe an 90^0 ist und ω, ϱ nur sehr klein sind, so pflegt man gewöhnlich auch noch den letzten Sinus $=1$ zu setzen; und erhält sonach

$$\varrho \doteq \frac{1}{2m} \omega \doteq n\omega.$$

Ich glaube jedoch, dass hier der Abkürzungseifer zu weit geht, zumal die vorletzte Rechnungsweise mit 5 oder 4stelligen Logarithmen gar nicht schwierig ist.

III. Ueber die Verhältnisszahlen der Strahlenbrechung $m = \mathfrak{X} : R$ und $n = \frac{1}{2m}$ hat man von verschiedenen praktischen Geometern mancherlei sehr von einander abweichende Angaben.

Bouguer setzt $m=9$, also $n = \frac{1}{18} = 0{\cdot}0556$,

Tob. Mayer „ $m=8$, „ $n = \frac{1}{16} = 0{\cdot}0625$,

Lambert „ $m=7$, „ $n = \frac{1}{14} = 0{\cdot}0714$,

Laplace und Delambre bestimmten $n = 0{\cdot}08 = \frac{1}{12\frac{1}{2}}$,

also $m = 6\frac{1}{4}$,

Gauss fand $n = 0{\cdot}0653 = \frac{1}{15\frac{1}{3}}$,

also $m = 7\frac{2}{3}$.

Uebrigens äussert die Beschaffenheit der Atmosphäre auf die Grösse dieser Zahlen einen namhaften Einfluss, der jedoch noch nicht genau ermittelt ist.

Ist die n mit der Unsicherheit δn behaftet, so ist die der ϱ anhaftende Unsicherheit $\delta\varrho$, wenn man obige Gleichungen logarithmirt und nach n und ϱ differenzirt, verhältnissmässig

$$\frac{\delta\varrho}{\varrho} = \frac{\delta n}{n}.$$

Nun schwankt n von 0·06 bis 0·08, also kann man $\delta n : n \doteq \frac{2}{6} \doteq \frac{1}{3}$ und daher $\delta\varrho \doteq \frac{1}{3}\varrho \doteq 0{\cdot}33\varrho$ setzen. Selbst wenn man die beiden letzten genauestens bestimmten Werthe nimmt, hat man

$$\delta n \doteq 0{\cdot}080 - 0{\cdot}065 \doteq 0{\cdot}015, \text{ daher } \frac{\delta n}{n} \doteq \frac{15}{65} \doteq \frac{1}{4} \text{ und } \delta\varrho \doteq \frac{1}{4}\varrho \doteq 0{\cdot}25\varrho.$$

Der Refractionswinkel kann daher nach dieser Bestimmung bis auf ¼ oder ⅓ seiner Grösse unsicher sein.

Bezeichnen wir noch die durch die vorletzte Form bestimmte Refraction durch ϱ', so ist



$$\frac{\varrho'}{\varrho}=\text{cosec}(\zeta-\omega),\text{ also }\frac{\varrho'-\varrho}{\varrho}=\text{cosec}(\zeta-\omega)-1.$$

Nun findet man (z. B. mittels Hutton's mathem. Tafeln) für

$$\zeta-\omega=85^{0}\quad,80^{0}\quad,75^{0}\quad,70^{0}$$

$$\frac{\varrho'-\varrho}{\varrho}\doteq 0{\cdot}0038,\ 0{\cdot}0154,\ 0{\cdot}0353,\ 0{\cdot}0642.$$

Bis zu dieser Grenze $z-\omega=70^{0}$ ist demnach der aus der Weglassung von $\sin(z-\omega)$ hervorgehende Fehler $\frac{\varrho'-\varrho}{\varrho}$ bedeutend kleiner als der von der Unsicherheit der n herrührende $\frac{\delta\varrho}{\varrho}$, und insofern dürfte die Benützung der letzten und einfachsten Berechnungsweise von ϱ gerechtfertiget sein.

Besehen wir noch den absoluten Werth von $\varrho'-\varrho$, so ist $\varrho'-\varrho\doteq n\omega.[\text{cosec}(\zeta-\omega)-1]$, folglich für $n=0{\cdot}08$ und für obige Werthe von $\zeta-\omega$ ist zunächst

$$\frac{\varrho'-\varrho}{\omega}\doteq 0{\cdot}000304,\ 0{\cdot}001232,\ 0{\cdot}002824,\ 0{\cdot}005136,\text{ daher}$$

für $\omega=20'$ ist $\varrho'-\varrho\doteq 0{\cdot}''4$, $1{\cdot}''5$, $3{\cdot}''4$, $6{\cdot}''2$
$=30$ $\doteq 0{\cdot}5$, $2{\cdot}2$, $5{\cdot}1$, $9{\cdot}2$
$=40$ $\doteq 0{\cdot}7$, $3{\cdot}0$, $6{\cdot}8$, $12{\cdot}2$.

Man wird demnach aus dieser Zusammenstellung leicht übersehen, ob der Fehler $\varrho'-\varrho$ in Rücksicht des, bei dem zu Gebote stehenden Höhenwinkelmesser, zu befürchtenden mittleren Fehlers Beachtung verdiene oder nicht.

17.

Wegen dieser Unsicherheit in der Berechnung des Refractionswinkels bleibt es rathsam, an beiden Punkten A und M (Taf. I. Fig. 11.), deren Höhenunterschied aufgefunden werden soll, gleichzeitig oder wenigstens bei gleichem Zustande der Atmosphäre, die Zenithdistanz ζ und ζ' zu messen. Sind dann ϱ, ϱ' die Refractionswinkel und z, z' die um sie verbesserten, also eigentlichen Zenithdistanzen des M in A und des A in M; so ist

$$z=\zeta+\varrho,\quad z'=\zeta'+\varrho'.$$

Dazu gibt noch das Dreieck AOM die Gleichung

$$z+z'=180^{0}+\omega.$$

Letztere verwandelt sich durch die Substitution der Ausdrücke von z und z' in

$$(\zeta+\zeta')+(\varrho+\varrho')=180^{0}+\omega.$$

Nun kann man aber bei einerlei Zustand der Atmosphäre die Refractionswinkel ϱ und ϱ' für gleich annehmen, dann ist

$$\varrho = 90^0 + \frac{\omega}{2} - \frac{\zeta + \zeta'}{2}.$$

Sonach sind die eigentlichen Zenithdistanzen

$$z = 90^0 + \frac{\omega}{2} + \frac{\zeta - \zeta'}{2}, \quad z' = 90^0 + \frac{\omega}{2} + \frac{\zeta' - \zeta}{2}.$$

Auch lässt sich zu diesem Werthe von ϱ die Verhältnisszahl n finden, denn nach Obigem ist

$$n \doteq \frac{\varrho}{\omega} \text{ oder genauer } n \doteq \frac{\varrho}{\omega} \sin(z - \omega).$$

18.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zur eigentlichen Höhenbestimmung selbst.

I. Die Basis liege mit dem Höhenpunkte im Alignement.

Jedenfalls setzen wir als bekannt voraus: *a*) die Polhöhe des Standortes A, um danach den Erdhalbmesser desselben (nach 13.) zu berechnen, und *b*) die absolute Höhe desselben, um aus beiden Längen die des Radiusvectors R jenes Standortes zu finden.

Nun kann für den Höhenpunkt gegeben oder gemessen sein, entweder

1) die gerade Entfernung vom Standorte, $AM = e$, oder

2) seine scheinbare Horizontaldistanz im scheinbaren Horizonte von A, d. i. die Tangente $AT = d$,

3) seine wahre Horizontaldistanz im wahren Horizonte von A, d. i. der Kreisbogen $AC = D$, oder

4) seine auf die Sehne reducirte Distanz im wahren Horizonte von A, d. i. die Sehne $AC = k$, oder endlich

5) der Neigungswinkel beider Verticalen, nemlich $AOM = \omega$.

Zugleich sei

1. nur *Eine* Zenithdistanz gemessen worden, nemlich in A die Zenithdistanz ζ von M, so dass, wenn ϱ den (nach 16. berechneten) Refractionswinkel vorstellt, die eigentliche verbesserte Zenithdistanz $z = \zeta + \varrho$ ist.

Zwischen diesen Grössen bestehen nun bekanntlich folgende Beziehungsgleichungen:

$$k=2R\sin\tfrac{1}{2}\omega,\ \ d=R\,\mathrm{tg}\,\omega,\ \ D=R\frac{\omega}{\Gamma},\ \ e=R\frac{\sin\omega}{\sin(z-\omega)}.$$

Aus ihnen folgt

$$k=d.\frac{\cos\omega}{\cos\frac{1}{2}\omega}=D.\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}\Gamma=e\frac{\sin(z-\omega)}{\cos\frac{1}{2}\omega},$$

$$e=d\frac{\cos\omega}{\sin(z-\omega)}=D\frac{\sin\omega}{\omega}\Gamma.\frac{1}{\sin(z-\omega)},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega=\frac{k}{2R},\ \ \mathrm{tg}\,\omega=\frac{d}{R},\ \ \omega=\frac{D}{R}\Gamma,\ \ \mathrm{tg}\,\omega=\frac{e\sin z}{R+e\cos z}.$$

Ist nun der Höhenunterschied $(M-A)=CM=H$, so ist des Höhenpunktes Radiusvector $OM=R+H$, daher im Dreiecke AOM

$$\frac{R+H}{\sin z}=\frac{R}{\sin(z-\omega)}=\frac{e}{\sin\omega}.$$

Sofort ist jedes dieser Verhältnisse auch noch

$$=\frac{H}{\sin z-\sin(z-\omega)}=\frac{H}{2\sin\frac{\omega}{2}\cos(z-\frac{\omega}{2})}.$$

Hieraus folgt, weil $\sin\omega=2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}$ ist,

$$(1)\qquad H=e\frac{\cos(z-\frac{\omega}{2})}{\cos\frac{\omega}{2}},$$

und weil $2R\sin\frac{\omega}{2}=k$ ist:

$$(2)\qquad H=k\frac{\cos(z-\frac{\omega}{2})}{\sin(z-\omega)}.$$

Zu denselben Ausdrücken leitet auch das Dreieck ACM. Denn es ist $AM=e$, $AC=k$, $CM=H$, $OAC=OCA=90^0-\frac{\omega}{2}$, $VAC=MCA=90^0+\frac{\omega}{2}$, $MAC=90^0-(z-\frac{\omega}{2})$, $AMC=z-\omega$, und

$$CM:\sin MAC=AM:\sin MCA=AC:\sin AMC,$$

also

$$\frac{H}{\cos(z-\frac{\omega}{2})}=\frac{e}{\cos\frac{\omega}{2}}=\frac{k}{\sin(z-\omega)}.$$

Drückt man sofort k oder e durch d und D aus, so erfolgt

$$(3)\qquad H = d\frac{\cos\omega}{\cos\frac{1}{2}\omega}\cdot\frac{\cos(z-\frac{\omega}{2})}{\sin(z-\omega)},$$

$$(4)\qquad H = D\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}\Gamma\cdot\frac{\cos(z-\frac{\omega}{2})}{\sin(z-\omega)}.$$

19.

Hieraus ersieht man, dass die zwei letzten Ausdrücke des H verwickelter als jene in (1) und (2) sind; wesswegen es rathsam bleibt, vorerst aus d oder D die k oder e zu berechnen, und sich dann zur Berechnung von H der Gleichungen (1) oder (2) zu bedienen.

Zu jenem vorbereitenden Uebergange (von d oder D auf k oder e) kann man, weil ω immer sehr klein ist, viel bequemer folgende Reihenentwickelungen benützen, da man in den meisten Fällen nur das erste Glied derselben zu nehmen haben wird.

Es ist nemlich nach dem Vorigen $\frac{k}{d}=\frac{\cos\omega}{\cos\frac{1}{2}\omega}$, oder mit Rücksicht auf $\frac{d}{R}=\operatorname{tg}\omega$, auch $\frac{k}{d}=\frac{2\sin\frac{1}{2}\omega}{\operatorname{tg}\omega}$, also auch $=\sqrt{\frac{2(1-\cos\omega)}{\operatorname{tg}\omega^2}}$. Ferner ist $1-\cos\omega=1-(1+\operatorname{tg}\omega^2)^{-\frac{1}{2}}$, daher

$$\frac{k}{d}=\frac{\cos\omega}{\cos\frac{1}{2}\omega}=\sqrt{(1-\frac{3}{4}\operatorname{tg}\omega^2+\frac{3.5}{4.6}\operatorname{tg}\omega^4....)}$$
$$=1-\frac{1.3}{2.4}\operatorname{tg}\omega^2+\frac{1.3.31}{2.4.6.8}\operatorname{tg}\omega^4....$$

und

$$k=d-\frac{3}{8}\left(\frac{d}{R}\right)^2d+\frac{31}{128}\left(\frac{d}{R}\right)^4d....$$

Desgleichen ist $\frac{k}{D}=\sin\frac{1}{2}\omega:\frac{\frac{1}{2}\omega}{\Gamma}=1-\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\frac{1}{2}\omega}{\Gamma}\right)^2+\frac{1}{1.2.3.4.5}\left(\frac{\frac{1}{2}\omega}{\Gamma}\right)^4....$, also wegen $\frac{\omega}{\Gamma}=\frac{D}{R}$ sogleich $k=D-\frac{1}{6}\left(\frac{D}{2R}\right)^2D+\frac{1}{120}\left(\frac{D}{2R}\right)^4D....$

Eben so hat man

$$\frac{e}{d}\sin(z-\omega)=\cos\omega=(1+\operatorname{tg}\omega^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=1-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\omega^2+\frac{1.3}{2.4}\operatorname{tg}\omega^4....,$$

daher

$$e = \frac{1}{\sin(z-\omega)} \left[d - \tfrac{1}{2} \left(\frac{d}{R}\right)^2 d + \frac{3}{8} \left(\frac{d}{R}\right)^4 d \ldots \right].$$

Endlich ist noch

$$\frac{e}{D} \sin(z-\omega) = \sin\omega : \frac{\omega}{I} = 1 - \frac{1}{1.2.3} \left(\frac{\omega}{I}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3.4.5} \left(\frac{\omega}{I}\right)^4 \ldots,$$

also

$$e = \frac{1}{\sin(z-\omega)} \left[D - \frac{1}{6} \left(\frac{D}{R}\right)^2 D + \frac{1}{120} \left(\frac{D}{R}\right)^4 D \ldots \right].$$

20.

Obige geschlossene Höhenformeln (in 18.) lassen sich auf sehr mannigfaltige Weisen in gegliederte und Näherungsausdrücke umgestalten. Um dies überschaulich darzustellen, wird es gut sein, vorerst die in ihnen vorkommenden Quotienten

$$u = \frac{\cos\left(z - \frac{\omega}{2}\right)}{\cos\frac{\omega}{2}}, \quad v = \frac{\cos\left(z - \frac{\omega}{2}\right)}{\sin(z-\omega)}$$

in solcher Weise umzustalten.

I. Löst man in u den Dividend auf, so ist

$$u = \cos z + \sin z \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}. \tag{1}$$

Setzt man hier $z = \zeta + \varrho$ und löst auf, so wird

$$u = \left(\cos\zeta + \sin\zeta \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right)\cos\varrho - \left(\sin\zeta - \cos\zeta \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right)\sin\varrho;$$

wobei man die Glieder — wie auch in der Folge jederzeit — mit Rücksicht auf den Umstand, dass $\cos\zeta$, ω, ϱ, $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$, $\sin\varrho$ hier immer sehr klein sind, nach den Ordnungen ihrer Kleinheit nach einander reihen muss. Geht man nur bis zur zweiten Ordnung in $\cos\varrho = 1 - \frac{1}{2}\sin\varrho^2 \ldots$ herab und bis zur dritten in u, so wird

$$u \doteq \cos\zeta + \sin\zeta \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} - \sin\zeta\sin\varrho + \cos\zeta\left(\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} - \tfrac{1}{2}\sin\varrho\right)\sin\varrho. \tag{2}$$

II. Löst man im Quotienten v beide Divisionselemente auf, so wird er

$$v = \frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\cos\omega} \cdot \frac{\cot z + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{1 - \cot z \operatorname{tg}\omega}. \tag{3}$$



Nun ist $(\cot z + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}):(1-\cot z \operatorname{tg}\omega) = \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} + \cot z \frac{1+\operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{1-\cot z \operatorname{tg}\omega}$,

$$1+\operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{\cos\omega\cos\frac{\omega}{2}+\sin\omega\sin\frac{\omega}{2}}{\cos\omega\cos\frac{\omega}{2}} = \frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\cos\omega\cos\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{\cos\omega},$$

$$1-\cot z\operatorname{tg}\omega = \frac{\sin(z-\omega)}{\cos\omega\sin z},$$

daher

$$(4) \qquad v = \frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}\left(\frac{\cos z}{\sin(z-\omega)} + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right).$$

Erwägt man, dass $\frac{\cos z}{\sin(z-\omega)} \doteq \cot z$ ist, so hat man

$$\frac{\cos z}{\sin(z-\omega)} - \cot z = \frac{\sin z - \sin(z-\omega)}{\sin(z-\omega)}\cot z = 2\sin\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\cos(z-\frac{\omega}{2})}{\sin(z-\omega)}\cot z$$
$$= 2v\cot z\sin\frac{\omega}{2},$$

daher

$$(5) \qquad v = \frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}(\cot z + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} + 2v\cot z\sin\frac{\omega}{2}).$$

Diese Gleichung findet man schneller aus (3), da

$$\frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}(\cot z + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}) = v - v\cot z\operatorname{tg}\omega = v - v\cot z . 2\sin\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}$$

ist.

Substituirt man in (3) $\zeta+\varrho$ für z, folglich $\cot z = \frac{1}{\operatorname{tg}(\zeta+\varrho)} = \frac{\cot\zeta - \operatorname{tg}\varrho}{1+\cot\zeta\operatorname{tg}\varrho}$, so wird

$$v = \frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}\cdot\frac{\cot\zeta + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} - \operatorname{tg}\varrho + \cot\zeta\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\varrho}{1-\cot\zeta(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\varrho) + \operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\varrho},$$

daher

$$(6) \qquad v \doteq \frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}[\cot\zeta + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} - \operatorname{tg}\varrho + \cot\zeta^2(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\varrho)].$$

III. Gleicht man im Quotienten v die Winkel ω und $\frac{\omega}{2}$ erst auf den einen dann auf den anderen aus, so verwandelt er sich in $\cot(z-\omega)$ und $\cot(z-\frac{\omega}{2})$, und man findet

$$\cot(z-\omega)-v=\frac{2\sin(z-\frac{3}{4}\omega)\sin\frac{\omega}{4}}{\sin(z-\omega)}$$

nach der bestehenden Bedeutung von z und ω jedenfalls positiv, und

$$\operatorname{tg}(z-\frac{\omega}{2})-\frac{1}{v}=\frac{2\cos(z-\frac{3}{4}\omega)\sin\frac{\omega}{4}}{\cos(z-\frac{\omega}{2})}.$$

Multiplicirt man die letztere Gleichheit mit

$$v\cot(z-\frac{\omega}{2})=\frac{\cos(z-\frac{\omega}{2})^2}{\sin(z-\omega)\sin(z-\frac{\omega}{2})},$$

welches immer positiv ist; so erfolgt

$$v-\cot(z-\frac{\omega}{2})=\frac{2\cos(z-\frac{\omega}{2})\cos(z-\frac{3}{4}\omega)\sin\frac{\omega}{4}}{\sin(z-\frac{\omega}{2})\sin(z-\omega)},$$

welcher Unterschied nur dann negativ ausfallen kann, wenn von den zwei Winkeln $z-\frac{3}{4}\omega$ und $z-\frac{\omega}{2}$ der kleinere noch im ersten, der grössere aber schon im zweiten Quadranten (Viertel des vollen Winkels) liegt, also $z-\frac{3}{4}\omega<90^0<z-\frac{\omega}{2}$, daher

$$90^0+\frac{\omega}{2}<z<90^0+\frac{3}{4}\omega$$

ist. Mit Ausnahme dieses kleinen Intervalls von $\frac{1}{4}\omega$, das höchstens 10 Minuten betragen dürfte, nemlich von $z>90^0+\frac{\omega}{2}$ bis $z<90^0+\frac{3}{4}\omega$, liegt v immer zwischen $\cot(z-\frac{\omega}{2})$ und $\cot(z-\omega)$. Da nun in diesem Bereiche von $z-\frac{\omega}{2}$ bis $z-\omega$ die Cotangente sich mit dem Winkel stetig abändert, so muss es ein Mittel $z-\theta\omega$ dieser Winkel geben, so dass $\cot(z-\theta\omega)=v$ ausfällt, wobei dem-



nach θ eine absolute zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegende Zahl sein muss. Man kann diese Annahme selbst auch noch für jenes Ausnahms-Intervall gelten lassen, weil dieses so eng ist.

Für diese interessant einfache Gleichung

$$v = \cot(z - \theta\omega) \tag{7}$$

lässt sich die Zahl θ annäherungsweise folgender Massen finden. Entwickelt man beide Formen von v nach den natürlich steigenden Potenzen von $\operatorname{tg}\theta\omega$ und $\operatorname{tg}\omega$, so erfolgt nach (3) und n. 19., wenn man nicht über die erste Ordnung hinausgeht, einerseits

$$v = \cot z + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} + \cot z^2 \operatorname{tg}\omega + \ldots,$$

andrerseits

$$v = \frac{\cot z + \operatorname{tg}\theta\omega}{1 - \cot z \operatorname{tg}\theta\omega} = \cot z + \operatorname{tg}\theta\omega + \cot z^2 \operatorname{tg}\theta\omega + \ldots$$

Sollen nun die erstgradigen Glieder möglichst nahe übereinstimmen, also

$$\operatorname{tg}\theta\omega(1 + \cot z^2) \doteq \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} + \cot z^2 \operatorname{tg}\omega$$

sein, so muss

$$\frac{\operatorname{tg}\theta\omega}{\operatorname{tg}\omega} \doteq \theta \doteq \frac{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{\operatorname{tg}\omega}\sin z^2 + \cos z^2 \doteq \tfrac{1}{2}\sin z^2 + \cos z^2$$

sein. Dies gibt

$$\theta \doteq \frac{1 + \cos z^2}{2} = \frac{3 + \cos 2z}{4} = \frac{3 - \cos 2(90^0 - z)}{4} \tag{8}$$
$$= \frac{3 - \cos 2(z - 90^0)}{4}.$$

Oder entwickelt man beide Formen von v nach den Potenzen von ω gemäss Maclaurin's Theorem, indem man sie durch $f(\omega)$ und $\varphi(\omega)$ bezeichnet; so soll

$$f(\omega) = f(0) + f'(0)\omega + \ldots = \varphi(\omega) = \varphi(0) + \varphi'(0)\omega + \ldots,$$

also, weil schon $f(0) = \cot z = \varphi(0)$ ist, auch

$$f'(0) = \varphi'(0)$$

sein. Nun ist

$$f'(\omega) = \frac{\frac{1}{2}\sin(z - \omega)\sin(z - \frac{\omega}{2}) + \cos(z - \omega)\cos(z - \frac{\omega}{2})}{\sin(z - \omega)^2}$$

und

$$\varphi'(\omega)=\frac{\theta}{\sin(z-\theta\omega)^2};$$

daher soll sein

$$f'(0)=\frac{\frac{1}{2}\sin z^2+\cos z^2}{\sin z^2}=\varphi(0)=\frac{\theta}{\sin z^2},$$

sonach

$$\theta=\tfrac{1}{2}\sin z^2+\cos z^2,$$

wie oben.

Hat man demnach den angemessenen Werth von θ berechnet, so ist ganz einfach

$$v=\cot(z-\theta\omega).$$

IV. Je näher z an 90° liegt, desto näher befindet sich θ an $\frac{1}{2}$. Für diesen gewöhnlichen Fall, wo $v\doteq\cot(z-\frac{1}{2}\omega)$ werden muss, setzt man demnach mit Francoeur (Géodésie n. 259.) und Stampfer (in seinen Vortragsheften, öffentlich genannt: Bauer und Bartak, Anfangsgr. d. prakt. Geom. 8. Wien 1833. S. 194.) vortheilhaft

$$z-\tfrac{1}{2}\omega=Z.$$

Dadurch wird eigentlich

$$v=\frac{\cos Z}{\sin(Z-\frac{1}{2}\omega)}=\frac{\cot Z}{\cos\frac{1}{2}\omega}\cdot\frac{1}{1-\cot Z\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\omega},$$

oder, wenn man theilt,

$$(9)\qquad v=\frac{\cot Z}{\cos\frac{1}{2}\omega}\left[1+\cot Z\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\omega+(\cot Z\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\omega)^2+\ldots\right].$$

Noch kann man $\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\omega}=(1+\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\omega^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\omega^2\ldots$ einführen, und erhält so

$$(10)\qquad v\doteq\cot Z\left[1+\cot Z\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\omega-(\tfrac{1}{2}-\cot Z^2)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\omega^2\right].$$

Diese vorbereitenden Umstaltungen mögen genügen.

21.

Wenden wir uns nunmehr zur Aufstellung der gegliederten Höhenformeln und heben wir mit den vollständigen an, auf welche nur die Formeln (1) und (4) in n. 20. führen können.

I. Nach (1) in n. 18. und nach n. 20. (1) ist

$$H=eu=e\cos z+e\sin z\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2}.$$

Nun ist $e\cos z$ die scheinbare Erhöhung $(M-A)=\mathfrak{H}$ und $e\sin z$ die scheinbare Horizontaldistanz $\mathfrak{D}$ des Punktes M von A; daher $e\sin z \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=\mathfrak{D}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ die dieser Distanz entsprechende Erhöhung $\mathfrak{H}'$ des scheinbaren Horizontes. Setzt man demnach

$$(1) \qquad e\cos z=\mathfrak{H},\ e\sin z=\mathfrak{D},\ \mathfrak{D}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=\mathfrak{H}';$$

so ist die gesuchte Erhöhung

$$(2) \qquad H=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}'.$$

Diesen Ausdruck kann man auch unmittelbar aus der Zeichnung (Taf. I. Fig. 11.) auffinden. Fällt man nemlich aus M auf AT die MK senkrecht und verlängert sie bis zu ihrem Einschnitt L in die Sehne AC; so ist $KM=\mathfrak{H}$, $AK=\mathfrak{D}$, daher $KL=\mathfrak{D}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega=\mathfrak{H}'$, weil $KAL=\frac{1}{2}\omega$; und sofort ist $ML=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}'$. Es ist aber $ALK=90^0-\frac{1}{2}\omega$ und $ACO=MCL=90^0-\frac{1}{2}\omega$, daher $(ALK=CLM)=MCL$, und im Dreieck MCL die $ML=MC=H$; folglich ist $H=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}'$.

Kennt man demnach die gerade Entfernung e des Höhenpunktes M vom Standorte A, so wird man die gemessene Zenithdistanz ζ um die Refraction ϱ vermehren zu der nunmehrigen wahren Zenithdistanz z, wie bei parallelen Verticalen (nach n. 9.), den scheinbaren Höhenunterschied $(M-A)=\mathfrak{H}$, und die scheinbare Horizontaldistanz $\mathfrak{D}$ berechnen, zu dieser wieder die Erhöhung $\mathfrak{H}'$ des scheinbaren Horizontes bestimmen und um sie jene vorläufige Höhe $\mathfrak{H}$ vergrössern, auf dass man die wahre Erhöhung $(M-A)=H$ vollständig erhalte.

II. Aus (4) in n. 20. und aus (3) in n. 18. folgt

$$H=dv=d\frac{\cos z}{\sin(z-\omega)}+d\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}.$$

Berechnet man demnach die g e n ä h e r t e H ö h e

$$(3) \qquad d\frac{\cos z}{\sin(z-\omega)}=h'$$

und (vermöge n. 15.) die der scheinbaren Horizontaldistanz d angehörige Erhöhung des scheinbaren Horizontes

$$(4) \qquad d\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=h,$$

so findet man den verlangten Höhenunterschied $(M-A)$

$$(5) \qquad H=h'+h.$$

Auch dieses bestätigt die Zeichnung (Taf. I. Fig. 11.). Denn es ist im Dreieck ATM die $TM=AT\sin MAT:\sin AMT=d\cos z:\sin(z-\omega)=h'$ und $TC=h$; endlich ist $H=CM=CT+TM$

$=h+h'$. Somit stellt $h=TM$ die mit Rücksicht auf die Neigung ω der Verticalen geschätzte scheinbare Erhöhung $(M-A)$ vor.

22.

Uebergehen wir nun auf die gegliederten Näherungsformeln.

I. Setzt man in der letzten der Gleich. (1) in n. 21.

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega = \frac{-1+\sqrt{1+\operatorname{tg}\omega^2}}{\operatorname{tg}\omega} = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\omega - \frac{1.1}{2.4}\operatorname{tg}\omega^3 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\operatorname{tg}\omega^5 \ldots.$$

und erwägt, dass nach n. 20. und nach denselben Gleich. (1) $\operatorname{tang}\omega = \frac{\mathfrak{D}}{R+\mathfrak{H}}$ ist, so hat man die Erhöhung des scheinbaren Horizontes

$$\mathfrak{H}' = \tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{D}}{R+\mathfrak{H}}.\mathfrak{D} - \left(\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{D}}{R+\mathfrak{H}}\right)^3\mathfrak{D}\ldots,$$

wobei man den Winkel ω nicht zu kennen braucht und gewiss immer mit dem ersten Gliede allein ausreicht.

Im Zusammenhange wird man also nach der Reihe die folgenden Gleichungen verwenden:

$$\varrho = n\frac{e}{R}\Gamma,\quad z=\zeta+\varrho,$$

$$(1)\quad \mathfrak{H}=e\cos z,\ \mathfrak{D}=e\sin z,\ \mathfrak{H}'=\left(\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{D}}{R+\mathfrak{H}}\right)\mathfrak{D}-\left(\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{D}}{R+\mathfrak{H}}\right)^3\mathfrak{D},$$

$$(2)\quad H=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}'.$$

II. Aus n. 20. Gl. (5) und n. 18. Gl. (3) folgt

$$H = d\cot z + d\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} + dv\cot z.2\sin\frac{\omega}{2}.$$

Hier ist

$$(3)\qquad d\cot z = h_0$$

die scheinbare Höhe $(M-A)$, geschätzt nach der Verticalen in A und gemäss n. 8. berechnet, und wieder

$$(4)\qquad d\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = h$$

die Erhöhung des scheinbaren Horizontes.

Endlich stellt das letzte Glied $dv\cot z.2\sin\frac{\omega}{2}$ den Zusatz zu der nach der Verticalen in A geschätzten scheinbaren Höhe h_0, um die eigentlich verlangte nach der Verticalen in B geschätzte Höhe

h' zu erhalten, dar; desswegen bezeichnen wir selben durch Δh_0, nemlich

$$(5) \qquad dv \cot z . 2 \sin \frac{\omega}{2} = \Delta h_0.$$

Nun ist

$$(6) \qquad d \cot z = h_0; \; v = \frac{H}{k}, \; 2 \sin \frac{\omega}{2} = k : R, \text{ daher}$$

$$(7) \qquad \Delta h_0 = H \frac{h_0}{R} \doteq (h_0 + h) \frac{h_0}{R} \doteq \frac{h_0^2}{R}.$$

Dem zufolge ist die verlangte Erhöhung $(M - A)$

$$(8) \qquad H = h_0 + h + \Delta h_0.$$

Fast immer wird man den Zusatz Δh_0 vernachlässigen können, da das Verhältniss

$$(9) \qquad \frac{\Delta h_0}{H} \doteq \frac{h_0}{R}$$

sehr klein ist.

Aehnlich gibt die Gl. (3) in n. 20. mit Gl. (3) in n. 18.

$$H = \frac{d \cot z + d \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}{1 - \cot z \operatorname{tg} \omega}.$$

Führt man hier aus (6) und (4) die h_0 und h ein, und beachtet, dass $\operatorname{tg} \omega = \frac{d}{R}$, also $\cot z \operatorname{tg} \omega = \frac{h_0}{R}$ ist, so findet man

$$H = \frac{h_0 + h}{1 - \frac{h_0}{R}},$$

oder wenn man dividirt:

$$H = (h_0 + h)\left(1 + \frac{h_0}{R} + \frac{h_0^2}{R^2} + \ldots\right).$$

Setzt man daher wieder

$$(7) \qquad \Delta h_0 \doteq (h_0 + h) \frac{h_0}{R} \doteq \frac{h_0^2}{R},$$

so ist

$$(8) \qquad H = h_0 + h + \Delta h_0.$$

Also auch wenn die scheinbare Horizontaldistanz d des Höhenpunktes bekannt ist, kann man die gemessene Zenithdistanz ζ durch die Refraction ϱ zur wahren Zenithdistanz z ergänzen, zu dieser wie bei parallelen Verticallinien (in n. 8.) die scheinbare Höhe h_0 und zu ihr die nach jener Distanz bemessene Erhöhung

h des scheinbaren Horizontes hinzufügen, wonach man den Höhenunterschied $(M-A)=H \doteq h_0 + h$ nur um eine Grösse Δh_0 zu klein erhalten wird, die zufolge Gl. (9) von der Höhe H meistens ein so geringer verhältnissmässiger Theil ist, dass er den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern gleich gehalten werden kann.

III. Die Gleichung (2) in n. 18., verbunden mit Gleichung (10) in n. 20., giebt

$$H = kv \doteq k \cot Z [1 + \cot Z \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\omega - (\tfrac{1}{2} - \cot Z^2) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\omega^2].$$

Setzt man die vorläufige für die calculative Zenithdistanz

$$(10) \qquad \zeta + \varrho - \frac{\omega}{2} = z - \frac{\omega}{2} = Z$$

berechnete Erhöhung

$$(11) \qquad k \cot Z = \mathfrak{h},$$

ihre erste Verbesserung

$$(12) \qquad \mathfrak{h} \cot Z \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\omega = \Delta\mathfrak{h}$$

und ihre zweite Verbesserung

$$(13) \qquad = \mathfrak{h} (\tfrac{1}{2} - \cot Z^2) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\omega^2 \doteq \Delta^2\mathfrak{h};$$

so findet man den Höhenunterschied

$$(14) \qquad H = \mathfrak{h} + \Delta\mathfrak{h} + \Delta^2\mathfrak{h}.$$

Da $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\omega \doteq \sin \tfrac{1}{2}\omega = \dfrac{k}{2R}$ ist, so gibt diese Gleichung mit der (11) multiplicirt $\cot Z \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\omega \doteq \dfrac{\mathfrak{h}}{2R}$, daher ist auch

$$(15) \qquad \Delta\mathfrak{h} \doteq \frac{\mathfrak{h}^2}{2R} = \frac{\mathfrak{h}}{2R} \cdot \mathfrak{h},$$

$$(16) \qquad \Delta^2\mathfrak{h} \doteq -\tfrac{1}{2} \left(\frac{k}{2R}\right)^2 \mathfrak{h} + \left(\frac{\mathfrak{h}}{2R}\right)^2 \mathfrak{h}.$$

Hieraus ersieht man, dass man die zweite Verbesserung $\Delta^2\mathfrak{h}$ wegen ihrer Unbedeutenheit fast immer wird weglassen oder höchstens zur Schätzung des Fehlers berechnen kann. So erhält man die von Stampfer (a. a. O. S. 194.) angegebene Näherungsformel

$$H \doteq \mathfrak{h} + \Delta\mathfrak{h}.$$

Genauer, ohne eine erhebliche Vergrösserung der Rechnung, erhält man die Höhenformel, wenn man Gleichung (9) statt (10) in n. 20. nimmt, und

$$k\frac{\cot Z}{\cos\frac{1}{2}\omega}=\mathfrak{b} \tag{17}$$

setzt, da dann $\cot Z \operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega=\frac{\mathfrak{b}}{k}\sin\frac{1}{2}\omega=\frac{\mathfrak{b}}{2R}$, daher

$$\Delta\mathfrak{b}=\frac{\mathfrak{b}}{2R}.\mathfrak{b},\ \Delta^2\mathfrak{b}\doteq\left(\frac{\mathfrak{b}}{2R}\right)^2\mathfrak{b} \tag{18}$$

wird, und noch immer die Gleichung (14) bestehen bleibt.

IV. Die Gleichung (2) in n. 18. vereint mit den Gleichungen (7) und (8) in n. 20. leitet auf folgende Höhenbestimmung.

Man berechnet vorerst die Hilfszahl

$$\theta=\frac{3-\cos 2(90^0-z)}{4}=\frac{3-\cos 2(z-90^0)}{4}, \tag{19}$$

und sonach die Erhöhung $(M-A)$

$$H=k\cot(z-\theta\omega). \tag{20}$$

V. Verbindet man die Gleichung (1) in n. 18. mit der Gleichung (2) in n. 20., so erhält man

$$H=eu\doteq e\cos\zeta+e\sin\zeta\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}-e\sin\zeta\sin\varrho+e\cos\zeta(\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}-\tfrac{1}{2}\sin\varrho)\sin\varrho.$$

Setzt man

$$e\cos\zeta=\mathfrak{b},\quad e\sin\zeta=\mathfrak{d}, \tag{21}$$

$$\mathfrak{d}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=\mathfrak{b}',\ \mathfrak{d}\sin\varrho=\mathfrak{b}'',\ \mathfrak{b}(\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}-\tfrac{1}{2}\sin\varrho)\sin\varrho\doteq\mathfrak{b}''';$$

so wird

$$H=\mathfrak{b}+\mathfrak{b}'-\mathfrak{b}''+\mathfrak{b}'''. \tag{22}$$

Dabei stellt $\mathfrak{b}'$ die der scheinbaren Horizontaldistanz $\mathfrak{d}$ entsprechende Erhöhung des scheinbaren Horizontes vor, daher kann man (vermöge n. 15.) auch angenähert setzen

$$\mathfrak{b}'\doteq\frac{\mathfrak{d}^2}{2R}. \tag{23}$$

Ferner ist mit Rücksicht auf n. 16. $\mathfrak{b}'':\mathfrak{b}'=\sin\varrho:\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\doteq n\omega:\frac{1}{2}\omega=2n$, also

$$\mathfrak{b}''\doteq 2n\mathfrak{b}'. \tag{24}$$

Endlich ist zur Schätzung des Weglassungsfehlers

$$\mathfrak{b}'''\doteq\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}^2}(\mathfrak{b}'-\tfrac{1}{2}\mathfrak{b}'')\mathfrak{b}''\doteq\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{b}''}{2R}(1-n). \tag{25}$$

Aehnlich gibt die Gleichung (3) in n. 18., verknüpft mit (6) in n. 20.:

$$H \doteq d\cot\zeta + d\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2} - d\,\mathrm{tg}\,\varrho + d\cot\zeta^2(\mathrm{tg}\,\omega - \mathrm{tg}\,\varrho).$$

Setzt man nun

$$(26) \qquad d\cot\zeta = \mathfrak{b},\ d\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2} = \mathfrak{b}',\ d\,\mathrm{tg}\,\varrho = \mathfrak{b}'',$$

$$\mathfrak{b}\cot\zeta(\mathrm{tg}\,\omega - \mathrm{tg}\,\varrho) \doteq \mathfrak{b}''';$$

so gilt wieder die Gleichung (22).

Dabei ist noch

$$(27) \qquad \mathfrak{b}' \doteq \frac{d^2}{2R}$$

die der Horizontaldistanz d entsprechende Erhöhung des scheinbaren Horizontes, und wieder

$$(24) \qquad \mathfrak{b}'' \doteq 2n\mathfrak{b}';$$

endlich ist zur Bemessung des Weglassungsfehlers

$$(28) \qquad \mathfrak{b}''' = \left(\frac{\mathfrak{b}}{d}\right)^2 (2\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}'') = \frac{\mathfrak{b}^2}{R}(1-n);$$

da man auch hier bei $\mathfrak{b}''$ stehen zu bleiben pflegt.

Anstatt also die Zenithdistanz ζ um die Refraction ϱ zu vergrössern, vermindert man die Höhe selbst wegen der Refraction um $\mathfrak{b}''$.

Auf diese Weise rechnet Benzenberg (Höh. Rechenkunst. 8. Düsseldorf. 1813. S. 544.) und nach ihm Netto (Handb. der Vermessungskunde. kl. 8. Berlin. 1825. 2r Thl. S. 138.).

VI. Setzt man endlich für $\mathfrak{b}''$ seinen Näherungswerth aus (24), so findet man

$$(29) \qquad H = \mathfrak{b} + (1-2n)\mathfrak{b}' + \mathfrak{b}'''.$$

Dabei ist $2n$ nach Bouguer $= \frac{1}{9} = 0{\cdot}11$, nach Tob. Mayer $= \frac{1}{8} = 0{\cdot}12$, nach Gauss $= \frac{1}{7\frac{1}{2}} = 0{\cdot}13$, nach Lambert $= \frac{1}{7} = 0{\cdot}14$, nach Delambre $= \frac{1}{6} = 0{\cdot}16$.

Auf solche Art rechnet Crelle (Handb. d. Feldmessens u. s. f. 8. Berlin. 1826. §. 134.)

23.

Sind

2. die *beiderseitigen* Zenithdistanzen gemessen worden, nemlich in A die ζ und in M die ζ'; so ist nach n. 17.

$$\cos(z-\frac{\omega}{2})=\sin\tfrac{1}{2}(\zeta'-\zeta),\ \sin(z-\omega)=\cos\tfrac{1}{2}(\zeta'-\zeta+\omega);$$

mithin übergehen die Höhenformeln in n. 18. in die folgenden:

$$(1)\qquad H=e\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta)}{\cos\frac{1}{2}\omega},$$

$$(2)\qquad H=k\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta)}{\cos\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta+\omega)},$$

$$(3)\qquad H=d\,\frac{\cos\omega}{\cos\frac{1}{2}\omega}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta)}{\cos\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta+\omega)},$$

$$(4)\qquad H=D\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}\Gamma\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta)}{\cos\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta+\omega)}.$$

Von diesen übergeht, wie leicht zu sehen, die Formel (2), wenn man

$$(5)\qquad k\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\zeta'-\zeta)=h,\quad \frac{h}{2R}.h=h'$$

setzt, in

$$(6)\qquad H=h+h',$$

wobei man demnach weder den Winkel ω noch die Refraction zu kennen braucht. (Vergl. Stampfer a. a. O. S. 195.)

24.

III. Die Basis liege mit dem Höhenpunkte nicht im Alignement.

Bei diesem am häufigsten eintretenden Falle kann man wieder (wie in n. 12. schon erwähnt) entweder die Horizontal- oder die geneigten Winkel an den Grenzpunkten der Standlinie messen.

1. Man habe bei A (in Taf. I. Fig. 12.) den Horizontalwinkel $PAB'=\varkappa$ und an B den Horizontalwinkel $QBA'=\lambda$ gemessen. Vollendet man durch Führung der $B'P$ das Dreieck APB', so ist, weil die Ebene PAB' auf OA, daher nicht wie die $A'BQ$ auf OB senkrecht steht, der Winkel $AB'P$ von dem gemessenen $A'BQ=\lambda$ etwas, wenn auch noch so wenig verschieden, was ich nirgends beachtet finde. Diesen Winkel, den wir mit λ' bezeichnen, werden wir bestimmen, indem wir um B' das Kugeldreieck DEF legen. In diesem ist, so wie die Ebene PAB' auf OA, also auch auf der Ebene AOB senkrecht steht, die Seite DE auf DF senkrecht, also $EDF=90^0$. Ferner ist $DE=AB'P=\lambda'$, $DFE=A'BQ=\lambda$, und wenn wir den bekannten Winkel $AOB=\omega_0$ setzen, ist am Dreieck AOB' wegen $OAB'=90^0$ der $AB'F=90^0+\omega_0=DF$. Mithin giebt das Kugeldreieck die Gleichung

$$\sin DF=\operatorname{tang} DE\,.\operatorname{tang}(90^0-DFE),$$

oder

$$\cos\omega_0 = \operatorname{tang}\lambda' \cot\lambda,$$

folglich ist

$$\operatorname{tang}\lambda' = \operatorname{tang}\lambda \cos\omega_0.$$

Bezeichnet man nun der Basis AB scheinbare Horizontalprojection AB' mit b_1, so findet man aus dem Dreiecke $AB'P$ die scheinbare Horizontaldistanz

$$AP = d_1 = b_1 \frac{\sin\lambda'}{\sin(\varkappa + \lambda')}.$$

Ingleichen findet man, wenn $BA'Q = \varkappa'$ gesetzt wird,

$$\operatorname{tang}\varkappa' = \operatorname{tang}\varkappa \cos\omega_0,$$

und wenn der Standlinie AC zweite Horizontalprojection $BA' = b_2$ gesetzt wird, aus dem Dreiecke $A'BQ$ die scheinbare Horizontalprojection

$$BQ = d_2 = b_2 \frac{\sin\varkappa'}{\sin(\lambda + \varkappa')}. \text{ *)}$$

Dass man hiezu die Horizontaldistanzen b_1, b_2, so wie den Winkel ω_0, in dem Höhendreiecke OAB nach den in n. 18. bis n. 23. gelehrten Weisen aus sonstigen bekannten Grössen berechnen müsse, ist wohl ohne meine Erinnerung klar.

2. Hat man die geneigten Winkel $MAB = \alpha$ und $MBA = \beta$ gemessen und die Basis $AB = b$ ist bekannt, so findet man die geraden Distanzen $AM = e_1$ und $BM = e_2$ wie in n. 12. aus dem Dreiecke ABM nach den Gleichungen

$$e_1 = b \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad e_2 = b \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

---

*) Die von λ und $\varkappa$ nur wenig verschiedenen Winkel λ' und $\varkappa'$ lassen sich auf folgende einfachere Weise zureichend scharf bestimmen. Es ist wegen $\cos\omega_0 < 1$ auch $\lambda' < \lambda$ und $\operatorname{tang}(\lambda - \lambda') = \frac{\operatorname{tg}\lambda - \operatorname{tg}\lambda'}{1 + \operatorname{tg}\lambda \operatorname{tg}\lambda'}$ $\doteq \frac{1 - \cos\omega_0}{1 + \operatorname{tg}\lambda^2 \cos\omega_0} . \operatorname{tg}\lambda = \frac{\sin\frac{1}{2}\omega_0 . \sin 2\lambda}{1 - 2\sin\lambda^2 \sin\frac{1}{2}\omega_0{}^2}$. Da nun ω_0 höchstens 40′ sein dürfte, so ist $\sin\frac{1}{2}\omega_0 \doteq < \frac{\omega_0}{2\Gamma}$, d. h. nahe gleich, wenn auch kleiner als $\frac{\omega^0}{2\Gamma}$, $2(\sin\lambda \sin\frac{1}{2}\omega_0)^2 \doteq > 0$ und $\operatorname{tg}(\lambda - \lambda') \doteq < \frac{\lambda - \lambda'}{\Gamma}$. Darum darf man mit Recht setzen $\lambda - \lambda' \doteq \frac{1}{4}\frac{\omega_0}{\Gamma}\omega_0 \sin 2\lambda$. Eben so ist

$$\varkappa - \varkappa' = \frac{1}{4}\frac{\omega_0}{\Gamma}\omega_0 \sin 2\varkappa.$$

Diese leicht zu berechnenden Unterschiede von λ nnd $\varkappa$ abgezogen, geben sofort die Winkel λ' uod $\varkappa'$ selbst.

Nach diesen Vorrechnungen und nachdem man noch die Radienvectoren $OA = R_1$, $OB = R_2$ bestimmt hat, kann man in den Höhendreiecken OAM und OBM die Winkel $AOM = \omega_1$ und $BOM = \omega_2$ berechnen und aus den gemessenen und der Refraction halber verbesserten Zenithdistanzen die wahren Höhenunterschiede $(M-A) = OM - OA = H_1$ und $(M-B) = OM - OB = H_2$ nach der in n. 18. bis 23. erörterten Weise bestimmen. Aus ihnen kann man sonach noch das Gefälle der Basis AB, nemlich $g = (B-A) = R_2 - R_1 = H_1 - H_2$, berechnen, oder, wenn es bereits bekannt wäre, zur Controle benützen.

25.

Untersuchen wir nun den Einfluss der unvermeidlichen Fehler der gemessenen Strecken und Winkel auf die Fehler der aus ihnen berechneten Grössen; und bezeichnen wir dabei jeden Fehler einer Grösse durch den, ihrer Bezeichnung vorgesetzten Buchstaben δ.

1. Aus den Ausdrücken von d_1, d_2, wenn man abkürzend $\varkappa' = \varkappa$, $\lambda' = \lambda$ setzt, findet man durch Logarithmation und Differentiation

$$\frac{\delta d_1}{d_1} = \frac{\delta b_1}{b_1} - \cot(\varkappa+\lambda)\frac{\delta\varkappa}{\Gamma} + \frac{\sin\varkappa}{\sin\lambda\sin(\varkappa+\lambda)}\frac{\delta\lambda}{\Gamma},$$

oder, wenn man mit $d_1\sin(\varkappa+\lambda)$ multiplicirt und erwägt, dass $\frac{\sin\varkappa}{\sin\lambda} = \frac{d_2}{d_1}\cdot\frac{b_1}{2}$, und weil Dreieck $OAB' \backsim OBA'$ ist, dass $\frac{b_1}{b_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_2-g}{R_2} = 1 - \frac{g}{R_2}$; so findet man

$$\sin(\varkappa+\lambda)\delta d_1 = \sin\lambda\delta b_1 - \cos(\varkappa+\lambda)\frac{\delta\varkappa}{\Gamma} + (1-\frac{g}{R_2})d_2\frac{\delta\lambda}{\Gamma},$$

daher nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$(\sin(\varkappa+\lambda)\delta d_1)^2 = (\sin\lambda\delta b_1)^2 + (d_1\cos(\varkappa+\lambda)\frac{\delta\varkappa}{\Gamma})^2 + ((1-\frac{g}{R_2})d_2\frac{\delta\lambda}{\Gamma})^2$$

und analog

$$(\sin(\varkappa+\lambda)\delta d_2)^2 = (\sin\lambda\delta b_2)^2 + (d_2\cos(\varkappa+\lambda)\frac{\delta\lambda}{\Gamma})^2 + ((1-\frac{g}{R_1})d_1\frac{\delta\varkappa}{\Gamma})^2;$$

wobei man wohl fast immer $\frac{g}{R_1}$ und $\frac{g}{R_2}$ vernachlässigen dürfen wird.

2. Aehnlich findet man aus den Ausdrücken von e_1, e_2

$$\frac{\delta e_1}{e_1} = \frac{\delta b}{b} - \cot(\alpha+\beta)\frac{\delta\alpha}{\Gamma} + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\delta\beta}{\Gamma},$$

oder, wenn man mit $e_1\sin(\alpha+\beta)$ multiplicirt und erwägt, dass $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{e_2}{e_1}$ ist, nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$(\sin(\alpha+\beta)\delta e_1)^2 = (\sin\beta\delta b)^2 + (e_1\cos(\alpha+\beta)\frac{\delta\alpha}{\Gamma})^2 + (e_2\frac{\delta\beta}{\Gamma})^2,$$

und analog

$$(\sin(\alpha+\beta)\delta e_2)^2 = (\sin\alpha\delta b)^2 + (e_2\cos(\alpha+\beta)\frac{\delta\beta}{\Gamma})^2 + (e_1\frac{\delta\alpha}{\Gamma})^2.$$

3. Für die Ausdrücke von H in n. 18., wenn man für diese Fehleruntersuchung $\delta\omega = 0$ setzt, da schon ω selbst sehr gering ist, erhält man auf die angegebene Weise:

$$\left(\frac{\delta H}{H}\right)^2 = \left(\frac{\delta e}{e}\right)^2 + (\tang(z-\frac{\omega}{2})\frac{\delta z}{\Gamma})^2$$

$$= \left(\frac{\delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\cos\frac{\omega}{2}}{\sin(z-\omega)\cos(z-\frac{\omega}{2})}\frac{\delta z}{\Gamma}\right)^2,$$

und dabei

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{\delta d}{d} = \frac{\delta D}{D}.$$

26.

Um eine Vorstellung von der Genauigkeit zu geben, mit welcher trigonometrische Höhenbestimmungen ausgeführt werden können, und wie weit die aufgestellten Näherungsformeln ausreichend seien, möge hier noch die Berechnung einer mit vieler Sorgfalt vorgenommenen solchen Messung stehen.

D'Aubuisson *) unternahm im October d. J. 1809 eine trigonometrische Messung der Höhe des Monte Gregorio, welcher Berg **) in der Nähe von Turin mit seinem Gipfel unter 45° geographischer Breite liegen soll, den ich aber weder auf einer Karte noch in einer Geographie auffinden konnte.

Die Länge seiner Standlinie war 670·2 Meter und auf den Eispunkt reducirt 670·3 Meter. Das östliche Ende A lag um $g = 1{\cdot}8^m$ niedriger als das westliche B. Turin selbst liegt 607 Par. Fuss = 197 Meter, seine Sternwarte 738 P. F. über der Meeresfläche. ***)

Die Winkel wurden mit einem von Lenoir verfertigten achtzölligen Borda'ischen Wiederholungskreise gemessen.

1. Der geneigte Winkel α am östlichen Standorte A war 97° 13′ 10·″5; nemlich

---

*) Wie Benzenberg in seiner Höheren Rechenkunst §. 29. und 36. anführt.

**) Wie J. J. Suppan in seiner Hypsometrie. gr. 8. Innsbruck 1834. §. 97. erwähnt.

***) Gehler's Physikal. Wörterb. 5 Bd. „Höhenpunkte, barometrische."

Wiederholungen.	Ablesungen.	2α	Abweichung vom Mittel. $2\Delta\alpha$	$4\Delta\alpha^2$
2 . . .	194° 26′ 15″	194° 26′ 15″	+6″	36
4 . . .	28 53 0	— — 45	−24	576
6 . . .	223 19 0	— — 0	+21	441
8 . . .	57 45 30	— — 30	− 9	81
10 . . .	252 11 45	— — 15	+ 6	36
		Summe 105	0	$1170 = 4[\Delta\alpha^2]$

Im Mittel $2\alpha = 194^\circ 26' 21''$, also $\alpha = 97^\circ 13' 10''\cdot 5$, mittlerer Fehler der einzelnen Beobachtungen *) $= \sqrt{[\Delta\alpha^2]:(5-1)} = \frac{1}{4}\sqrt{1170}$ **) $= 8''\cdot 5$, mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels $= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1170}{5}}$ $= 3''\cdot 8 = \delta\alpha$.

2. Der andere geneigte Winkel β am westlichen Standorte B war $76^\circ 32' 46''\cdot 5$, nemlich

Wiederholungen.	Ablesungen.	2β	$2\Delta\beta$	$4\Delta\beta^2$
2 . . .	153° 6′ 15″	153° 6′ 15″	−42″	1764
4 . . .	306 12 30	— 6 15	−42	1764
6 . . .	99 18 0	— 5 30	+ 3	9
8 . . .	252 22 0	— 4 0	+93	8649
10 . . .	45 27 45	— 5 45	−12	144
		Summe 27 45	0	12330

Im Mittel $2\beta = 153^\circ 5' 33''$, also $\beta = 76^\circ 32' 46''\cdot 5$, mittlerer Fehler $= 27''\cdot 8$, und $\delta\beta = 12''\cdot 4$.

Aus beiden folgt der dritte Winkel $AMB = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ $= 6^\circ 14' 3''$ mit dem mittleren Fehler des arithmetischen Mittels $= \sqrt{\delta\alpha^2 + \delta\beta^2} = 13''\cdot 0$. Dieser Winkel ist demnach viel zu spitzig, daher die Basis viel zu kurz. Ueberdies konnte D'Aubuisson diesen Winkel selbst nicht messen, er war zweimal mit dem Kreise auf dem Berge gewesen, aber jedesmal verhüllten Wolken die Aussicht.

3. Zu gleicher Zeit hatte D'Aubuisson die Zenithdistanzen gemessen, und zwar an A die $\zeta_1 = 73^\circ 28' 49''\cdot 5$, nemlich

*) Nach Gerling's Ausgleichungs-Rechnungen. 8. Hamburg u. Gotha. 1843. §. 16. n. 7. und §. 17. n. 11.

**) Gerechnet mit Buchner's Tab. radicum, quadratorum et cuborum. Nürnberg. 1701., von der ich ein durchaus corrigirtes Exemplar besitze.

Wiederholungen.	Ablesungen.	$2\zeta_1$	$2\varDelta\zeta_1$	$4\varDelta\zeta_1^2$
2 . . .	146° 57′ 0″	146° 57′ 0″	+39″	1521
4 . . .	293 55 0	— 58 0	—21	441
6 . . .	80 53 0	— 58 0	—21	441
8 . . .	227 50 0	— 57 0	+39	1521
10 . . .	14 48 15	— 58 15	—36	1296
		Summe 38 15	0	5220

Im Mittel $2\zeta_1 = 146^0 57' 39''$, also $\zeta_1 = 73^0 28' 49''{\cdot}5$, mittlerer Fehler $= 18''{\cdot}1$ und $\delta\zeta_1 = 8''{\cdot}1$.

4. Die Zenithdistanz an B war $\zeta_2 = 73^0 47' 52''{\cdot}5$, nemlich

Wiederholungen.	Ablesungen.	$2\zeta_2$	$2\varDelta\zeta_2$	$4\varDelta\zeta_2^2$
2 . . .	147° 35′ 30″	147° 35′ 30″	+ 15	225
4 . . .	295 11 45	— 36 15	—30	900
6 . . .	82 47 45	— 36 0	— 15	225
8 . . .	230 23 0	— 35 15	+ 30	900
10 . . .	17 58 45	— 35 45	0	0
		Summe 28 45	0	2250

Im Mittel $2\zeta_2 = 147^0 35' 45''$, also $\zeta_2 = 73^0 47' 52''{\cdot}5$, mittlerer Fehler $= 11''{\cdot}9$ und $\delta\zeta_2 = 5''{\cdot}3$.

Da D'Aubuisson die Winkel höchstens in Viertelminuten angibt, so scheint seines Winkelmessers Nonius nur halbe Minuten angegeben zu haben.

Berechnen wir nun zuerst den Erdhalbmesser r, den Radiusvector R für A und B, da ihr Höhenunterschied nur $1{\cdot}8^m$ beträgt. Hiezu ist (vermöge n. 13. und 18.):

$\varepsilon^2 = 0{\cdot}00671186$	$\log \varepsilon^2 = 7{\cdot}8268429$ *)	$\log a = 6{\cdot}8046136$
$\varphi = 45^0$	$\varepsilon = 8{\cdot}9134214$	$\cos\psi = 9{\cdot}9992700$
$a = 6376959^m$	$\sin\varphi = 9{\cdot}8494850$	$\log r = 6{\cdot}8053436$
	$\sin\psi = 8{\cdot}7629064$	
	$\psi = 3^0 19' 16''$	$r = 6387687^m$
		Turin's Höhe $= +197$
		$R = 6387884$.

Zur Berechnung des Convergenzwinkels ω_0 der Verticalen in A und B ist (gemäss n. 18.):

---

*) Nach Vega und Hülsse's, so wie nach Callet's Tafeln.

$b_1 = 670{\cdot}3^m$	$\log b_1 = 2{\cdot}82627$ *)	$\omega_0 = 22''$, also zu klein,
$\Gamma = 206264''{\cdot}8$	„ $R = 3{\cdot}19465$	als dass man die Verti-
	$\Gamma = 5{\cdot}31443$	calen nicht für parallel
	$\omega_0 = 1{\cdot}33535$	annehmen sollte.

Da das Gefäll der Basis $g = 1{\cdot}8^m$ auf $b_1 = 670{\cdot}3^m$, also nur höchst gering ist, so kann man die Basis selbst $b = \sqrt{b_1^2 + g^2} = b_1 = 670{\cdot}3^m$ gelten lassen.

Benzenberg gibt zwar (a. a. O.) D'Aubuisson's Basismessung nicht an, indessen dürfte sich doch voraussetzen lassen, er habe sie wenigstens zweimal gemessen und, wie ich nach Handschuh's und Gerling's sorgsamen Untersuchungen über Genauigkeit von Kettenmessungen **) annehmen möchte, ihren mittleren Fehler wenigstens zu $0{\cdot}1^m = \delta b$ gefunden.

Für die Ausrechnung der geraden Entfernungen $e_1 = AM$ und $e_2 = BM$ haben wir rücksichtlich n. 24.

$\log \sin \alpha = 9{\cdot}9965431$	$\log e_1 = 3{\cdot}7783862$	$e_1 = 6003^m$
$b = 2{\cdot}8262692$	$e_2 = 3{\cdot}7870138$	$e_2 = 6127$
$-$ „ $\sin(\alpha+\beta) = 0{\cdot}9642015$		
$\sin \beta = 9{\cdot}9879155$		

Diese Seiten sind also nahe 9mal so lang als die Standlinie, daher diese unverhältnissmässig klein angenommen.

Daraus finden wir nun die Refraction, wozu wir $n = 0{\cdot}08$ wählen.

$\log e_1 = 3{\cdot}77839$	$\log \varrho_1 = 1{\cdot}19056$	$\zeta_1 = 73^\circ 28' 49''{\cdot}5$
$-$ „ $R = 3{\cdot}19465$	$\varrho_2 = 1{\cdot}19918$	$\varrho_1 = \quad 15{\cdot}5$
$n = 8{\cdot}90309$		$z_1 = 73\ 29\ \ 5{\cdot}0$
$\Gamma = 5{\cdot}31443$		$\zeta_2 = 73\ 47\ \ 52{\cdot}5$
$e_2 = 3{\cdot}78701$		$\varrho_2 = \quad 15{\cdot}8$
		$z_2 = 73\ 48\ \ 8{\cdot}3.$

Dazu suchen wir noch die Convergenzwinkel ω_1, ω_2 nach n. 18.

$\log e_1 = 3{\cdot}77839$	$R = 6387884$	$\log e_2 = 3{\cdot}78701$	$R = 6387884$
$\cos z_1 = 9{\cdot}45373$	$e_1 \cos z_1 = \quad 1707$	$\cos z_2 = 9{\cdot}44553$	$e_2 \cos z_2 = \quad 1708$
$\sin z_1 = 9{\cdot}98170$	Nenn. $= 6389591$	$\sin z_2 = 9{\cdot}98241$	Nenn. $= 6389592$
$e_1 \cos z_1 = 3{\cdot}23212$		$e_2 \cos z_2 = 3{\cdot}23254$	
$e_1 \sin z_1 = 3{\cdot}76009$	$\omega_1 = 185''{\cdot}8$	$e_2 \sin z_2 = 3{\cdot}76942$	$\omega_2 = 189''{\cdot}8$
$-$Nenn. $= 3{\cdot}19453$	$= 3' 5''{\cdot}8$	$-$Nenn. $= 3{\cdot}19453$	$= 3' 9''{\cdot}8$
$\Gamma = 5{\cdot}31443$	$\frac{1}{2}\omega_1 = 1' 32{\cdot}9$	$\Gamma = 5{\cdot}31443$	$\frac{1}{2}\omega_2 = 1' 34''{\cdot}9$
$\log \omega_1 = 2{\cdot}26905$		$\log \omega_2 = 2{\cdot}27838$	

Endlich berechnen wir die Höhen H_1, H_2 nach n. 18. Gl. (1).

*) Nach Lalande's Tafeln.

**) Archiv. VI. Bd., 4 H., S. 375.

$z_1 - \frac{1}{2}\omega_1 = 73^\circ 27' 32''\cdot 1$	$z_2 - \frac{1}{2}\omega_2 = 73^\circ 46' 33''\cdot 4$
$\log e_1 = 3\cdot 7783862$	$\log e_2 = 3\cdot 7870138$
$\cos(z_1 - \frac{1}{2}\omega_1) = 9\cdot 4543917$	$\cos(z_2 - \frac{1}{2}\omega_2) = 9\cdot 4462175$
$\log H_1 = 3\cdot 2327779$	$\log H_2 = 3\cdot 2332313$
$H_1 = 1709\cdot 14^m$	$H_2 = 1710\cdot 93^m$.

Bedeutend kürzer ohne die Convergenzwinkel findet man diese Höhen nach n. 22. I.

$\log e_1 = 3\cdot 7783862$	$R = 6387884$	$\log \mathfrak{D}^2 = 7\cdot 52018$
$\cos z_1 = 9\cdot 4537326$	$\mathfrak{h} = \quad 1706\cdot 55$	$R + \mathfrak{h} = 6\cdot 80547$
$\sin z_1 = 9\cdot 9817026$	$R + \mathfrak{h} = 6389591$	$2 = 0\cdot 30103$
$\mathfrak{h} = 3\cdot 2321188$		$\log \mathfrak{h}' = 0\cdot 41368$
$\mathfrak{D} = 3\cdot 7600888$	$\mathfrak{h} = 1706\cdot 55$	
	$\mathfrak{h}' = \quad 2\cdot 59$	
	$H_1 = 1709\cdot 14^m$	

$\log e_2 = 3\cdot 7870138$	$R = 6387884$	$\log \mathfrak{D}^2 = 7\cdot 53885$
$\cos z_2 = 9\cdot 4455302$	$\mathfrak{h} = \quad 1708\cdot 22$	$R + \mathfrak{h} = 6\cdot 80547$
$\sin z_2 = 9\cdot 9824092$	$R + \mathfrak{h} = 6389592$	$2 = 0\cdot 30103$
$\mathfrak{h} = 3\cdot 2325440$		$\log \mathfrak{h}' = 0\cdot 43235$
$\mathfrak{D} = 3\cdot 7694230$	$\mathfrak{h} = 1708\cdot 22$	
	$\mathfrak{h}' = \quad 2\cdot 71$	
	$H_2 = 1710\cdot 93^m$	

Jedenfalls ist zur Controle das Gefälle der Basis $g = H_2 - H_1 = 1\cdot 8^m$.

Die mittleren zu befürchtenden Fehler der e und H habe ich nach wiederholter genauer Rechnung, die ich jedoch hier weglasse, in folgenden Beträgen gefunden:

$$\delta e_1 = 3\cdot 65^m,\ \delta e_2 = 3\cdot 64^m;\ \delta H_1 = 1\cdot 06^m,\ \delta H_2 = 1\cdot 03^m.$$

Vergleichen wir die letzteren Fehler mit $\varDelta h_0$ in n. 22. II., und setzen wir, da $\frac{h_0}{\mathfrak{h}} = \frac{d}{e \sin z} = \frac{\sin(z-\omega)}{\sin z \cos \omega} = 1 - \cot z \operatorname{tg} \omega$ ist, für h_0 die grössere $\mathfrak{h}$, also $\varDelta h_0 = \frac{\mathfrak{h}_0^{\,2}}{R}$; so finden wir doch nur $\varDelta h_0 = 0\cdot 46^m$, daher noch nicht die Hälfte von δH, und wir können folglich diese wegen der Convergenz der Verticalen anzubringende Correction für zu gering erachten, als dass wir sie nicht den unvermeidlichen Messungsfehlern beizählen sollten.

Benzenberg findet:

$\alpha = 97^\circ 13' 10''$	$e_1 = 6003\cdot 2^m$	$\zeta_1 = 73^\circ 28' 50''$
$\beta = 76\ 32\ 46$	$e_2 = 6123\cdot 7$	$\zeta_2 = 73\ 47\ 53$,

daher nach seiner in n. 22. Gl. (21)—(24) skizzirten Rechnung

$$\mathfrak{d}_1 = 5755\cdot 4,$$
$$\mathfrak{d}_2 = 5880\cdot 4,\ \text{dazu}\ \omega_2 = 3' 10'',$$

und weil dieser Winkel sofort vernachlässigt werden darf:

$$\begin{array}{rl} \mathfrak{b}_1 &= 1707{\cdot}0 \\ \mathfrak{b}_1' &= \quad 2{\cdot}60 \\ -\mathfrak{b}_1'' &= -\ 0{\cdot}41 \\ \hline H_1 &= 1709{\cdot}19^m \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \mathfrak{b}_2 &= 1708{\cdot}7 \\ \mathfrak{b}_2' &= \quad 2{\cdot}71 \\ -\mathfrak{b}_2'' &= -\ 0{\cdot}43 \text{ (für } n=0{\cdot}08) \\ \hline H_2 &= 1710{\cdot}98^m \\ g &= \quad 1{\cdot}80 \\ \hline H_1 &= 1709{\cdot}18^m. \end{array}$$

Er bemerkt dazu: „Obschon die Uebereinstimmung bis auf 0·01^m wohl nur zufällig ist, so sieht man doch aus der ganzen Rechnung die grosse Sorgfalt, welche D'Aubuisson auf diese Messung verwandte, und wir können sie für eine der genauesten halten, welche wir besitzen. D'Aubuisson versichert, dass er die Genauigkeit dieser Messung bis auf einen halben Meter glaubt verbürgen zu können."

Ob eine so grosse Schärfe erreichbar sei, möchte sich jedoch nur erst durch Vergleichung mehrerer von verschiedenen Geometern mit nahe gleich scharfen Messwerkzeugen ausgeführten trigonometrischen Messungen von einerlei Berghöhen entscheiden lassen. Leider kann ich hiefür nur ein eben nicht günstiges Beispiel auffinden. Die Höhe des Montblanc über dem Genfer See ist nemlich *) nach der trigonometrischen Messung von Pictet 2238 Toisen, nach jener von Schuckburgh 2257 Toisen und nach der von Tralles 2276·5 Toisen. So grosse Unterschiede können gewiss nur von Unvollkommenheit der Mittel und Methoden der Messung und Rechnung herrühren.

III.

Ueber zwei Abhandlungen von Nicolaus Fuss in den Gedenkschriften der Kaiserl. Akademie zu St. Petersburg.

Von dem

Herrn Professor Dr. Anger

in Danzig.

In den Memoiren der Petersburger Akademie vom Jahre 1811 befindet sich eine Abhandlung von Fuss über die geometrische Aufgabe:

*) Vergl. Suppan Hypsometrie S. 145.

> „**Ein schiefwinkliges Parallelogramm durch zwei sich rechtwinklig schneidende gerade Linien in vier gleiche Theile zu theilen.**“,

für welche, auf geometrisch-trigonometrische Art, drei Auflösungen gegeben werden.

Diese Aufgabe gehört, wie man leicht sieht, zu derjenigen grossen Classe von Aufgaben, welche durch Projection gelöst werden können; wir stellen daher folgende Betrachtungen an.

1. Jedes schiefwinklige Parallelogramm kann als die orthographische Projection eines gegen die Projections-Ebene schief liegenden Quadrats betrachtet werden.

2. Zieht man durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Quadrats eine beliebige gerade Linie und auf derselben durch eben diesen Punkt eine andere senkrecht, so theilen diese beiden Linien das Quadrat stets in vier gleiche Theile.

Es kommt also darauf an, durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen des gegebenen schiefwinkligen Parallelogrammes zwei sich einander unter rechten Winkeln schneidende Linien so zu ziehen, dass sie als die orthographischen Projectionen von zwei andern, im Mittelpunkte des entsprechenden Quadrats in seiner Ebene sich rechtwinklig schneidenden Linien erscheinen.

Denkt man sich nun durch die Endpunkte des Quadrats einen Kreis gelegt, so sieht man sogleich, dass die Aufgabe keine andere ist, als die bekannte:

> „**Wenn zwei conjugirte Durchmesser einer Ellipse gegeben sind, die Lage der Haupt-Axen zu bestimmen.**“

Es sei nun (Taf. II. Fig. 1.) $ABCD$ das gegebene Parallelogramm, O der Durchschnittspunkt der Diagonalen AC und BD, GOH die eine, und die auf ihr senkrechte EOF die andere der gesuchten Linien, so ist, wenn man $AC=2p$, $BD=2q$, $\angle AOD=s$, $\angle GOA=\vartheta$ setzt, bekanntlich

$$\text{Tang}\,2\vartheta=\frac{qq\,\text{Sin}\,2s}{pp+qq\,\text{Cos}\,2s}\ {}^{*)}$$

oder, wenn $\frac{q}{p}=n$ gesetzt wird,

$$\text{Tang}\,2\vartheta=\frac{n^2\,\text{Sin}\,2s}{1+n^2\,\text{Cos}\,2s},$$

wodurch die Richtung der Linie GOH, also auch die von EOF bestimmt, mithin die obige Aufgabe gelöst ist.

Wir lassen nun noch die Vergleichung unserer Auflösung mit dem Resultate der in den Petersburger Memoiren gegebenen Auf-

---

*) Man sehe u. a. Euler's Einleitung. Thl. 2. §. 145.

lösungen hier folgen: der Verfasser setzt daselbst (Taf. II. Fig. 2.) $AB=a$, $AD=b$, $\angle BAD=\alpha$, zieht die Linie MON parallel mit AB, bezeichnet den Winkel MOG durch ζ und findet durch seine Betrachtungen

$$\text{Tang}\,2\zeta = \frac{bb\,\text{Sin}\,2\alpha}{aa + bb\,\text{Cos}\,2\alpha}.$$

Die Uebereinstimmung dieses Resultats mit dem unsrigen ist leicht zu erkennen; denn zieht man KOL parallel mit AD, so sind $MN=2a$ und $KN=2b$ ebenfalls als conjugirte Diameter einer Ellipse anzusehen, welche den Winkel MOK mit einander bilden.

Unsere Auflösung führt endlich von selbst auf folgende sehr einfache rein geometrische Construction:

Es sei (Taf. II. Fig. 3.) $ABCD$ das gegebene schiefwinklige Parallelogramm, welches durch zwei auf einander senkrechte Linien in vier gleiche Theile getheilt werden soll.

Man ziehe die Diagonalen AC, BD, welche sich in O schneiden, fälle von einem beliebigen Endpunkte C einer Diagonale ein Loth auf die andere und trage auf dasselbe nach beiden Seiten die Hälfte der andern auf, mache also $CK=CL=BO$, ziehe KO und LO und halbire den Winkel KOL durch eine Gerade GOH, so ist diese die eine und die auf ihr senkrechte EOF die andere der beiden gesuchten Theilungslinien.

Die Nova Acta der Petersburger Akademie vom Jahre 1806 *) enthalten eine Abhandlung des Akademikers Fuss unter dem Titel: „Observationes circa ellipsin quandam prorsus singularem", in welcher der Verfasser eine Ellipse untersucht, die ihm wegen mehrerer ausgezeichneter Eigenschaften besonders merkwürdig erscheint; ich lasse dieselben in der Reihenfolge, wie sie dort aufgeführt werden, hier folgen:

1. Wenn in irgend einem Kreise zu den einzelnen Sinus die entsprechenden Cosinus mit ihrem Zeichen addirt werden, so liegen alle auf diese Art bestimmte Punkte in einer Ellipse.

2. Wenn man in diesem Kreise denjenigen Durchmesser zieht, von welchem aus die Bogen gezählt werden, so geht der auf diesem normale Durchmesser durch zwei einander entgegengesetzte Durchschnittspunkte des Kreises und der Ellipse.

3. Der Abstand des Mittelpunkts von den Durchschnittspunkten des ersten Durchmessers mit der Ellipse, ist gleich dem Cosinus eines halben rechten Winkels.

4. Die halbe grosse Axe der Ellipse ist gleich dem doppelten Apothema des jenem Kreise eingeschriebenen regulären Fünf-

*) Nova Acta Acad. Petrop. Tom. XV. ad annos 1799—1802. Petrop. 1806.

ecks, und die halbe kleine Axe gleich der Seite des demselben Kreise eingeschriebenen regulären Zehnecks. Daher

5. die Differenz der halben Axen gleich dem Halbmesser des Kreises, und das Rechteck aus denselben so gross als das Quadrat des Halbmessers; woraus ferner

6. der Inhalt der Ellipse gleich dem Inhalte des Kreises folgt, ebenso die Gleichheit der vom Kreise und der Ellipse gebildeten Möndchen.

7. Wenn die vier Durchschnittspunkte des Kreises und der Ellipse durch Chorden und Durchmesser verbunden werden, so entstehen Kreissectoren, welche den elliptischen Sectoren, ebenso Kreissegmente, welche den elliptischen Segmenten gleich sind.

8. Wenn in dem Punkte, von welchem die Bogen gezählt werden, auf den Durchmesser ein Perpendikel errichtet wird, welches die grosse Axe trifft, so ist dasselbe der halben grossen Axe gleich.

9. Wenn man dasselbe Perpendikel bis es dem Durchmesser gleich ist, verlängert, und von seinem Endpunkte durch den Mittelpunkt eine den Kreis schneidende Gerade zieht, so ist der Abstand des entfernteren Durchschnittspunkts vom Endpunkte des Perpendikels, der grossen Axe, und der Abstand des näher gelegenen von demselben Endpunkte, der kleinen Axe gleich.

10. Wenn von demselben Perpendikel die Hälfte des Kreishalbmessers abgeschnitten wird, so geht die dieser Tangente entsprechende Secante, gehörig verlängert, durch zwei Durchschnittspunkte des Kreises und der Ellipse.

11. Der Abstand der Brennpunkte von dem Durchmesser, welcher durch den Anfangspunkt der Bogen geht, ist die mittlere Proportionale zwischen dem Kreishalbmesser und der halben grossen Axe, und der Abstand der Brennpunkte von dem auf jenen Durchmesser normal gezogenen, ist die mittlere Proportionale zwischen dem Kreishalbmesser und der halben kleinen Axe.

12. Die Differenz zwischen dem Kreishalbmesser und der halben kleinen Axe ist das vierte Glied einer geometrischen Progression, deren erstes Glied die halbe grosse Axe und deren zweites Glied der Kreishalbmesser ist; und die Summe des Kreishalbmessers und der halben grossen Axe ist das vierte Glied einer geometrischen Progression, deren erstes Glied die halbe kleine Axe, und deren zweites Glied der Kreishalbmesser ist.

13. Hier kommt noch die nur näherungsweise wahre Eigenschaft hinzu: dass der Unterschied zwischen dem Umfange der Ellipse und dem des Kreises nahe gleich ist jedem der Kreisbogen, welche zwischen der Ellipse liegen, und von ihr eingeschlossen werden.

Ausser diesen Eigenschaften und Beziehungen zu dem Kreise, aus welchem sie entstanden ist, hat unsere Ellipse noch mehrere andere, welche zugleich mit jenen in der Fuss'schen Abhandlung auseinandergesetzt und bewiesen werden.

Diese Ellipse steht aber nicht so isolirt da, wie es nach den Betrachtungen des berühmten Akademikers der Fall zu sein scheint, sie ist nur ein besonderer Fall einer unendlichen Anzahl von Ellipsen, welche entstehen, wenn man einen Kreis, dessen Ebene auf der Projections-Ebene senkrecht ist, plagiographisch projicirt. Um diess zu zeigen, beziehe ich mich auf meinen Aufsatz über plagiographische Projection im dritten Hefte des achten Theiles dieses Archivs.

Zur Projections-Ebene wird daselbst bei rechtwinkligen Coordinaten die Ebene der xy, die Projectionsstrahlen werden parallel mit der Ebene der xz angenommen, der Winkel, welchen dieselben mit der Projections-Ebene bilden, wird durch i bezeichnet.

Wenn die zu projicirende Linie ein Kreis ist, dessen Halbmesser durch r bezeichnet wird, dessen Ebene auf der Projections-Ebene senkrecht steht, und mit der Ebene der xz den Winkel 90^0-u bildet, so ist die Gleichung für die Projection dieses Kreises die einer Ellipse, deren halbe Axen:

$$\frac{r}{2\operatorname{Sin} i}\sqrt{\{1+\sqrt{1-\operatorname{Cos} u^2 \operatorname{Sin} 2i^2}\}}\sqrt{2},$$

$$\frac{r}{2\operatorname{Sin} i}\sqrt{\{1-\sqrt{1-\operatorname{Cos} u^2 \operatorname{Sin} 2i^2}\}}\sqrt{2}$$

sind.

Die Fuss'sche Ellipse ist nichts anderes, als die plagiographische Projection eines solchen Kreises, welcher mit der Ebene der xz einen halben rechten Winkel bildet. Bezeichnet man (Taf. II. Fig. 4.) mit Fuss den Halbmesser des Kreises, aus welchem seine Ellipse entsteht, AC, durch r, so hat man in die obigen Formeln zu setzen:

für r $r\sqrt{2}$,
„ u 45^0,
„ i Arc.(Tang $=\sqrt{2}$);

man erhält also, da $\operatorname{Cos} u^2=\frac{1}{2}$ und $\operatorname{Sin} 2i=\frac{2}{3}\sqrt{2}$, für die

$$\text{halbe grosse Axe } \frac{r}{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}+1),$$

$$\text{halbe kleine Axe } \frac{r}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1):$$

übereinstimmend mit seinen Angaben.

Was ferner den Inhalt der Ellipse betrifft, so ist derselbe allgemein

$$r^2\pi \operatorname{Cos} u \operatorname{Cot} i,$$

also in dem besondern Falle, wenn man die obigen Werthe hineinsetzt,

$$4r^2\pi\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}=r^2\pi,$$

gleich dem Inhalte desjenigen Kreises, aus welchem bei Fuss die Ellipse entsteht. Alle andern Eigenschaften ergeben sich nun von selbst.

Ich bemerke noch, dass man, falls es nur irgend ein Interesse hätte, die Aufgabe noch allgemeiner stellen könnte, als sie in den Novis Actis gegeben ist, wenn man die Curve suchen wollte, welche entsteht, wenn zur Abscisse $\mathrm{Cos}\,x$ die rechtwinklige Ordinate

$$a\,\mathrm{Cos}\,x+b\,\mathrm{Sin}\,x$$

gehören soll. Man würde hier zu setzen haben

für r $r\sqrt{1+a^2}$,

„ u $\mathrm{Arc.}(\mathrm{Tang}=a)$,

„ i $\mathrm{Arc.}(\mathrm{Tang}=\frac{1}{b}\sqrt{1+a^2})$.

III.

Neue Bestimmung der grössten Ellipse, welche die vier Seiten eines gegebenen Vierecks berührt.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

1.

Da je zwei Ellipsen affin sind, wenn man irgend zwei zugeordnete Durchmesser der einen irgend zwei zugeordneten Durchmessern der anderen entsprechen lässt, und da in affinen Ebenen das Verhältniss der entsprechenden Flächenräume constant ist (Archiv VIII. S. 14. und 22.); da also die Flächenräume zweier Ellipsen sich wie die der Parallelogramme verhalten, welche durch die Endpunkte irgend zweier zugeordneter Durchmesser der einen und irgend zweier zugeordneter Durchmesser der anderen bestimmt sind: so handelt es sich in unserer Aufgabe darum, einen Ausdruck für den Inhalt $2.I$ eines solchen Parallelogramms und sofort die Bedingung seines Maximums zu finden. Man erhält aber I, wenn man die halbe Länge A irgend eines Durchmessers mit

dem Abstande x desselben von einer ihm parallelen Tangente multiplicirt; und zwar ist das Quadrat über A dem Rechtecke zwischen den Abständen irgend zweier zugeordneter harmonischer Pole dieses Durchmessers vom Mittelpunkte M der Ellipse gleich.

2.

Durch projektivische Eigenschaften ist ferner (Archiv V., S. 243.) bewiesen worden, dass die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche zwei zugeordnete (reelle oder ideale) Tangentendurchschnitte gemein haben, in einer und derselben Geraden (pqr) liegen.

3.

Denkt man sich also irgend eine der Ellipsen, welche dem gegebenen Viereck eingeschrieben sind, so kann man jene Gerade (pqr) als einen Durchmesser derselben ansehen, und, indem man sich vorstellt: einmal, dass dieselbe ausser den beiden, diesem Durchmesser parallelen Tangenten bloss zwei Seiten des gegebenen Vierecks; sodann, dass sie ausser denselben beiden ersteren bloss die beiden anderen Seiten des Vierecks berühre, zwei Relationen zwischen I, x und irgend einer dritten Variabeln finden, so dass, wenn man nun eine dieser beiden letzteren eliminirt, eine neue Relation hervorgeht, welche den Inhalt der Ellipse, insofern dieselbe alle vier Seiten des gegebenen Vierecks berührt, mittels einer einzigen Variabeln ausdrückt.

4.

In Taf. II. Fig. 5. sei $abcd$ das gegebene Viereck, $AB=2.m$ die zwischen ad und bc enthaltene Strecke der Geraden pqr; K sei die Mitte von AB; CD und EG seien die mit pqr parallelen Tangenten; S sei der Durchschnitt der verlängerten Seiten ad, bc, und Q derjenige der Geraden SK und CD. Ferner sei U der Durchschnitt der Diagonalen des Trapezes $CDGE$, welcher also auf SK liegt; u sei der Abstand des Punktes U von pqr; F und J seien die Berührungspunkte von CD und ad; SH sei parallel mit pqr, und Cz mit FM: H der Durchschnitt von ED und SH; Z der Durchschnitt von FJ und pqr; V von ED und pqr. Endlich sei a der Abstand des Punktes S von pqr und $KM=y$.

5.

Bekanntlich ist in jedem, einem Kegelschnitte umschriebenen vollständigen Vierseit $abcdSS_1$ der Durchschnitt je zweier seiner Diagonalen bd, ac der harmonische Pol der dritten Diagonale SS_1. Nun sind U und H die Durchschnitte der Diagonalen CG und DE, DE und SH des von den Geraden CD, DG, GE, EC gebildeten vollständigen Vierseits: also geht FJ, die harmonische Polare des Punktes C, durch den Punkt H, als harmonischen Pol von

CG; und FM, als harmonische Polare des unendlich entfernten Punktes von pqr oder SH, geht durch den harmonischen Pol U von SH. Endlich geht die harmonische Polare des Punktes Z durch den harmonischen Pol C von FJ und ist mit FM parallel, fällt also mit Cz zusammen. Folglich sind Z und z zwei zugeordnete harmonische Pole des Durchmessers pqr.

6.

Nach diesen, der Geometrie der Lage entnommenen Betrachtungen läuft die Hauptsache der Untersuchung auf folgende wenige Proportionen hinaus:

1) $SC:SE = a-x : a+x = CD:EG = CU:GU = x-u : x+u$;

also $u = \frac{x^2}{a}$.

2) $CD:AB = CQ:m = SC:SA = a-x:a$;

also $CQ = DQ = \frac{m(a-x)}{a}$.

3) $FQ:MK = x-u:u = a-x:x$:

also $FQ = \frac{a-x}{x}.y$; und

$$CF = Mz = CQ + FQ = \frac{(a-x)(mx+ay)}{ax},$$

$$DF = DQ - FQ = \frac{(a-x)(mx-ay)}{ax}.$$

4) $VM:DF = u:x-u = x:a-x$, $VM = \frac{mx-ay}{a}$.

5) $VZ:DF = VH:DH = a:a-x$, $VZ = \frac{mx-ay}{x}$;

folglich

$$MZ = VM + VZ = \frac{(a+x)(mx-ay)}{ax};$$

$$MZ.Mz = A^2 = \frac{(a-x)(a+x)(mx-ay)(mx+ay)}{a^2x^2};$$

$$P^2 = A^2.x^2 = \frac{(a-x)(a+x)(mx-ay)(mx+ay)}{a^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2}(m^2x^2-a^2y^2).$$

7.

Ganz auf dieselbe Weise erhält man, wenn die zwischen den Seiten ab und cd des gegebenen Vierecks enthaltene Strecke A_1B_1

der Geraden $pqr = 2m_1$, der Durchschnitt dieser Seiten S_1, dessen Abstand von $pqr = a_1$, und der Abstand des Mittelpunktes M der Ellipse vom Mittelpunkte K_1 der Strecke $A_1 B_1 = y_1$ gesetzt wird:

$$I^2 = \frac{a_1{}^2 - x^2}{a_1{}^2}(m_1{}^2 x^2 - a_1{}^2 y_1{}^2).$$

Ist nun noch $NK = NK_1 = k$; $MN = v$, also $y = v - k$, $y_1 = v + k$; so hat man für den Inhalt einer Ellipse, welche alle vier Seiten des gegebenen Vierecks berührt, folgende zwei Gleichungen:

$$I^2 = \frac{a^2 - x^2}{a^2}[m^2 x^2 - a^2(v-k)^2] = \frac{a_1{}^2 - x^2}{a_1{}^2}[m_1{}^2 x^2 - a_1{}^2(v+k)^2].$$

8.

Aus diesen Gleichungen folgt, dass $I = 0$, wenn $x = \pm a$ oder $x = \pm a_1$ ist, d. h. wenn die parallelen Tangenten durch S oder S_1 gehen; und da man Gleichungen von derselben Form erhalten muss, wenn man im Obigen entweder die Punkte A, B_1, a und A_1, B, c, oder B, B_1, b und A, A_1, d an die Stelle der Punkte A, B, S und A_1, B_1, S_1 treten lässt, so muss auch $I = 0$ werden, wenn jene Tangenten durch die Punkte a oder c; b oder d gehen. Und umgekehrt: geht eine dieser Tangenten, z. B. CD, durch keinen der Punkte S, S_1, a, c, b, d, so gibt es allemal einen gewöhnlichen Kegelschnitt, welcher die fünf Geraden CD, ab, bc, cd, da berührt, dessen Inhalt also nicht $= 0$ sein kann. Nun aber entpricht der CD allemal eine gleichweit von pqr abstehende Tangente EG; also sind die sechs Punkte S, S_1, a, c, b, d paarweise gleichweit von pqr entfernt, und diess kann natürlich nur von den Paaren S, S_1; a, c; b, d gelten. Somit erhalten wir den bekannten Satz, dass die Mittelpunkte p, q, r der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits in einer Geraden liegen.

9.

Da nun $a = a_1$ ist, so geben die obigen Gleichungen:

$$m^2 x^2 - a^2(v-k)^2 = m_1{}^2 x^2 - a^2(v+k)^2, \text{ also } x^2 = \frac{4a^2 k}{m_1{}^2 - m^2} \cdot v,$$

wodurch sich dieselben, jenachdem man x^2 oder v eliminirt, nach gehöriger Entwickelung in die folgenden verwandeln:

$$l^2 = \frac{a^2}{(m_1^2 - m^2)^2}[4kv - (m_1^2 - m^2)][(m_1 + m)v - (m_1 - m)k][(m_1 - m)v - (m_1 + m)k];$$

oder

$$l^2 = \frac{[x-a][x+a][(m_1+m)x-2ak][(m_1+m)x+2ak][(m_1-m)x-2ak][(m_1-m)x+2ak]}{16 . a^4 . k^2}.$$

Man setze jetzt $\frac{2ak}{m_1 + m} = c$; $\frac{2ak}{m_1 - m} = b$; so wird $l^2 = 0$ für die Werthe $x = \pm a$, $\pm b$, $\pm c$, und diesen der Reihe nach entsprechend auch für die Werthe $v = \frac{m_1^2 - m^2}{4k} = p$; $k\frac{m_1 + m}{m_1 - m} = q$; $k\frac{m_1 - m}{m_1 + m} = r$, wie man aus der Gleichung $x^2 = \frac{4a^2k}{m_1^2 - m^2} . v$ ersieht. Auch ergibt sich aus dieser letzteren, dass $\frac{a^2}{p} = \frac{b^2}{q} = \frac{c^2}{r}$ ist.

Durch Einführung der neuen Symbole erhalten nun unsere zwei Gleichungen die folgende, viel einfachere Gestalt:

$$l^2 = \frac{a^2}{p}(v - p)(v - q)(v - r)$$

und

$$l^2 = \frac{p^2}{a^4}(x-a)(x+a)(x-b)(x+b)(x-c)(x+c);$$

wo man statt $\frac{a^2}{p}$ auch $\frac{b^2}{q}$ oder $\frac{c^2}{r}$ schreiben darf.

Sowie die Grössen a, b, c die Abstände der Ecken S, S_1; b, d; c, a des vollständigen Vierseits von der Geraden pqr sind, so sind offenbar p, q, r die Abstände des Punktes N, welcher selber nichts anderes als der Schwerpunkt der vier Punkte A, B, A_1, B_1 ist, von den Mittelpunkten p, q, r der Diagonalen jenes Vierseits.

Lehrsatz I.

α) **Bestimmt man in einem vollständigen Vierseit den Abstand des Mittelpunktes einer Diagonale vom Schwerpunkte derjenigen vier Punkte, in welchen die Verbindungslinie der drei Diagonal-Mittelpunkte von den Seiten des ersteren geschnitten wird, und zugleich den Abstand einer, jener Diagonale angehörigen Ecke des Vierseits von dieser Verbindungslinie, so ist die dritte Proportionale zu diesen beiden Abständen für alle drei Diagonalen eine und dieselbe Strecke.**

β) **Der Inhalt des Rechtecks zwischen der halben Haupt- und Nebenachse einer jeden Ellipse, welche die vier Seiten jenes Vierseits berührt, ist die mittlere Proportionale zwischen der eben bezeichneten Strecke und dem Inhalte des rechtwinkligen Parallelepipedums, dessen Kanten den Abständen des Mittelpunktes der Ellipse von den Mittelpunkten der Diagonalen des vollständigen Vierseits gleich sind.**

Die Diagonalen SS_1, bd, ac sind für sämmtliche, dem Vierseit eingeschriebene Kegelschnitte drei zugeordnete harmonische Polaren, d. h. Gerade, von denen eine jede die harmonische Polare des Durchschnittspunktes der beiden anderen ist. Diese aber sind bei zwei beliebigen Kegelschnitten nach Archiv Thl. V., S. 229. allemal vorhanden, wenn dieselben vier oder gar keine Tangente gemein haben, und in dem Falle, wenn sie bloss zwei Tangenten SA und SB gemein haben, sind wenigstens die Gerade SS_1 und ihr harmonischer Pol i, und ausser dem Punkte p auch noch q und r vorhanden. Denn sind M, M_1 die Mittelpunkte beider Ellipsen, und x, x_1 die Abstände der mit MM_1 parallelen Tangenten, v, v_1 die unbekannten Abstände der Punkte M, M_1 von N, so ist $\frac{x^2}{x_1^2} = \frac{v}{v_1}$, und da x, x_1 gegeben sind, so ist der Punkt N, K ohnediess, und daher auch K_1 gegeben. Ferner ist leicht zu zeigen, dass die Punkte q, r sowohl mit den Punkten K, K_1 (was sich zum Theil schon aus der Relation $q.r = k^2$ ergibt), als auch mit denjenigen Punkten harmonisch sind, in welchen MM_1 von den vorhandenen Geraden Si und S_1i geschnitten

wird. Unter der Voraussetzung also, dass man in diesem letzteren Falle die Geraden *bd* und *ac* durch irgend zwei andere, durch die Punkte q, r gehende Gerade ersetzt, können wir, der Kürze wegen mit Poncelet vom Gesetze der Continuität Gebrauch machend, den vorigen Satz in allgemeinerer und etwas veränderter Form so, wie folgt, ausdrücken:

Lehrsatz 2.

Die zweiten Potenzen der Inhalte zweier Ellipsen von beliebiger Gestalt und Lage verhalten sich zu einander, wie die Produkte der Abstände ihrer Mittelpunkte von den drei ihnen gemeinschaftlichen zugeordneten harmonischen Polaren.

Dieser letztere Satz scheint sehr reich an schönen und wichtigen Folgerungen zu sein *).

Lehrsatz 3.

Bewegt sich eine von zwei Ellipsen in einer Ebene, ohne ihren Inhalt oder dessen Verhältniss zu dem der andern Ellipse zu ändern, so bleibt in allen Momenten ihrer Bewegung das Verhältniss der Produkte aus den Abständen der Mittelpunkte beider Ellipsen von den ihnen gemeinschaftlichen drei zugeordneten harmonischen Polaren unveränderlich dasselbe.

Da die Punkte q und r mit K und K_1 harmonisch sind, so liegen p, q, r immer auf einerlei Seite vom Punkte N. Daher ist immer eine ungerade Anzahl der Faktoren $v-p$, $v-q$, $v-r$ negativ, wenn M zwischen p und q oder auf der unendlichen Strecke jenseit r liegt; eine gerade Anzahl dagegen, wenn M zwischen q und r oder auf der unendlichen Strecke jenseit p liegt. In den beiden ersteren Fällen ist I^2 negativ, ein Umstand, der nur bei der Hyperbel stattfindet. Liegt der Punkt M jenseit p, so sind alle drei Faktoren positiv und es nimmt I fortwährend mit v zugleich zu; es findet also kein Maximum im eigentlichen Sinne statt. Auch kann es natürlich bei dieser Lage zweier Punkte M keine zwei Ellipsen von gleichem Inhalt geben. Folglich ist der Mittelpunkt derjenigen Ellipse, deren Inhalt ein Maximum von endlicher Grösse ist, nur zwischen q und r zu suchen.

Denkt man sich die erste Gleichung nach v gelöst, so erhält man für einen beliebig gegebenen positiven Werth von I^2 entweder nur einen oder drei Werthe für v und also eine oder drei

---

*) Anm. Z. B. der Satz: Der Mittelpunkt der kleinsten Ellipse, welche durch vier gegebene Punkte geht, ist ein Punkt desjenigen Kegelschnittes, welcher die Mittelpunkte der sechs Seiten des von jenen vier Punkten gebildeten vollständigen Vierecks und ausserdem die Durchschnittspunkte der drei Paar Gegenseiten enthält; nämlich derjenige Punkt desselben, dessen Abstände von den Verbindungslinien dieser drei letzteren Punkte das kleinste Produkt bilden.

Ellipsen von gegebenem Inhalte. Von den Mittelpunkten der letzteren liegen zwei zwischen q und v, der dritte jenseit p. Die negative Summe jener drei Werthe ist, wenn man die Gleichung nach Potenzen von v ordnet, dem Faktor des zweiten Gliedes, d. h. $-(p+q+r)$ gleich, d. h. der Schwerpunkt der Mittelpunkte der drei Ellipsen ist zugleich der Schwerpunkt der drei Punkte p, q, r. Wir erhalten also mit Plücker den folgenden Satz:

Lehrsatz 4.

Sämmtliche Ellipsen, welche die Seiten eines gegebenen vollständigen Vierseits berühren, sind im Allgemeinen drei zu drei von gleichem Inhalt, und zwar liegen die Mittelpunkte zweier von je dreien zwischen den Diagonalen des zu jenem gehörigen gewöhnlichen Vierecks und der dritte auf der unendlichen Strecke jenseit der dritten Diagonale des vollständigen Vierseits; ferner ist der Schwerpunkt je dreier Mittelpunkte ein fester Punkt, nämlich zugleich der Schwerpunkt der drei Mittelpunkte der Diagonalen des vollständigen Vierseits.

10.

Differenzirt man endlich die Gleichuug

$$I^2 = \frac{a^2}{p}(v-p)(v-q)(v-r)$$

nach v und setzt den Differenzialquotienten von $I=0$, so erhält man als Bedingung des Maximums die folgende:

$$(v-p)(v-q)+(v-p)(v-r)+(v-q)(v-r)=0$$

oder

$$3v^2-2v(p+q+r)=-(pq+pr+qr).$$

Zur Vereinfachung setze man $\frac{1}{3}(p+q+r)=h$ und $v=v_1-h$, $p=p_1-h$, $q=q_1-h$, $r=r_1-h$, so ist h die Entfernung des Schwerpunktes s der Punkte p, q, r von N und v_1, p_1, q_1, r_1 die der Punkte M, p, q, r von s; also $p_1+q_1+r_1=0$. Folglich gewinnt die letztere Gleichung durch Einführung der neuen Symbole nun die einfachere Gestalt:

$$3v_1^2=-(p_1q_1+p_1r_1+q_1r_1).$$

Es ist aber

$$p_1^2+p_1q_1+p_1r_1=p_1q_1+q_1^2+q_1r_1=p_1r_1+q_1r_1+r_1^2=0,$$

also

$$p_1{}^2 + q_1{}^2 + r_1{}^2 + 2p_1q_1 + 2p_1r_1 + 2q_1r_1$$
$$= p_1{}^2 + q_1{}^2 + r_1{}^2 - 6v_1{}^2 = 0 \text{ und}$$
$$p_1{}^2 + q_1{}^2 + r_1{}^2 - (p_1q_1 + p_1r_1 + q_1r_1)$$
$$= p_1{}^2 + q_1{}^2 + r_1{}^2 + 3v_1{}^2 = (p_1 - q_1)^2 - (p_1 - q_1)(p_1 - r_1) + (p_1 - r_1)^2$$

also
$$\begin{aligned} qv_1{}^2 &= (p_1 - q_1)^2 - (p_1 - q_1)(p_1 - r_1) + (p_1 - r_1)^2 \\ &= (q_1 - p_1)^2 - (q_1 - p_1)(q_1 - r_1) + (q_1 - r_1)^2 \\ &= (r_1 - q_1)^2 - (r_1 - q_1)(r_1 - p_1) + (r_1 - p_1)^2. \end{aligned}$$

Man kann daher, wenn man die Lage der Punkte p, q, r zu s in Betracht zieht, die Länge v_1 sehr leicht construiren.

Es sei pqr_1 ein gleichseitiges Dreieck; so ist

$$\begin{aligned} (rr_1)^2 &= (pr_1)^2 + (pr)^2 - 2(pr).\tfrac{1}{2}(pq) \\ &= (sp + sq)^2 + (sp + sr)^2 - (sp + sq)(sp + sr) = qv_1{}^2; \end{aligned}$$

also $3v_1 = \pm(rr_1)$. Zieht man nun durch s mit (rr_1) eine Parallele und aus r_1 eine Senkrechte tr_1 auf pqr, welche die erstere in ϱ schneidet, so ist, weil $pt = qt$ und s der Schwerpunkt von p, q, r ist, $rt = 3.st$ und $tr_1 = 3.t\varrho$, $rr_1 = 3.s\varrho$; also $v_1 = s\varrho$ und ϱ ist der Mittel- oder Schwerpunkt des Dreiecks pqr_1. Denkt man sich ferner über den Strecken pr und qr ebenfalls gleichseitige Dreiecke prq_1' und qrp_1 construirt, so müssen deren Schwerpunkte k und π dieselbe Eigenschaft wie ϱ besitzen, was bereits aus dem Obigen und auch daraus folgt, dass $rr_1 = qq_1 = pp_1 = 3.s\varrho = 3.sk = 3.s\pi$ ist. Bedenkt man endlich noch, dass $su = sv = s\varrho$ kleiner als sp und sr, aber grösser als sq sein muss, so lässt sich das Endergebniss dieser ganzen Untersuchung durch folgende zwei Lehrsätze ausdrücken, und zwar durch den zweiten so vollkommen symmetrisch, wie man von vornherein zu erwarten berechtigt war.

Lehrsatz 5.

Der Mittelpunkt der grössten unter allen Ellipsen, welche vier gegebene Gerade berühren, ist ebensoweit vom Schwerpunkte der Mitten der Diagonalen des von jenen gebildeten vollständigen Vierseits, als letzterer vom Schwerpunkte eines gleichseitigen Dreiecks, das über dem Abstande zweier Diagonal-Mittelpunkte errichtet ist, entfernt.

Lehrsatz 6.

Beschreibt man über den drei Strecken, welche durch die Mittelpunkte der Diagonalen eines vollständigen Vierseits bestimmt werden, drei gleichseitige Dreiecke, so schneidet derjenige Kreis, welcher die Mittelpunkte dieser drei Dreiecke enthält, die Verbindungslinie der drei Diagonal-Mittelpunkte in zwei merkwürdigen Punkten. Der eine von beiden, welcher zwischen

den Diagonalen des gewöhnlichen Vierecks liegt, ist der Mittelpunkt der grössten unter allen Ellipsen, welche diesem Viereck eingeschrieben sind; der andere ist der Mittelpunkt derjenigen Hyperbel, für welche unter allen, demselben Viereck eingeschriebenen Hyperbeln der von den Asymptoten und einer beliebigen Tangente eingeschlossene Flächenraum ein Grösstes ist.

Schliesslich bemerke ich noch, dass im XXII. Bande der monatlichen Correspondenz von Zach's eine sehr schöne analytische Auflösung dieser Aufgabe von Gauss, eine andere analytische von Pfaff, eine dritte nach der Methode der Alten von Mollweide, ferner Bemerkungen darüber von Schumacher und die Nachricht einer nicht veröffentlichten Auflösung von Buzengeiger sich befinden, und dass auch Plücker in seinen analytisch-geometrischen Entwickelungen. 2. Band. S. 208—211. eine neue, nur im Endresultate mit der von Gauss übereinstimmende Auflösung gegeben hat.

IV.

Nachtrag zu der Abhandlung über die Entwickelung des Products

$$\overset{n}{\Pi}(x) = 1.(1+x)(1+2x)\ldots.(1+(n-1)x)$$

nach den steigenden Potenzen von x. *)

Von

Herrn L. Schläfli,

Privatdocenten der Mathematik zu Bern.

Die frühere Abhandlung über diesen Gegenstand stellte den Coefficienten $\overset{n}{A}_i$ von x^i als eine nach Binomialcoefficienten geordnete ganze und rationale Function von n dar, die als sechsfache Summe erschien und in ihren letzten Entwicklungen die transcen-

---

*) Thl. X. Nr. XXXVIII. S. 386.

denten Functionen $\overset{i}{S}_n$, $\overset{i}{T}_n$ enthielt, welche für ein ganzes positives Argument n gewissen Summen combinatorischer aus den natürlichen Brüchen $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. gebildeter Producte der $i$ten Classe gleich sind. Jene Function $\overset{i}{S}_n$ nämlich ist der Coefficient von x^i in der Entwicklung von $(1+\frac{x}{1})(1+\frac{x}{2})(1+\frac{x}{3})....(1+\frac{x}{n})$ und daher gleich $\frac{1}{1.2.3....n}\overset{n+1}{A}_{n-i}$, mit andern Worten, sie ist die Summe der aus den Elementen $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,....$\frac{1}{n}$ ohne Wiederholung zur $i$ten Classe gebildeten Producte, während die rationale Function $\overset{n+1}{A}_i$ auf dieselbe Weise aus den Elementen 1, 2, 3,....n gebildet ist. Die andere Function $\overset{i}{T}_n$ befolgt ein minder einfaches Gesetz; sie ist die Summe aller combinatorischen Producte, welche aus den Elementen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,....$\frac{1}{n+i-1}$, $\frac{1}{n+i}$ gebildet und der Bedingung unterworfen sind, dass in jedem Product keiner seiner Factoren seinen Nenner um eine die Einheit übersteigende Zahl grösser haben darf, als der ihm unmittelbar vorangehende Factor. Für die ersten Ordnungen ist z. B.

$$\overset{0}{T}_n=1,$$

$$\overset{1}{T}_n=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}....+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1},$$

$$\overset{2}{T}_n=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})....+\frac{1}{n+1}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}....+\frac{1}{n+2}),$$

$$\overset{3}{T}_n=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}))+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}....+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{5})....+\frac{1}{n+1}(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}....+\frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{n+3}),$$

u. s. w.

Seither hat mir nun die nähere Betrachtung dieser Function T gezeigt, dass sie zur Entwicklung des Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{u}{2}}{1-\cfrac{\frac{u}{3}}{1-\cfrac{\frac{u}{4}}{1-\cfrac{\frac{u}{5}}{1-\text{etc.}}}}}}$$

nach steigenden Potenzen von u in merkwürdiger Beziehung steht. Sowohl die hier angedeutete Eigenschaft der Function T, als

die oben erwähnte der andern Function S, aus der Entwicklung von $(1+\frac{x}{1})\ldots.(1+\frac{x}{n})$ hervorzugehen, haben es möglich gemacht, den frühern Ausdruck für $\overset{n}{A}_i$ auf eine vierfache Summe zu reduciren.

Das Ergebniss der frühern Abhandlungen ist in folgenden Gleichungen enthalten:

$$\overset{n}{\Pi}(x)=1+\overset{n}{A}_1x+\overset{n}{A}_2x^2\ldots.=\sum_{i=0}\overset{n}{A}_ix^i. \qquad (1)$$

Für $i=0$ wird in allen Fällen der Coefficient $\overset{n}{A}_i$ der Einheit gleich. Wenn n eine ganze, die Null übertreffende Zahl ist, so verschwinden alle Coefficienten $\overset{n}{A}_i$, deren unterer Index i die Zahl $n-1$ übersteigt. Für $n=0$ verschwinden alle Coefficienten $\overset{n}{A}_i$, deren unterer Index i die Null übersteigt.

$$\overset{n}{A}_i=\frac{(-n+i)(-n+i-1)\ldots.(-n)}{1.2.3\ldots.(i+1)}+\overset{i}{B}_1.\frac{(-n+i)(-n+i-1)\ldots(-n-1)}{1.2.3\ldots.(i+2)}+\ldots$$
$$\ldots.+\overset{i}{B}_{i-1}.\frac{(-n+i)(-n+i-1)\ldots.(-n-\alpha)}{1.2.3\ldots.(i+\alpha)}=\sum_{\alpha=0}^{\alpha=i-1}\overset{i}{B}_\alpha.\binom{-n+i}{i+\alpha+1}, \quad (2)$$

wo $\overset{i}{B}_\alpha$ eine nur von den ganzen positiven Zahlen i, α abhängende Function bezeichnet, welche für $\alpha=0$ der Einheit gleichzusetzen ist und für $\alpha=i$ verschwindet, während sie für $\alpha>i$ aufhört, eine Bedeutung zu haben; auch ist sie für $i=0$ bedeutungslos.

$$\overset{i}{B}_\alpha=\sum_{u=1}^{u=\alpha+1}\frac{u^{i+u-1}}{(u-1)!}\left\{\binom{-(i+2u+1)}{\alpha-u+1}+u.\overset{i,\alpha}{Q}_u\right\}. \qquad (3)$$

Hier ist $1.2.3\ldots.n=n!$ gesetzt, und $\overset{i,\alpha}{Q}_u$ bezeichnet eine von α und u abhängende rationale und ganze Function von i, die für $u=\alpha$ und $u=\alpha+1$ wegfällt, und deren Grad $\alpha-u-1$ ist. Die ersten Werthe von $\overset{i}{B}_\alpha$ sind:

$$\overset{i}{B}_0=1^i,$$
$$\overset{i}{B}_1=1^i.\frac{-(i+3)}{1}+\frac{2^{i+1}}{1},$$
$$\overset{i}{B}_2=1^i\left\{\left(\frac{(-i-3)(-i-4)}{1.\quad 2}+1.\tfrac{1}{2}\right\}+\frac{2^{i+1}}{1}.\frac{-i-5}{1}+\frac{3^{i+2}}{1.2},\right.$$

u. s. w.

$$\overset{i,\alpha}{Q}_u=\sum_{\gamma=0}^{\gamma=\alpha-u-1}(-1)^\gamma\frac{\overset{u}{D}\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\binom{-(i+2u+2)}{\alpha-u-\gamma-1}. \qquad (4)$$

Hier bezeichnet $\overset{u}{D}_\gamma$ eine von i und α freie, rationale und ganze Function von u, deren Grad $\frac{\gamma}{2}$ oder $\frac{\gamma-1}{2}$ beträgt, je nachdem γ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Die ersten Werthe von $\overset{u}{D}_\gamma$ sind:

$$\overset{u}{D}_0=1,$$
$$\overset{u}{D}_1=1,$$
$$\overset{u}{D}_2=1+\frac{3}{2}u,$$
$$\overset{u}{D}_3=1+\frac{25}{6}u,$$
$$\overset{u}{D}_4=1+\frac{95}{12}u+\frac{5}{8}u^2,$$
$$\overset{u}{D}_5=1+\frac{763}{60}u+\frac{21}{8}u^2,$$
$$\overset{u}{D}_6=1+\frac{371}{20}u+\frac{245}{36}u^2+\frac{7}{48}u^3,$$
$$\overset{u}{D}_7=1+\frac{3557}{140}u+\frac{2521}{180}u^2+\frac{13}{16}u^3,$$
$$\overset{u}{D}_8=1+\frac{9319}{280}u+\frac{7225}{288}u^2+\frac{85}{32}u^3+\frac{3}{128}u^4,$$

u. s. f.

$$\overset{u}{D}_\gamma=1+\overset{\gamma}{E}_1 u+\overset{\gamma}{E}_2 u^2\ldots=\sum_{\delta=0}\overset{\gamma}{E}_\delta u^\delta, \tag{5}$$

und wenn

$$\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{\gamma}\right)=1+\overset{1}{S}_\gamma z+\overset{2}{S}_\gamma z^2\ldots+\overset{\gamma}{S}_\gamma z^\gamma$$

gesetzt wird,

$$\overset{\gamma}{E}_\delta=\overset{\gamma}{F}_\delta-\overset{\gamma}{F}_{\delta-1}\,.\,\overset{1}{S}_\gamma+\ldots+(-1)^{\delta-k}\overset{\gamma}{F}_k\,.\,\overset{\delta-k}{S}_\gamma\ldots+(-1)^\delta\overset{\delta}{S}_\gamma, \tag{6}$$

also

$$\overset{u}{D}_\gamma=\left(1-\frac{u}{1}\right)\left(1-\frac{u}{2}\right)\left(1-\frac{u}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{u}{\gamma}\right).(1+\overset{\gamma}{F}_1 u+\overset{\gamma}{F}_2 u^2+\ldots), \tag{7}$$

wo freilich, wie wir später sehen werden, die unendliche Reihe

$$\overset{u}{\Phi}_\gamma=1+\overset{\gamma}{F}_1 u+\overset{\gamma}{F}_2 u^2+\overset{\gamma}{F}_3 u^3+\ldots \tag{7^b}$$

nur dann convergirt, wenn u ein ächter Bruch ist. Wir dürfen daher der Gleichung (7) nur diese symbolische Bedeutung geben, dass, wenn man die angezeigte Multiplication ausführt, ein ganzes Polynom vom Grade $\frac{\gamma}{2}$ oder $\frac{\gamma-1}{2}$ herauskommen wird, in welchem es dann freisteht, für u beliebige ganze und positive Zahlen zu substituiren. — Die ersten Werthe von $\overset{\gamma}{F}_k$ sind:

$$\overset{\gamma}{F}_0=1,\ \overset{\gamma}{F}_1=\binom{\gamma+1}{2},\ \overset{\gamma}{F}_2=\binom{\gamma+2}{3},\ \text{u. s. f.}$$

Im Allgemeinen ist

$$\left.\begin{aligned}\overset{\gamma}{F}_\delta=\frac{\overset{0}{T}_{\delta-1}}{(\delta-1)!}\binom{\gamma+\delta}{\delta+1}+\frac{\overset{1}{T}_{\delta-2}}{(\delta-2)!}\cdot\binom{\gamma+\delta-1}{\delta}\dots+\frac{\overset{\delta-1-\varepsilon}{T_\varepsilon}}{\varepsilon!}\binom{\gamma+\varepsilon+1}{\varepsilon+2}\dots\\+\frac{\overset{\delta-1}{T_0}}{0!}\binom{\gamma+1}{2},\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

also

$$\overset{u}{\Phi}_\gamma=1+\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\infty}\frac{1}{\varepsilon!}\binom{\gamma+\varepsilon+1}{\varepsilon+2}u^{\varepsilon+1}(\overset{0}{T}_\varepsilon+\overset{1}{T}_\varepsilon u+\overset{2}{T}_\varepsilon u^2+\overset{3}{T}_\varepsilon u^3\dots),\quad(9)$$

wo die Function $\overset{m}{T}_n$ durch die Gleichungen

$$\overset{0}{T}_n=1,\ \overset{m+1}{T_n}=\tfrac{1}{2}\overset{m}{T}_2+\tfrac{1}{3}\overset{m}{T}_3+\tfrac{1}{4}\overset{m}{T}_4\dots+\frac{1}{n+1}\overset{m}{T}_{n+1}\qquad(10)$$

definirt ist.

Mittelst der Gleichungen (2), (3), (4), (5), (6), (8), deren Herleitung in der frühern Abhandlung gezeigt worden ist, aber noch bedeutend vereinfacht werden kann, ist nun die Summe $\overset{n}{A}_i$ der ohne Wiederholung aus den Elementen $1, 2, 3, \dots (n-1)$ zur $i$ten Classe gebildeten combinatorischen Producte als sechsfache Summe dargestellt, wofern die mit S und T bezeichneten Arten von Functionen, deren Natur keine weitere Entwicklung zu gestatten scheint, als Monome angesehen werden. Ich wende mich jetzt zu dem eigentlichen Zwecke dieses Nachtrages, jene sechsfache Summe auf eine vierfache zurückzuführen.

Die Reihe $\sum_{m=0}^{m=\infty}\overset{m}{S}_n z^m$ ging aus der Entwicklung des Products $\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)$ hervor. Giebt es wohl auch einen Ausdruck, aus dessen Entwicklung die in (3) vorgekommene Reihe $\sum_{m=0}^{m=\infty}\overset{m}{T}_n u^m$ auf ähnliche Weise hervorgeht? Bevor wir diese Frage erledigen, wollen wir die Convergenz dieser Reihe, die wir fortan mit U_n bezeichnen wollen, untersuchen.

Da $\overset{u}{D}_1 = 1$ ist, so muss $\overset{1}{E}_\delta = 0$ sein, sobald $\delta > 0$ ist. Nun giebt uns die Gleichung (6)

$$\overset{1}{E}_\delta = \overset{1}{F}_\delta - \overset{1}{F}_{\delta-1};$$

also ist $\overset{1}{F}_\delta = \overset{1}{F}_{\delta-1} = \text{etc.} = \overset{1}{F}_1 = 1$. Also bekommen wir, wenn wir in (8) $\gamma = 1$ und $\delta = n+1$ setzen:

$$\frac{\overset{n}{T}_0}{0!} + \frac{\overset{n-1}{T}_1}{1!} + \frac{\overset{n-2}{T}_2}{2!} + \frac{\overset{n-3}{T}_3}{3!} \ldots + \frac{\overset{0}{T}_n}{n!} = 1. \tag{11}$$

Da nun alle Glieder auf der linken Seite dieser Gleichung (mit Ausnahme des ersten, welches für $n > 0$ stets verschwindet und nur für $n = 0$ der Einheit gleich wird) positiv sind, so muss jedes derselben kleiner als 1 sein; folglich ist $\overset{m}{T}_n < n!$ und daher auch $U_n < n!(1 + u + u^2 + u^3 \ldots)$. Also convergirt die Reihe U_n, sobald u ein ächter Bruch ist, und ihr Werth ist dann kleiner als $\frac{n!}{1-u}$.

Aus (10) folgt

$$\overset{m+1}{T}_n - \overset{m+1}{T}_{n-1} = \frac{1}{n+1} \overset{m}{T}_{n+1}.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit u^{m+1} und summiren sie, vereinigt mit $1 - 1 = 0$, von $m = 0$ bis $m = \infty$, so erhalten wir

$$U_n - U_{n-1} = \frac{u}{n+1} U_{n+1}. \tag{12}$$

Geben wir dieser Gleichung die Form

$$\frac{U_{n-1}}{U_n} = 1 - \frac{\left(\frac{u}{n+1}\right)}{\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}\right)},$$

so sehen wir, dass der Quotient links sich in Gestalt eines unendlichen Kettenbruchs entwickeln lässt:

$$\frac{U_{n-1}}{U_n} = 1 - \cfrac{\frac{u}{n+1}}{1 - \cfrac{\frac{u}{n+2}}{1 - \cfrac{\frac{u}{n+3}}{1 - \cfrac{\frac{u}{n+4}}{1 - \text{etc.}}}}}$$

Da $\overset{m}{T_0}=1$ oder $=0$ ist, jenachdem $m=0$ oder grösser ist, so ist $U_0=1$, und daher

$$U_1=\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{u}{2}}{1-\cfrac{\frac{u}{3}}{1-\cfrac{\frac{u}{4}}{1-\text{etc.}}}}}\,. \tag{13}$$

Dieser Kettenbruch hat für $u<1$ offenbar nur einen einzigen Werth. Wenn sich daher ein von n und u abhängiger Ausdruck angeben lässt, welcher, indem er der Relation (12) genügt und für $n=0$ der Einheit gleich wird, für $n=1$ auf denselben Kettenbruch zurückgeführt werden kann, so wird man mit Recht einen solchen Ausdruck als identisch mit U_n anerkennen.

Es sei

$$V_n=\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\frac{\frac{1}{k!}u^k}{\Pi(1-\frac{u}{n+k+1})}, \tag{14}$$

wo $\Pi(1-\frac{u}{n+k+1})=(1-\frac{u}{1})(1-\frac{u}{2})(1-\frac{u}{3})\ldots.(1-\frac{u}{n+k+1})$ ist. Zuerst ist nun leicht zu zeigen, dass $V_0=1$ ist. Denn man hat

$$(-1)^k\frac{\frac{1}{k!}u^k}{\Pi(1-\frac{u}{k+1})}=(-1)^k\frac{\frac{1}{k!}u^k}{\Pi(1-\frac{u}{k})}+(-1)^k\frac{\frac{1}{(k+1)!}u^{k+1}}{\Pi(1-\frac{u}{k+1})},$$

und wenn man diese identische Gleichung von $k=0$ bis $k=\infty$ summirt, so findet man die behauptete Gleichung $V_0=1$. Zerlegen wir auf ähnliche Weise für ein beliebiges n das allgemeine Glied der Reihe V_n, so ergiebt sich

$$(-1)^k\frac{\frac{1}{k!}u^k}{\Pi(1-\frac{u}{n+k+1})}=(-1)^k\frac{\frac{1}{k!}u^k}{\Pi(1-\frac{u}{n+k})}+(-1)^k\frac{\frac{1}{k!}\frac{u^{k+1}}{n+k+1}}{\Pi(1-\frac{u}{n+k+1})},$$

und wenn wir hier von $k=0$ bis $k=\infty$ summiren,

$$V_n=V_{n-1}+u.\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\frac{\frac{1}{k!}\frac{u^k}{n+k+1}}{\Pi(1-\frac{u}{n+k+1})}.$$

Da aber

$$\frac{1}{n+k+1}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{k}{n+k+1}$$

ist, so verwandelt sich diese Formel in

$$V_n-V_{n-1}=\frac{u}{n+1}\left\{V_n+u.\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\frac{\frac{1}{k!}\frac{u^k}{n+k+2}}{\Pi(1-\frac{u}{n+k+2})}\right\},$$

wo in der letzten Summe k in $k+1$ umgesetzt wurde. Da nun der eingeklammerte Ausdruck aus der rechten Seite der vorhergehenden Formel durch den einfachen Wechsel von n in $n+1$ hervorgeht, so folgt endlich

$$V_n-V_{n-1}=\frac{u}{n+1}V_{n+1},$$

was mit der Relation (12) übereinstimmt. Also ist $V_n=U_n$.

Wenn wir nun den Ausdruck (14) für U_n in der Formel (9) substituiren und alle mit $\frac{u^m}{\Pi(1-\frac{u}{m})}$ behafteten Glieder vereinigen, so finden wir als Factor dieses Bruchs die Summe

$$(-1)^{m-1}\frac{1}{0!(m-1)!}\binom{\gamma+1}{2}\ldots+(-1)^{m-1-\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon!(m-1-\varepsilon)!}\binom{\gamma+\varepsilon+1}{\varepsilon+2}\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(m-1)!0!}\binom{\gamma+m}{m+1}$$
$$=\frac{(-1)^{m+1}}{(m-1)!}\left\{\binom{m-1}{m-1}\binom{-\gamma}{2}\ldots+\binom{m-1}{m-1-\varepsilon}\binom{-\gamma}{\varepsilon+2}\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\binom{m-1}{0}\binom{-\gamma}{m+1}\right\}$$
$$=\frac{(-1)^{m+1}}{(m-1)!}\binom{m-1-\gamma}{m+1}=\frac{1}{(m-1)!}\binom{\gamma+1}{m+1}.$$

Man hat also

$$\overset{u}{\Phi}_\gamma=1+\sum_{m=1}^{m=\gamma}\frac{1}{(m-1)!}\binom{\gamma+1}{m+1}\frac{u^m}{\left(1-\frac{u}{1}\right)\left(1-\frac{u}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{u}{m}\right)},$$

und wenn man diesen Ausdruck in die Formel (7) zurückträgt:

$$\left.\begin{aligned}\overset{u}{D}_\gamma&=\left(1-\frac{u}{1}\right)\left(1-\frac{u}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{u}{\gamma}\right)\\&+\sum_{m=1}^{m=\gamma}\frac{1}{(m-1)!}\binom{\gamma+1}{m+1}u^m\left(1-\frac{u}{m+1}\right)\left(1-\frac{u}{m+2}\right)\ldots\left(1-\frac{u}{\gamma}\right).\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

Wir haben also wieder einen endlichen ganzen Ausdruck in u für die Function $\overset{u}{D}_\gamma$, welcher freilich auf den Grad γ sich zu erheben scheint, wirklich aber, wie wir oben gesehen haben, nur den Grad $\frac{\gamma}{2}$ oder $\frac{\gamma-1}{2}$ erreicht. Da die Ausdrücke (5) und (15) für eine und dieselbe Function $\overset{u}{D}_\gamma$ von u beide endlich und für jeden beliebigen, zwischen 0 und 1 enthaltenen Werth von u sich gleich sind, so müssen sie identisch sein und sind daher namentlich auch für jedes ganze und positive u einander gleich. Mit diesem Ausdruck (15) ist nun auch das vorgesteckte Ziel, den Werth von $\overset{n}{A}_i$ auf eine vierfache Summe zurückzubringen, erreicht.

Wenn wir mit $\overset{m,\gamma}{H}_p$ die Summe der combinatorischen Producte der $p$ten Classe, welche aus den Elementen $m+1$, $m+2$, ...γ ohne Wiederholung gebildet werden können, bezeichnen, so haben wir mit Rücksicht auf Formel (5):

$$\overset{\gamma}{E}_{\gamma-p}=\frac{(-1)^{\gamma-p}}{\gamma!}\left\{\overset{0,\gamma}{H}_p+\sum_{m=1}^{m=\gamma}(-1)^m m\binom{\gamma+1}{m+1}\overset{m,\gamma}{H}_p\right\}. \quad (16)$$

Sobald also p kleiner ist als $\frac{\gamma}{2}$ oder $\frac{\gamma+1}{2}$, so wird der eingeklammerte Ausdruck verschwinden. Uebrigens ist $\overset{0,\gamma}{H}_p$ dieselbe Grösse, welche wir früher mit $\overset{\gamma+1}{A}_p$ bezeichnet haben. Ich bemerke noch beiläufig, dass aus (15) für $u=\gamma$ die Formel

$$\overset{\gamma}{D}_\gamma=\frac{\gamma^\gamma}{(\gamma-1)!}$$

folgt, welche für die numerische Verification der für bestimmte Werthe von γ berechneten Ausdrücke von $\overset{u}{D}_\gamma$ nützlich sein kann.

Wir können der Formel (15) noch eine andere Gestalt geben. Wenn wir nämlich die Producte, welche u enthalten, als Binomialcoefficienten hinschreiben und reduciren, so bekommen wir zunächst

$$\overset{u}{D}_\gamma=\binom{\gamma-u}{\gamma}+\sum_{m=0}^{m=\gamma}\binom{\gamma-u}{\gamma-m}\frac{m.(\gamma+1)}{(m+1)!}u^m,$$

und wenn wir hier $\frac{m}{(m+1)!}=\frac{1}{m!}-\frac{1}{(m+1)!}$ und $\binom{\gamma-u}{\gamma}=-\frac{\gamma+1}{u}\binom{\gamma-u}{\gamma+1}$ setzen und in der alle mit dem Minuszeichen versehenen Glieder umfassenden Summe m in $m-1$ übergehen lassen, so ergiebt sich

$$\overset{u}{D}_\gamma=(\gamma+1)\left\{\sum_{m=0}^{m=\gamma}\binom{\gamma-u}{\gamma-m}\frac{u^m}{m!}-\frac{1}{u}\sum_{m=0}^{m=\gamma+1}\binom{\gamma-u}{\gamma+1-m}\frac{u^m}{m!}\right\}, \quad (17)$$

d. h. $\overset{u}{D}_\gamma$ ist gleich dem Coefficienten von z^0 in der Entwicklung von

$$(-1)^\gamma(\gamma+1)\left(\frac{z}{u}+1\right)e^{-\frac{u}{z}}\left(\frac{z}{z-1}\right)^u(z-1)^\gamma$$

nach den fallenden Potenzen von z. Wenn wir jetzt zur Gleichung (4) zurückgehen und durch die Klammern [ ] anzeigen, dass wir von der Entwicklung des eingeschlossenen Ausdrucks nach fallenden Potenzen von z nur das mit z^0 behaftete Glied behalten, so erhalten wir, indem wir zugleich γ in $\alpha-u-1-\mu$ umsetzen:

$$\overset{i,\alpha}{Q_u}=\left[\left(\frac{z}{u}+1\right)\frac{z^u.e^{-\frac{u}{z}}}{(z-1)^{u+2}}\int_1^z(z-1)^{\alpha-u}\sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha-u-1}\binom{-(i+2u+2)}{\mu}\left(\frac{1}{z-1}\right)^\mu dz\right]$$

Was den zusammengesetzten Factor betrifft, der dem bestimmten Integral vorangeht, so wird das erste Glied seiner Entwicklung $\frac{1}{uz}$ sein, und alle folgenden Glieder werden von einem niedrigeren Grade als z^{-1} sein. Anderseits, wenn man die unter dem Integrationszeichen enthaltene bestimmte Summe über ihre obere Gränze $\mu=\alpha-u-1$ hinaus fortsetzt und, um unendlich grosse Grössen zu vermeiden, die untere Integrationsgränze an eine beliebige Stelle über 1 hinaufrückt, so werden die ersten aus dieser veränderten Auffassung des obigen Integrals hervorgehenden neuen Glieder sein:

$$\binom{-(i+2u+2)}{\alpha-u}z+\text{Const.}+\binom{-(i+2u+2)}{\alpha-u+1}\log(z-1)$$
$$-\binom{-(i+2u+2)}{\alpha-u+2}\frac{1}{z-1}-\text{etc.}$$

Nun fallen die willkührliche Constante, das logarithmische Glied und alle folgenden gebrochenen Glieder, als zur Bildung des mit z^0 behafteten Gliedes der ganzen Entwicklung nichts beitragend, ausser Betracht. Es bleibt daher im genannten Integral nur das Glied $\binom{-(i+2u+2)}{\alpha-u}z$ übrig, welches nicht vernachlässigt werden darf, sondern von dem bestimmten Integral abgezogen werden muss, sobald seine Bedeutung in dem angegebenen Sinne verändert wird. Oder, was dasselbe ist, in der ganzen Entwicklung muss alsdann noch das Glied $\frac{1}{u}\binom{-(i+2u+2)}{\alpha-u}$ abgezogen werden. Auf diese Weise bekommen wir in Beziehung auf Formel (3):

$$\left.\begin{aligned}&\binom{-(i+2u+1)}{\alpha-u+1}+u.\overset{i,\alpha}{Q_u}\\=\binom{-(i+2u+2)}{\alpha-u+1}+&\left[\frac{(z+u)z^u}{(z-1)^{u+2}}e^{-\frac{u}{z}}\int\frac{(z-1)^{i+\alpha+u+2}}{z^{i+2u+2}}dz\right].\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

Fasst man die Gleichungen (2), (3), (18) zusammen, so stellt sich $\overset{n}{A_i}$ als doppelte Summe dar.

Entwickelt man den eingeklammerten symbolischen Ausdruck und substituirt in (3), so erhält man

$$\overset{i}{B}_\alpha = \sum_{u=1}^{u=\alpha+1} \frac{u^{i+u}}{u!} \binom{-(i+2u+2)}{\alpha-u+1}$$

$$+ \sum_{\lambda+\mu+\nu+u=\alpha} (-1)^{\alpha-u+1} \frac{\mu-1}{\lambda+\mu+1} \frac{u^{i+\mu+u}}{\mu!u!} \binom{-(u+2)}{\lambda} \binom{i+\alpha+u+2}{\nu},$$

wo die zweite Summe sich auf alle ganzen positiven Werthe von λ, μ, ν, u, die Null mit eingerechnet, erstreckt, welche der Bedingung $\lambda+\mu+\nu+u=\alpha$ genügen. Diese zweite Summe ist daher als eine vierfache anzusehen, so dass hiedurch $\overset{n}{A}_i$ als fünffache Summe dargestellt ist.

Für $\alpha = i > 0$ muss der vorliegende Ausdruck verschwinden, ein Satz, dessen directer Beweis grossen Schwierigkeiten unterliegen dürfte.

Ich will noch einige merkwürdige Sätze über die Functionen $\overset{m}{T}_n$ beweisen. Von den drei Gleichungen

$$\overset{0}{T}_n = 1; \quad \overset{m}{T}_n - \overset{m}{T}_{n-1} = \frac{1}{n+1} \overset{m-1}{T}_{n+1}; \quad \overset{m}{T}_0 = 0, \text{ wenn } m > 0,$$

welche die Definition enthalten, ausgehend, bringe ich zuerst die allgemeine Gleichung unter die Form

$$\frac{\overset{m}{T}_n}{n!} - \frac{\overset{m-1}{T}_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\overset{m}{T}_{n-1}}{n!}$$

und setze hier m in $m-n$ um, wodurch ich erhalte

$$\frac{\overset{m-n}{T}_n}{n!} - \frac{\overset{m-(n+1)}{T}_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\overset{m-n}{T}_{n-1}}{n!}. \quad [m > n] \tag{19}$$

Wenn man nun in dieser Gleichung nach und nach n durch $n+1$, $n+2$, $n+3$,.... $m-2$, $m-1$ ersetzt und alle so entstandenen Gleichungen zu ihr addirt, indem man zuletzt noch $\frac{\overset{0}{T}_m}{m!} = \frac{\overset{0}{T}_{m-1}}{m!}$ hinzusetzt, so findet man

$$\frac{\overset{m-n}{T}_n}{n!} = \sum_{k=n}^{k=m} \frac{\overset{m-k}{T}_{k-1}}{k!}, \quad [m \geqq n > 0], \tag{20}$$

welche Formel auch zur successiven Berechnung der in (8) vorkommenden Factoren der Binomialcoefficienten gebraucht werden kann. Wenn man ferner (20) von $n=1$ bis $n=m$ summirt, auf der rechten Seite die gleichnamigen Glieder vereinigt und dann k in $k+1$ umsetzt, so erhält man

$$\sum_{n=1}^{n=m} \frac{\overset{m-n}{T}_n}{n!} = \sum_{k=0}^{k=m-1} \frac{\overset{m-k-1}{T}_k}{k!}, \quad [m \geqq 1],$$

wo das erste Glied der Summe rechts allemal verschwindet, wenn $m-1>0$ ist, und nur für $m=1$ der Einheit gleich wird, indem es zugleich die ganze Summe ausmacht. Da somit für $m>1$ die Summe links in diejenige rechts durch die einfache Umsetzung von m in $m-1$ übergeht, so muss ihr Werth von der Zahl m unabhängig sein. Also ist in Folge dessen, was wir so eben für den Fall $m=1$ bemerkt haben, allgemein

$$\sum_{k=0}^{k=m} \frac{\overset{m-k}{T}_k}{k!} = 1, \quad [m \geqq 0], \tag{21}$$

eine Formel, die wir schon in (11) gebraucht haben, um die Convergenz der Reihe $\Sigma \overset{m}{T}_n u^m$ zu beweisen.

Wenn wir von den zwei in der Definitionsformel gegebenen Gleichungen

$$\frac{1}{\lambda+1} \overset{m-1}{T}_{\lambda+1} = \overset{m}{T}_\lambda - \overset{m}{T}_{\lambda-1},$$

$$\frac{1}{\lambda+1} \overset{n-1}{T}_{\lambda+1} = \overset{n}{T}_\lambda - \overset{n}{T}_{\lambda-1}$$

die erste mit $\overset{n}{T}_\lambda$, die zweite mit $\overset{m}{T}_\lambda$ multipliciren, von einander abziehen und das Ergebniss mit $\lambda!$ dividiren, so kömmt nach einer Versetzung von Gliedern

$$\frac{\overset{m}{T}_\lambda \overset{n}{T}_{\lambda-1}}{\lambda!} - \frac{\overset{m-1}{T}_{\lambda+1} \overset{n}{T}_\lambda}{(\lambda+1)!} = \frac{\overset{m}{T}_{\lambda-1} \overset{n}{T}_\lambda}{\lambda!} - \frac{\overset{m}{T}_\lambda \overset{n-1}{T}_{\lambda+1}}{(\lambda+1)!}. \tag{22}$$

Um an dieser Gleichung eine solche Summation auszuführen, dass rechts alle Glieder mit Ausnahme der äussersten sich gegenseitig aufheben, wollen wir darin die Ordnungszahl n in $a+n-\lambda$ umsetzen und dann von $\lambda=a$ bis $\lambda=a+n$ summiren. Wir bekommen so

$$\sum_{\lambda=a}^{\lambda=a+n} \frac{\overset{m}{T}_\lambda \overset{a+n-\lambda}{T}_{\lambda-1}}{\lambda!} - \sum_{\lambda=a}^{\lambda=a+n} \frac{\overset{m-1}{T}_{\lambda+1} \overset{a+n-\lambda}{T}_\lambda}{(\lambda+1)!} = \frac{\overset{m}{T}_{a-1} \overset{n}{T}_a}{a!}.$$

Wenn man nun in der zweiten Summe λ in $\lambda-1$ verändert und von beiden Seiten der Gleichung die Grösse $\frac{\overset{m-1}{T}_a \overset{n+1}{T}_{a-1}}{a!}$ abzieht, so verwandelt sich die vorliegende Gleichung in

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\lambda=a}^{\lambda=a+n} \frac{\overset{m}{T}_\lambda\, \overset{a+n-\lambda}{T}_{\lambda-1}}{\lambda!} - \sum_{\lambda=a}^{\lambda=a+n+1} \frac{\overset{m-1}{T}_\lambda\, \overset{a+n+1-\lambda}{T}_{\lambda-1}}{\lambda!} \\ \displaystyle\qquad = \frac{\overset{m}{T}_{a-1}\, \overset{n}{T}_a - \overset{m-1}{T}_a\, \overset{n+1}{T}_{a-1}}{a!}.\end{array}\right\} \quad (23)$$

Wenn wir der Kürze wegen die erste Summe mit $f(a, m, n)$ bezeichnen, so ist die zweite $f(a, m-1, n+1)$. Der Umstand, dass von den drei Argumenten dieser Functionen die beiden letzten dieselbe Summe haben, veranlasst uns, m, n in $m-i$, $n+i$ zu verändern und von $i=0$ bis $i=m-n-1$ zu summiren, indem wir m als die grössere der beiden Zahlen m, n voraussetzen. Es ergiebt sich so:

$$f(a, m, n) - f(a, n, m) = \frac{1}{a!} \sum_{i=0}^{i=m-n-1} \left(\overset{m-i}{T}_{a-1}\, \overset{n+i}{T}_a - \overset{m-i-1}{T}_a\, \overset{n+i+1}{T}_{a-1} \right).$$

Wenn man aber rechts das Summationszeichen auf jedes der beiden Glieder besonders bezieht und dann die zweite Summe umkehrt, so findet man sie der ersten gleich. Man hat also

$$f(a, m, n) - f(a, n, m) = 0,$$

d. h. *die Summe*

$$\sum_{\lambda=a}^{\lambda=a+n} \frac{\overset{m}{T}_\lambda\, \overset{a+n-\lambda}{T}_{\lambda-1}}{1.2.3.4....\lambda},$$

als Function der drei Argumente a, m, n betrachtet, ändert ihren Werth nicht, wenn man die beiden Zahlen m und n vertauscht.

In dem besondern Falle, wo $a=1$ ist, verschwindet die rechte Seite der Formel (23). Also ist

$$f(1, m, n) = f(1, m-1, n+1).$$

Wenn daher die Summe $m+n$ dieselbe bleibt, so behält auch die Function $f(1, m, n)$ denselben Werth, weshalb man darin z. B. m, n resp. in $m+n$, 0 verändern darf, was die Gleichung

$$f(1, m, n) = f(1, m+n, 0) \text{ oder auch } f(1, m, n-1) = f(1, m+n-1, 0),$$

d. h.

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\overset{m}{T}_\lambda\, \overset{n-\lambda}{T}_{\lambda-1}}{1.2.3....\lambda} = \overset{m+n-1}{T}_1, \quad (24)$$

giebt.

Die Formel (21) ist nur ein besonderer Fall einer ganzen Classe ähnlicher Formeln, zu denen man auf folgendem Wege gelangt. Nach (5) und (7) hat man

$$\overset{u}{\Phi}_\gamma = 1 + \overset{\gamma}{F}_1 u + \overset{\gamma}{F}_2 u^2 \ldots = \frac{1 + \overset{\gamma}{E}_1 u + \overset{\gamma}{E}_2 u^2 \ldots}{\left(1-\frac{u}{1}\right)\left(1-\frac{u}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{u}{\gamma}\right)}.$$

Entwickelt man nun die rechte Seite nach steigenden Potenzen von u, indem man das bekannte Verfahren der Zerlegung rationa-naler Brüche anwendet, so findet man

$$\overset{\gamma}{F}_\delta = \sum_{m=1}^{m=\gamma} (-1)^{m-1} \binom{\gamma}{m} \overset{m}{D}_\gamma . \left(\frac{1}{m}\right)^\delta .$$

Wenn wir diese Formel mit (8) zusammenhalten, δ, ε resp. in $m+1$, k verändern und der Zahl γ nach und nach die Werthe 2, 3, 4, 5,.... beilegen, so bekommen wir:

$$\sum_{k=0}^{k=m} \frac{\overset{m-k}{T_k}}{k!} \binom{k+3}{1} = 5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1},$$

$$\sum_{k=0}^{k=m} \frac{\overset{m-k}{T_k}}{k!} \binom{k+4}{2} = \frac{31}{2} - 7\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2},$$

$$\sum_{k=0}^{k=m} \frac{\overset{m-k}{T_k}}{k!} \binom{k+5}{3} = \frac{229}{6} - 29\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-3},$$

$$\sum_{k=0}^{k=m} \frac{\overset{m-k}{T_k}}{k!} \binom{k+6}{4} = \frac{1961}{24} - \frac{277}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + \frac{93}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2} - \frac{11}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-3} + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{5}\right)^{m-4},$$

u. s. f.

Endlich ergiebt sich noch aus (14) ein Ausdruck für die Function $\overset{m}{T}_n$, welchen direct zu verificiren ich umsonst versucht habe. Denkt man sich nämlich dort den Bruch $\frac{1}{\Pi\left(1-\frac{u}{n+k+1}\right)}$ unter die Form

$$(1+u+u^2+u^3\ldots.)\left(1+\frac{u}{2}+\frac{u^2}{2^2}+\frac{u^3}{2^3}\ldots.\right)\ldots.\left(1+\frac{u}{n+k+1}+\frac{u^2}{(n+k+1)^2}+\ldots\right)$$

gebracht, die Multiplicationen ausgeführt und die gleichartigen Glieder vereinigt, so findet man

$$\overset{m}{T}_n = \Sigma \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^\lambda \left(\frac{1}{3}\right)^\mu \ldots \left(\frac{1}{n+k}\right)^\psi \left(\frac{1}{n+k+1}\right)^\omega ,$$

wo die Summe rechts sich auf alle ganzen und positiven Werthe mit Einschluss der Null erstrecken soll, welche man den Expo-

nenten k, λ, μ, ... ψ, ω beilegen kann, ohne dass ihre Summe die Zahl m übersteigt.

Zerlegt man in derselben Formel (14) die zusammengesetzten rationalen Brüche in einfache und ersetzt dann diese durch die äquivalenten geometrischen Reihen, so erhält man

$$\overset{m}{T}_n = \frac{(-1)^m}{m!} + (-1)^n.(n+1)! \sum_{k=0}^{k=m-1} \binom{n+k+1}{k} \varphi(n+k+1, -(m-k)),$$

wofern für ein positives α

$$\varphi(n, -\alpha) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^{-\alpha}$$

gesetzt wird. Macht man hier $n=0$, so erhält man die Formel

$$\frac{(-1)^m}{m!} + \sum_{k=0}^{k=m-1} (k+1)\varphi(k+1, -(m-k)) = 0, \quad [m>0].$$

Ist $\varphi(n, \alpha) = \frac{1}{n!} \sum_{m=1}^{m=n} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} m^\alpha$, wo α eine positive Zahl bezeichnet, so hat man

$$\varphi(n, \alpha) = n\varphi(n, \alpha-1) + \varphi(n-1, \alpha-1),$$

und $\varphi(n, \alpha)$ verschwindet für jedes unter n fallende ganze und positive α; sonst ist

$$\varphi(n, \alpha) = \overset{-n}{A}_{\alpha-n},$$

wofern n und α ganze Zahlen sind.

V.

Ueber eine astronomische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Das Problem von Douwes, welches in seiner verallgemeinerten Gestalt aus den beobachteten Höhen zweier Sterne, deren

Positionen auf der Sphäre bekannt sind, und der Zwischenzeit der Beobachtungen, oder, was dasselbe ist, der Differenz der den beobachteten Höhen entsprechenden Stundenwinkel, die Polhöhe und die Zeit zu bestimmen lehrt, ist seiner grossen praktischen Brauchbarkeit wegen schon vielfach behandelt worden. Weniger behandelt ist bis jetzt die analoge Aufgabe: aus den beobachteten Höhen zweier Sterne, deren Positionen auf der Sphäre bekannt sind, und der Differenz der den beobachteten Höhen entsprechenden Azimuthe die Polhöhe und die Zeit zu bestimmen. Wenn nun auch dieses Problem allerdings von geringerer praktischer Brauchbarkeit ist wie das erstere, so scheint mir dasselbe doch die Behandlung, welcher ich es im Folgenden unterwerfen werde, zu verdienen, weil die Besitzer von Theodoliten, welche jetzt in so grosser Vollkommenheit aus den Werkstätten mehrerer Künstler hervorgehen und zu der Anstellung der Beobachtungen, die der Auflösung des in Rede stehenden Problems zu Grunde gelegt werden müssen, vorzüglich geeignet sind, öfters nützliche Anwendung von demselben werden machen können.

§. 2.

Die Polhöhe sei φ; die bekannten Declinationen und die gemessenen Höhen der beiden beobachteten Sterne seien δ, δ_1 und h, h_1; die den gemessenen Höhen entsprechenden Azimuthe, welche von der südlichen Hälfte des Meridians an im Sinne der täglichen Bewegung der Sphäre, d. h. von Osten nach Westen, von 0 bis 360° gezählt werden, seien ω, ω_1. Dann haben wir die beiden folgenden allgemein gültigen Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} \sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos h \cos\omega \cos\varphi, \\ \sin\delta_1 = \sin h_1 \sin\varphi - \cos h_1 \cos\omega_1 \cos\varphi; \end{cases}$$

aus denen

$$2)\quad \begin{cases} \cos\omega = \dfrac{\sin h \sin\varphi - \sin\delta}{\cos h \cos\varphi}, \\ \cos\omega_1 = \dfrac{\sin h_1 \sin\varphi - \sin\delta_1}{\cos h_1 \cos\varphi}; \end{cases}$$

also

$$\cos\omega + \cos\omega_1 = 2\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$
$$= \frac{\sin(h+h_1)\sin\varphi - (\sin\delta\cos h_1 + \sin\delta_1\cos h)}{\cos h \cos h_1 \cos\varphi},$$

$$\cos\omega - \cos\omega_1 = 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$
$$= \frac{\sin(h-h_1)\sin\varphi - (\sin\delta\cos h_1 - \sin\delta_1\cos h)}{\cos h \cos h_1 \cos\varphi}$$

oder

$$
3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\cos h \cos h_1 \cos\varphi \cos\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega)\\
&=\frac{\sin(h+h_1)\sin\varphi-(\sin\delta\cos h_1+\sin\delta_1\cos h)}{2\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)},\\
&\cos h \cos h_1 \cos\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega)\\
&=\frac{\sin(h-h_1)\sin\varphi-(\sin\delta\cos h_1-\sin\delta_1\cos h)}{2\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}
\end{aligned}
\right.
$$

folgt, wobei man nicht zu übersehen hat, dass der Voraussetzung zufolge die Differenz $\omega_1-\omega$ der Azimuthe ω, ω_1 gemessen worden und daher bekannt ist.

Quadrirt man jetzt diese beiden Gleichungen und addirt sie dann zu einander, so erhält man nach einigen leichten Reductionen die folgende, bloss noch die eine unbekannte Grösse $\sin\varphi$ enthaltende Gleichung des zweiten Grades:

$$
4)\quad \left\{\cos h^2\cos h_1{}^2+\left(\frac{\sin(h+h_1)}{2\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}\right)^2+\left(\frac{\sin(h-h_1)}{2\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}\right)^2\right\}\sin\varphi^2
$$

$$
-2\left\{\frac{\sin(h+h_1)(\sin\delta\cos h_1+\sin\delta_1\cos h)}{4\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)^2}+\frac{\sin(h-h_1)(\sin\delta\cos h_1-\sin\delta_1\cos h)}{4\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)^2}\right\}\sin\varphi
$$

$$
=\cos h^2\cos h_1{}^2-\left(\frac{\sin\delta\cos h_1+\sin\delta_1\cos h}{2\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}\right)^2-\left(\frac{\sin\delta\cos h_1-\sin\delta_1\cos h}{2\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}\right)^2.
$$

Berechnet man jetzt die Hülfsgrössen R, Θ, Ω und R_1, Θ_1 mittelst der Formeln:

$$5)\quad \left\{\begin{array}{l} R\cos\Theta\cos\Omega=\dfrac{\sin(h+h_1)}{2\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}, \\ R\sin\Theta\cos\Omega=\dfrac{\sin(h-h_1)}{2\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}, \\ R\sin\Omega=\cos h\cos h_1 \end{array}\right.$$

und:

$$6)\quad \left\{\begin{array}{l} R_1\cos\Theta_1=\dfrac{\sin\delta\cos h_1+\sin\delta_1\cos h}{2\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}, \\ R_1\sin\Theta_1=\dfrac{\sin\delta\cos h_1-\sin\delta_1\cos h}{2\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}; \end{array}\right.$$

was bekanntlich immer ohne Schwierigkeit geschehen kann; so wird die vorhergehende quadratische Gleichung:

$$7)\quad \sin\varphi^2-2\frac{R_1}{R}\cos\Omega\cos(\Theta-\Theta_1)\sin\varphi=\frac{R^2\sin\Omega^2-R_1{}^2}{R^2},$$

also

$$8)\quad \left\{\sin\varphi-\frac{R_1}{R}\cos\Omega\cos(\Theta-\Theta_1)\right\}^2$$
$$=\frac{R^2\sin\Omega^2-R_1{}^2\{1-\cos\Omega^2\cos(\Theta-\Theta_1)^2\}}{R^2}.$$

Berechnet man nun noch den Hülfswinkel Ω_1 mittelst der Formel

$$9)\quad \cos\Omega_1=\cos\Omega\cos(\Theta-\Theta_1),$$

so wird

$$10)\quad (\sin\varphi-\frac{R_1}{R}\cos\Omega_1)^2=\frac{R^2\sin\Omega^2-R_1{}^2\sin\Omega_1{}^2}{R^2}$$

oder

$$11)\quad (\sin\varphi-\frac{R_1}{R}\cos\Omega_1)^2=\frac{R_1{}^2}{R^2}\sin\Omega_1{}^2\left(\frac{R^2\sin\Omega^2}{R_1{}^2\sin\Omega_1{}^2}-1\right),$$

und folglich, wenn man den Hülfswinkel Ω_2 mittelst der Formel

$$12)\quad \cos\Omega_2=\frac{R_1\sin\Omega_1}{R\sin\Omega}$$

berechnet:

$$\sin\varphi=\frac{R_1}{R}(\cos\Omega_1\pm\sin\Omega_1\tang\Omega_2),$$

d. i.

$$13)\quad \sin\varphi = \frac{R_1}{R}\cdot\frac{\cos(\Omega_1 \mp \Omega_2)}{\cos\Omega_2},$$

mittelst welcher Formel φ leicht berechnet werden kann. Auch ist nach 12)

$$14)\quad \sin\varphi = \frac{\sin\Omega}{\sin\Omega_1}\cos(\Omega_1 \mp \Omega_2).$$

Wir haben also zur Berechnung von φ die folgenden Formeln:

$$15)\quad R\cos\Theta\cos\Omega = \frac{\sin(h+h_1)}{2\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)},$$

$$R\sin\Theta\cos\Omega = \frac{\sin(h-h_1)}{2\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)},$$

$$R\sin\Omega = \cos h\cos h_1;$$

$$R_1\cos\Theta_1 = \frac{\sin\delta\cos h_1 + \sin\delta_1\cos h}{2\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)},$$

$$R_1\sin\Theta_1 = \frac{\sin\delta\cos h_1 - \sin\delta_1\cos h}{2\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)};$$

$$\cos\Omega_1 = \cos\Omega\cos(\Theta-\Theta_1),\quad \cos\Omega_2 = \frac{R_1\sin\Omega_1}{R\sin\Omega};$$

$$\sin\varphi = \frac{R_1}{R}\cdot\frac{\cos(\Omega_1\mp\Omega_2)}{\cos\Omega_2} = \frac{\sin\Omega}{\sin\Omega_1}\cos(\Omega_1\mp\Omega_2).$$

Hat man denselben Stern zwei Mal beobachtet, so ist $\delta=\delta_1$, und die vorhergehenden Formeln verwandeln sich in die folgenden etwas einfacheren:

$$16)\quad R\cos\Theta\cos\Omega = \frac{\sin(h+h_1)}{2\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)},$$

$$R\sin\Theta\cos\Omega = \frac{\sin(h-h_1)}{2\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)},$$

$$R\sin\Omega = \cos h\cos h_1;$$

$$R_1\cos\Theta_1 = \sin\delta\frac{\cos\frac{1}{2}(h-h_1)\cos\frac{1}{2}(h+h_1)}{\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)},$$

$$R_1\sin\Theta_1 = \sin\delta\frac{\sin\frac{1}{2}(h-h_1)\sin\frac{1}{2}(h+h_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)};$$

$$\cos\Omega_1 = \cos\Omega\cos(\Theta-\Theta_1),\quad \cos\Omega_2 = \frac{R_1\sin\Omega_1}{R\sin\Omega};$$

$$\sin\varphi = \frac{R_1}{R}\cdot\frac{\cos(\Omega_1\mp\Omega_2)}{\cos\Omega_2} = \frac{\sin\Omega}{\sin\Omega_1}\cos(\Omega_1\mp\Omega_2).$$

§. 3.

Löst man die quadratische Gleichung 4) ohne Einführung aller Hülfswinkel auf, so erhält man nach einigen leichten Reductionen, wenn der Kürze wegen

$$17)\quad L = \frac{\sin(h+h_1)(\sin\delta\cos h_1 + \sin\delta_1\cos h)}{4\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)^2} + \frac{\sin(h-h_1)(\sin\delta\cos h_1 - \sin\delta_1\cos h)}{4\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)^2},$$

$$M = \cos h^2 \cos h_1^2 + \left(\frac{\sin(h+h_1)}{2\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}\right)^2 + \left(\frac{\sin(h-h_1)}{2\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}\right)^2,$$

$$N = \left(\frac{\sin\delta\cos h_1 + \sin\delta_1\cos h}{2\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}\right)^2 + \left(\frac{\sin\delta\cos h_1 - \sin\delta_1\cos h}{2\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}\right)^2 + \left(\frac{\sin\delta\sin h_1 - \sin\delta_1\sin h}{\sin(\omega_1-\omega)}\right)^2$$

gesetzt wird:

$$18)\quad \sin\varphi = \frac{L \pm \cos h\cos h_1\sqrt{M-N}}{M}.$$

Berechnen wir nun aber die Hülfsgrössen R, Θ, Ω und R_1, Θ_1, Ω_1 mittelst der Formeln:

$$19)\quad \begin{cases} R\sin\Theta\cos\Omega = \dfrac{\sin(h+h_1)}{2\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}, \\ R\cos\Theta\cos\Omega = \dfrac{\sin(h-h_1)}{2\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}, \\ R\sin\Omega = \cos h\cos h_1 \end{cases}$$

und

$$20)\quad \begin{cases} R_1\sin\Theta_1\cos\Omega_1 = \dfrac{\sin\delta\cos h_1 + \sin\delta_1\cos h}{2\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}, \\ R_1\cos\Theta_1\cos\Omega_1 = \dfrac{\sin\delta\cos h_1 - \sin\delta_1\cos h}{2\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}, \\ R_1\sin\Omega_1 = \dfrac{\sin\delta\sin h_1 - \sin\delta_1\sin h}{\sin(\omega_1-\omega)}; \end{cases}$$

so ist, wie man leicht findet:

$$21)\quad \sin\varphi = \frac{R_1\cos\Omega\cos\Omega_1\cos(\Theta-\Theta_1) \pm \sin\Omega\sqrt{R^2-R_1^2}}{R}$$

oder

$$22)\quad \sin\varphi=\frac{R_1}{R}\left\{\cos\Omega\cos\Omega_1\cos(\Theta-\Theta_1)\pm\sin\Omega\sqrt{\left(\frac{R}{R_1}\right)^2-1}\right\},$$

und folglich, wenn

$$23)\quad \cos\Omega_2=\frac{R}{R_1}$$

gesetzt wird:

$$24)\quad \sin\varphi=\cos\Omega_2\{\cos\Omega\cos\Omega_1\cos(\Theta-\Theta_1)\pm\sin\Omega\tang\Omega_2\},$$

also, wenn man noch den Hülfswinkel Ω_3 mittelst der Formel

$$25)\quad \tang\Omega_3=\frac{\tang\Omega_2}{\cos\Omega_1\cos(\Theta-\Theta_1)}$$

berechnet:

$$26)\quad \sin\varphi=\frac{\cos\Omega_1\cos\Omega_2\cos(\Theta-\Theta_1)\cos(\Omega\mp\Omega_3)}{\cos\Omega_3}.$$

Weil aber nach 25)

$$\frac{\cos\Omega_2}{\cos\Omega_3}=\frac{\sin\Omega_2}{\cos\Omega_1\sin\Omega_3\cos(\Theta-\Theta_1)}$$

ist, so ist

$$27)\quad \sin\varphi=\frac{\sin\Omega_2}{\sin\Omega_3}\cos(\Omega\mp\Omega_3).$$

Welchen der beiden Werthe der Polhöhe, die im Allgemeinen die vorhergehenden Formeln liefern, man zu nehmen hat, wird bei praktischen Anwendungen nie zweifelhaft sein.

Für $\delta=\delta_1$ nehmen die Formeln 20), mittelst welcher R_1, Θ_1, Ω_1 gefunden werden, die folgende einfachere Gestalt an:

$$28)\quad \begin{cases} R_1\sin\Theta_1\cos\Omega_1=\dfrac{\sin\delta\cos\frac{1}{2}(h+h_1)\cos\frac{1}{2}(h-h_1)}{\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}, \\ R_1\cos\Theta_1\cos\Omega_1=\dfrac{\sin\delta\sin\frac{1}{2}(h+h_1)\sin\frac{1}{2}(h-h_1)}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}, \\ R_1\sin\Omega_1=-\dfrac{2\sin\delta\cos\frac{1}{2}(h+h_1)\sin\frac{1}{2}(h-h_1)}{\sin(\omega_1-\omega)}. \end{cases}$$

§. 4.

Hat man die Polhöhe gefunden, so berechnet man $\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$ mittelst einer der beiden aus 3) sich ergebenden Formeln:

$$29)\quad \begin{cases} \cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=\dfrac{\sin(h+h_1)\sin\varphi-(\sin\delta\cos h_1+\sin\delta_1\cos h)}{2\cos h\cos h_1\cos\varphi\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}, \\ \sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=\dfrac{\sin(h-h_1)\sin\varphi-(\sin\delta\cos h_1-\sin\delta_1\cos h)}{2\cos h\cos h_1\cos\varphi\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}; \end{cases}$$

oder, wenn $\delta = \delta_1$ ist, mittelst einer der Formeln:

$$30) \begin{cases} \cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=\cos\frac{1}{2}(h+h_1)\dfrac{\sin\frac{1}{2}(h+h_1)\sin\varphi-\cos\frac{1}{2}(h-h_1)\sin\delta}{\cos h\cos h_1\cos\varphi\cos\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}, \\ \sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)=\sin\frac{1}{2}(h-h_1)\dfrac{\cos\frac{1}{2}(h-h_1)\sin\varphi-\sin\frac{1}{2}(h+h_1)\sin\delta}{\cos h\cos h_1\cos\varphi\sin\frac{1}{2}(\omega_1-\omega)}; \end{cases}$$

wo, da man weiss, dass $\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$ nie grösser als 360° ist, und sowohl $\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$, als auch $\sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$ kennt, über die Art, wie man $\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$ zu nehmen hat, gar kein Zweifel übrig bleiben kann.

Hat man aber $\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)$, so findet man auch leicht ω und ω_1, weil

$$31) \begin{cases} \omega = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega)-\frac{1}{2}(\omega_1-\omega), \\ \omega_1=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega)+\frac{1}{2}(\omega_1-\omega) \end{cases}$$

ist.

Wie man endlich aus der Polhöhe, der Höhe und dem Azimuth eines Sterns den entsprechenden Stundenwinkel findet, und daraus dann ferner mittelst der bekannten Rectascension des Sterns die entsprechende Sternzeit ableitet, kann aus den Elementen der sphärischen Astronomie hier als bekannt vorausgesetzt werden.

§. 5.

Wir wollen jetzt den Einfluss untersuchen, welchen Fehler in den gegebenen und in den gemessenen Stücken auf die gesuchten Grössen ausüben. Bezeichnen wir zu dem Ende die wahre Declination, Höhe, Polhöhe und das wahre Azimuth durch

$$\delta+\varDelta\delta,\ h+\varDelta h,\ \varphi+\varDelta\varphi,\ \omega+\varDelta\omega$$

und

$$\delta_1+\varDelta\delta_1,\ h_1+\varDelta h_1,\ \varphi+\varDelta\varphi,\ \omega_1+\varDelta\omega_1;$$

so haben wir statt der Gleichungen 1) eigentlich die folgenden Gleichungen:

$$32) \begin{cases} \sin(\delta+\varDelta\delta)=\sin(h+\varDelta h)\sin(\varphi+\varDelta\varphi) \\ \qquad -\cos(h+\varDelta h)\cos(\omega+\varDelta\omega)\cos(\varphi+\varDelta\varphi), \\ \sin(\delta_1+\varDelta\delta_1)=\sin(h_1+\varDelta h_1)\sin(\varphi+\varDelta\varphi) \\ \qquad -\cos(h_1+\varDelta h_1)\cos(\omega_1+\varDelta\omega_1)\cos(\varphi+\varDelta\varphi). \end{cases}$$

Entwickeln wir aber diese beiden Gleichungen bloss bis auf Glieder, welche in Beziehung auf $\varDelta\delta$, $\varDelta h$, $\varDelta\varphi$, $\varDelta\omega$ und $\varDelta\delta_1$, $\varDelta h_1$, $\varDelta\varphi$, $\varDelta\omega_1$ nur von der ersten Dimension sind, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sin\delta+\cos\delta\varDelta\delta=&\sin h\sin\varphi-\cos h\cos\omega\cos\varphi \\ &+(\cos h\sin\varphi+\sin h\cos\omega\cos\varphi)\varDelta h \\ &+(\sin h\cos\varphi+\cos h\cos\omega\sin\varphi)\varDelta\varphi \\ &+\cos h\sin\omega\cos\varphi\varDelta\omega \end{aligned}$$

und

$$\sin\delta_1+\cos\delta_1\Delta\delta_1=\sin h_1\sin\varphi-\cos h_1\cos\omega_1\cos\varphi$$
$$+(\cos h_1\sin\varphi+\sin h_1\cos\omega_1\cos\varphi)\Delta h_1$$
$$+(\sin h_1\cos\varphi+\cos h_1\cos\omega_1\sin\varphi)\Delta\varphi$$
$$+\cos h_1\sin\omega_1\cos\varphi\Delta\omega_1.$$

Nun ist aber, wenn wir die wahre Azimuthaldifferenz durch $\omega_1-\omega+\Delta(\omega_1-\omega)$ bezeichnen,

$$\omega_1+\Delta\omega_1=(\omega+\Delta\omega)+\{\omega_1-\omega+\Delta(\omega_1-\omega)\}$$
$$=\omega+(\omega_1-\omega)+\Delta\omega+\Delta(\omega_1-\omega),$$

also, weil in Folge der Gleichungen 31) offenbar

$$\omega_1=\omega+(\omega_1-\omega)$$

gesetzt worden ist,

$$\Delta\omega_1=\Delta\omega+\Delta(\omega_1-\omega).$$

Daher erhält die zweite der beiden obigen Gleichungen die folgende Form:

$$\sin\delta_1+\cos\delta_1\Delta\delta_1=\sin h_1\sin\varphi-\cos h_1\cos\omega_1\cos\varphi$$
$$+(\cos h_1\sin\varphi+\sin h_1\cos\omega_1\cos\varphi)\Delta h_1$$
$$+\cos h_1\sin\omega_1\cos\varphi\Delta(\omega_1-\omega)$$
$$+(\sin h_1\cos\varphi+\cos h_1\cos\omega_1\sin\varphi)\Delta\varphi$$
$$+\cos h_1\sin\omega_1\cos\varphi\Delta\omega.$$

Weil nun aber im Vorhergehenden die Grössen φ, ω, ω_1 so bestimmt worden sind, dass den beiden Gleichungen

$$\sin\delta=\sin h\sin\varphi-\cos h\cos\omega\cos\varphi,$$
$$\sin\delta_1=\sin h_1\sin\varphi-\cos h_1\cos\omega_1\cos\varphi$$

genügt wird; so erhalten wir nach dem Obigen, wenn der Kürze wegen:

$$33)\quad\begin{cases}A=\sin h\cos\varphi+\cos h\cos\omega\sin\varphi,\\ B=\cos h\sin\omega\cos\varphi,\\ \mathfrak{A}=\cos\delta,\\ \mathfrak{B}=\cos h\sin\varphi+\sin h\cos\omega\cos\varphi\end{cases}$$

und

$$34)\quad\begin{cases}A_1=\sin h_1\cos\varphi+\cos h_1\cos\omega_1\sin\varphi,\\ B_1=\cos h_1\sin\omega_1\cos\varphi,\\ \mathfrak{A}_1=\cos\delta_1,\\ \mathfrak{B}_1=\cos h_1\sin\varphi+\sin h_1\cos\omega_1\cos\varphi\end{cases}$$

gesetzt wird, zur Bestimmung von $\Delta\varphi$ und $\Delta\omega$ aus den Grössen

$$\Delta\delta,\ \Delta\delta_1,\ \Delta h,\ \Delta h_1,\ \Delta(\omega_1-\omega)$$

die beiden folgenden Gleichungen:

$$35)\ \begin{cases} A\Delta\varphi+B\Delta\omega=\mathfrak{A}\Delta\delta-\mathfrak{B}\Delta h, \\ A_1\Delta\varphi+B_1\Delta\omega=\mathfrak{A}_1\Delta\delta_1-\mathfrak{B}_1\Delta h_1-B_1\Delta(\omega_1-\omega). \end{cases}$$

Es ist nun, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} &AB_1-A_1B \\ = &(\sin h\cos\varphi+\cos h\cos\omega\sin\varphi)\cos h_1\sin\omega_1\cos\varphi \\ &-(\sin h_1\cos\varphi+\cos h_1\cos\omega_1\sin\varphi)\cos h\sin\omega\cos\varphi \\ = &(\sin h\cos h_1\sin\omega_1-\cos h\sin h_1\sin\omega)\cos\varphi^2 \\ &+\cos h\cos h_1\sin(\omega_1-\omega)\sin\varphi\cos\varphi. \end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned} &\sin h\cos h_1\sin\omega_1-\cos h\sin h_1\sin\omega \\ = &\tfrac{1}{2}\{\sin(h+h_1)+\sin(h-h_1)\}\sin\omega_1 \\ &-\tfrac{1}{2}\{\sin(h+h_1)-\sin(h-h_1)\}\sin\omega \\ = &\tfrac{1}{2}\sin(h+h_1)(\sin\omega_1-\sin\omega)+\tfrac{1}{2}\sin(h-h_1)(\sin\omega_1+\sin\omega) \\ = &\sin(h+h_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega) \\ &+\sin(h-h_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\cos h\cos h_1\sin(\omega_1-\omega) \\ =&\{\cos(h+h_1)+\cos(h-h_1)\}\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega). \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} &36)\quad AB_1-A_1B \\ =&\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega)\left\{\begin{matrix}\sin(h+h_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega)\cos\varphi \\ +\cos(h+h_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega)\sin\varphi\end{matrix}\right\}\cos\varphi \\ &+\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega)\left\{\begin{matrix}\sin(h-h_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega)\cos\varphi \\ +\cos(h-h_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega)\sin\varphi\end{matrix}\right\}\cos\varphi. \end{aligned}$$

Berechnet man nun die Hülfsgrössen ϱ und x mittelst der Formeln

$$37)\ \begin{cases} \varrho\sin x= & \sin(h+h_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega)\cos\varphi \\ & +\cos(h+h_1)\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega)\sin\varphi, \\ \varrho\cos x= & \sin(h-h_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega)\cos\varphi \\ & +\cos(h-h_1)\sin\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega)\sin\varphi; \end{cases}$$

so ist

$$38)\quad AB_1-A_1B=\varrho\cos\varphi\cos\{\tfrac{1}{2}(\omega_1-\omega)-x\}.$$

Einen sehr einfachen Ausdruck dieser Grösse erhält man, wenn man die mittelst der bekannten Gleichungen

$$39)\quad \begin{cases} \cos\delta\cos\sigma = \sin h\cos\varphi + \cos h\cos\omega\sin\varphi, \\ \cos\delta\sin\sigma = \cos h\sin\omega \end{cases}$$

und

$$40)\quad \begin{cases} \cos\delta_1\cos\sigma_1 = \sin h_1\cos\varphi + \cos h_1\cos\omega_1\sin\varphi, \\ \cos\delta_1\sin\sigma_1 = \cos h_1\sin\omega_1 \end{cases}$$

zu bestimmenden Stundenwinkel σ und σ_1 einführt, indem sich nämlich aus diesen Gleichungen auf der Stelle

$$41)\quad AB_1 - A_1B = \cos\delta\cos\delta_1\sin(\sigma_1-\sigma)\cos\varphi$$

ergiebt.

Löst man nun, diesen Ausdruck und die Gleichungen 39) und 40) benutzend, die beiden Gleichungen 35) in Bezug auf $\Delta\varphi$ und $\Delta\omega$ als unbekannte Grössen vollständig auf, so erhält man:

$$42)\quad \Delta\varphi = \frac{\sin\sigma_1}{\sin(\sigma_1-\sigma)}\Delta\delta - \frac{\sin\sigma}{\sin(\sigma_1-\sigma)}\Delta\delta_1$$
$$-\frac{\sin\sigma_1(\cos h\sin\varphi + \sin h\cos\omega\cos\varphi)}{\cos\delta\sin(\sigma_1-\sigma)}\Delta h$$
$$+\frac{\sin\sigma(\cos h_1\sin\varphi + \sin h_1\cos\omega_1\cos\varphi)}{\cos\delta_1\sin(\sigma_1-\sigma)}\Delta h_1$$
$$+\frac{\sin\sigma\sin\sigma_1\cos\varphi}{\sin(\sigma_1-\sigma)}\Delta(\omega_1-\omega)$$

und

$$43)\quad \Delta\omega = -\frac{\cos\sigma_1}{\sin(\sigma_1-\sigma)\cos\varphi}\Delta\delta + \frac{\cos\sigma}{\sin(\sigma_1-\sigma)\cos\varphi}\Delta\delta_1$$
$$+\frac{\cos\sigma_1(\cos h\sin\varphi + \sin h\cos\omega\cos\varphi)}{\cos\delta\sin(\sigma_1-\sigma)\cos\varphi}\Delta h$$
$$-\frac{\cos\sigma(\cos h_1\sin\varphi + \sin h_1\cos\omega_1\cos\varphi)}{\cos\delta_1\sin(\sigma_1-\sigma)\cos\varphi}\Delta h_1$$
$$-\frac{\cos\sigma\sin\sigma_1}{\sin(\sigma_1-\sigma)}\Delta(\omega_1-\omega).$$

Berechnet man die Hülfswinkel θ und θ_1 mittelst der Formeln

$$44)\quad \begin{cases} \cot\theta = \cos\omega\cot\varphi, \\ \cot\theta_1 = \cos\omega_1\cot\varphi; \end{cases}$$

so wird

$$45)\quad \Delta\varphi = \frac{\sin\sigma_1}{\sin(\sigma_1-\sigma)}\Delta\delta - \frac{\sin\sigma}{\sin(\sigma_1-\sigma)}\Delta\delta_1$$
$$-\frac{\sin\sigma_1\sin\varphi\sin(h+\theta)}{\cos\delta\sin\theta\sin(\sigma_1-\sigma)}\Delta h$$
$$+\frac{\sin\sigma\sin\varphi\sin(h_1+\theta_1)}{\cos\delta_1\sin\theta_1\sin(\sigma_1-\sigma)}\Delta h_1$$
$$+\frac{\sin\sigma\sin\sigma_1\cos\varphi}{\sin(\sigma_1-\sigma)}\Delta(\omega_1-\omega)$$

und

$$46)\quad \Delta\omega = -\frac{\cos\sigma_1}{\sin(\sigma_1-\sigma)\cos\varphi}\Delta\delta + \frac{\cos\sigma}{\sin(\sigma_1-\sigma)\cos\varphi}\Delta\delta_1$$
$$+\frac{\cos\sigma_1\tang\varphi\sin(h+\theta)}{\cos\delta\sin\theta\sin(\sigma_1-\sigma)}\Delta h$$
$$-\frac{\cos\sigma\tang\varphi\sin(h_1+\theta_1)}{\cos\delta_1\sin\theta_1\sin(\sigma_1-\sigma)}\Delta h_1$$
$$-\frac{\cos\sigma\sin\sigma_1}{\sin(\sigma_1-\sigma)}\Delta(\omega_1-\omega).$$

Zur Bestimmung von $\Delta\omega_1$ hat man nach dem Obigen die Formel

$$\Delta\omega_1 = \Delta\omega + \Delta(\omega_1-\omega),$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$47)\quad \Delta\omega_1 = -\frac{\cos\sigma_1}{\sin(\sigma_1-\sigma)\cos\varphi}\Delta\delta + \frac{\cos\sigma}{\sin(\sigma_1-\sigma)\cos\varphi}\Delta\delta_1$$
$$+\frac{\cos\sigma_1\tang\varphi\sin(h+\theta)}{\cos\delta\sin\theta\sin(\sigma_1-\sigma)}\Delta h$$
$$-\frac{\cos\sigma\tang\varphi\sin(h_1+\theta_1)}{\cos\delta_1\sin\theta_1\sin(\sigma_1-\sigma)}\Delta h_1$$
$$-\frac{\sin\sigma\cos\sigma_1}{\sin(\sigma_1-\sigma)}\Delta(\omega_1-\omega).$$

Zur Bestimmung von $\Delta\sigma$ und $\Delta\sigma_1$ hat man nach 39) und 40) die Gleichungen

$$48)\quad \begin{cases} \cos(\delta+\Delta\delta)\sin(\sigma+\Delta\sigma) = \cos(h+\Delta h)\sin(\omega+\Delta\omega), \\ \cos(\delta_1+\Delta\delta_1)\sin(\sigma_1+\Delta\sigma_1) = \cos(h_1+\Delta h_1)\sin(\omega_1+\Delta\omega_1); \end{cases}$$

aus denen sich mit den gewöhnlichen Vernachlässigungen ohne Schwierigkeit

$$49)\quad \begin{cases} \Delta\sigma = \tang\delta\tang\sigma\Delta\delta - \frac{\sin h\sin\omega}{\cos\delta\cos\sigma}\Delta h + \frac{\cos h\cos\omega}{\cos\delta\cos\sigma}\Delta\omega, \\ \Delta\sigma_1 = \tang\delta_1\tang\sigma_1\Delta\delta_1 - \frac{\sin h_1\sin\omega_1}{\cos\delta_1\cos\sigma_1}\Delta h_1 + \frac{\cos h_1\cos\omega_1}{\cos\delta_1\cos\sigma_1}\Delta\omega_1 \end{cases}$$

ergiebt.

§. 6.

Hat man eine grössere Anzahl von Sternen, deren Declinationen

$$\delta,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \delta_4, \ldots$$

sind, in den Höhen

$$h,\ h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4, \ldots$$

und den Azimuthen

$$\omega,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4, \ldots$$

beobachtet, und hat die Höhen

$$h,\ h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4, \ldots$$

und die Azimuthaldifferenzen

$$\omega_1 - \omega,\ \omega_2 - \omega,\ \omega_3 - \omega,\ \omega_4 - \omega, \ldots$$

gemessen, so kann man nach dem Vorhergehenden aus dem ersten und einem beliebigen anderen dieser Sterne genäherte Werthe der Polhöhe und des Azimuths, in welchem der erste dieser Sterne beobachtet worden ist, herleiten. Bezeichnen wir nun diese genäherten Werthe respective durch φ und ω, so ergeben sich auch genäherte Werthe $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \ldots$ der Azimuthe, in denen die übrigen Sterne beobachtet worden sind, mittelst der Formeln:

$$\omega_1 = \omega + (\omega_1 - \omega),$$
$$\omega_2 = \omega + (\omega_2 - \omega),$$
$$\omega_3 = \omega + (\omega_3 - \omega),$$
$$\omega_4 = \omega + (\omega_4 - \omega),$$
u. s. w.

Bezeichnen wir aber die wahren Werthe der Polhöhe und des Azimuths, in welchem der erste Stern beobachtet worden ist, durch $\varphi + \varDelta\varphi$ und $\omega + \varDelta\omega$, so sind die Azimuthe, in denen die übrigen Sterne beobachtet worden sind, da $\omega_1 - \omega$, $\omega_2 - \omega$, $\omega_3 - \omega$, $\omega_4 - \omega, \ldots$ die beobachteten Azimuthaldifferenzen bezeichnen, offenbar eigentlich

$$\omega + \varDelta\omega + (\omega_1 - \omega),$$
$$\omega + \varDelta\omega + (\omega_2 - \omega),$$
$$\omega + \varDelta\omega + (\omega_3 - \omega),$$
$$\omega + \varDelta\omega + (\omega_4 - \omega),$$
u. s. w.

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\omega_1 + \Delta\omega,\ \omega_2 + \Delta\omega,\ \omega_3 + \Delta\omega,\ \omega_4 + \Delta\omega, \ldots.$$

und wir haben daher jetzt zur Bestimmung von $\Delta\varphi$ und $\Delta\omega$ nach dem Obigen die folgenden Gleichungen:

$$\sin\delta = \sin h \sin(\varphi + \Delta\varphi) - \cos h \cos(\omega + \Delta\omega)\cos(\varphi + \Delta\varphi),$$

$$\sin\delta_1 = \sin h_1 \sin(\varphi + \Delta\varphi) - \cos h_1 \cos(\omega_1 + \Delta\omega)\cos(\varphi + \Delta\varphi),$$

$$\sin\delta_2 = \sin h_2 \sin(\varphi + \Delta\varphi) - \cos h_2 \cos(\omega_2 + \Delta\omega)\cos(\varphi + \Delta\varphi),$$

$$\sin\delta_3 = \sin h_3 \sin(\varphi + \Delta\varphi) - \cos h_3 \cos(\omega_3 + \Delta\omega)\cos(\varphi + \Delta\varphi),$$

u. s. w.

oder näherungsweise:

$$\sin\delta - (\sin h \sin\varphi - \cos h \cos\omega \cos\varphi)$$
$$= (\sin h \cos\varphi + \cos h \cos\omega \sin\varphi)\Delta\varphi + \cos h \sin\omega \cos\varphi \Delta\omega,$$

$$\sin\delta_1 - (\sin h_1 \sin\varphi - \cos h_1 \cos\omega_1 \cos\varphi)$$
$$= (\sin h_1 \cos\varphi + \cos h_1 \cos\omega_1 \sin\varphi)\Delta\varphi + \cos h_1 \sin\omega_1 \cos\varphi \Delta\omega,$$

$$\sin\delta_2 - (\sin h_2 \sin\varphi - \cos h_2 \cos\omega_2 \cos\varphi)$$
$$= (\sin h_2 \cos\varphi + \cos h_2 \cos\omega_2 \sin\varphi)\Delta\varphi + \cos h_2 \sin\omega_2 \cos\varphi \Delta\omega,$$

$$\sin\delta_3 - (\sin h_3 \sin\varphi - \cos h_3 \cos\omega_3 \cos\varphi)$$
$$= (\sin h_3 \cos\varphi + \cos h_3 \cos\omega_3 \sin\varphi)\Delta\varphi + \cos h_3 \sin\omega_3 \cos\varphi \Delta\omega,$$

u. s. w.

Berechnet man die Hülfswinkel

$$\mu,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4, \ldots.$$

mittelst der Formeln

$$50)\quad \begin{cases} \tang\mu = \cos\omega \cot h, \\ \tang\mu_1 = \cos\omega_1 \cot h_1, \\ \tang\mu_2 = \cos\omega_2 \cot h_2, \\ \tang\mu_3 = \cos\omega_3 \cot h_3, \end{cases}$$

u. s. w.

und hierauf die Hülfswinkel

$$\varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4, \ldots.$$

mittelst der Formeln

$$51)\begin{cases} \sin\varepsilon = \dfrac{\sin h \sin(\varphi-\mu)}{\cos\mu}, \\ \sin\varepsilon_1 = \dfrac{\sin h_1 \sin(\varphi-\mu_1)}{\cos\mu_1}, \\ \sin\varepsilon_2 = \dfrac{\sin h_2 \sin(\varphi-\mu_2)}{\cos\mu_2}, \\ \sin\varepsilon_3 = \dfrac{\sin h_3 \sin(\varphi-\mu_3)}{\cos\mu_3}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

so werden die obigen Gleichungen:

$$52)\begin{cases} 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\varepsilon)\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\varepsilon) = \dfrac{\sin h\cos(\varphi-\mu)}{\cos\mu}\Delta\varphi + \cos h\sin\omega\cos\varphi\Delta\omega, \\ 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta_1-\varepsilon_1)\cos\tfrac{1}{2}(\delta_1+\varepsilon_1) = \dfrac{\sin h_1\cos(\varphi-\mu_1)}{\cos\mu_1}\Delta\varphi + \cos h_1\sin\omega_1\cos\varphi\Delta\omega, \\ 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta_2-\varepsilon_2)\cos\tfrac{1}{2}(\delta_2+\varepsilon_2) = \dfrac{\sin h_2\cos(\varphi-\mu_2)}{\cos\mu_2}\Delta\varphi + \cos h_2\sin\omega_2\cos\varphi\Delta\omega, \\ 2\sin\tfrac{1}{2}(\delta_3-\varepsilon_3)\cos\tfrac{1}{2}(\delta_3+\varepsilon_3) = \dfrac{\sin h_3\cos(\varphi-\mu_3)}{\cos\mu_3}\Delta\varphi + \cos h_3\sin\omega_3\cos\varphi\Delta\omega, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen müssen nun die Verbesserungen $\Delta\varphi$ und $\Delta\omega$ des Azimuths und der Polhöhe nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden.

VI.

Kubatur einiger vom Ellipsoide abgeleiteten Körper.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Die Gleichung des Ellipsoides, von dem im Folgenden die Rede sein soll, sei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

$$a>b>c.$$

§. 1.

Vom Mittelpunkte des Ellipsoides (1) ziehe man auf irgend einen Punkt $(x_1\, y_1\, z_1)$ seiner Oberfläche einen Radius vector, so sind die Gleichungen desselben:

$$x=\frac{x_1}{z_1}z,\quad y=\frac{y_1}{z_1}z.$$

Man verlängere diesen Radius nun um h, so sind die Koordinaten des Endpunktes:

$$\left.\begin{array}{c} x=x_1+\dfrac{hx_1}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}},\ y=y_1+\dfrac{hy_1}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}}, \\ z=z_1+\dfrac{hz_1}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}}. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Eliminirt man nun x_1, y_1, z_1 zwischen den Gleichungen (2) und der Gleichung

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c}\right)^2=1, \tag{3}$$

so erhält man die Gleichung der Fläche, die durch alle Endpunkte der verlängerten Halbmesser geht. Zu diesem Ende setze man

$$x_1=r\cos\alpha,\ y_1=r\sin\alpha\cos\beta,\ z_1=r\sin\alpha\sin\beta;$$

so ist

$$\left.\begin{array}{c} x=(r+h)\cos\alpha,\quad y=(r+h)\sin\alpha\cos\beta, \\ z=(r+h)\sin\alpha\sin\beta; \end{array}\right\} \tag{2'}$$

$$r^2=(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-h)^2,\ (r+h)^2=x^2+y^2+z^2;$$

$$r^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{c^2}\right)=1, \tag{3'}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{x^2}{(r+h)^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2},\ \sin^2\alpha\cos^2\beta=\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta=\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2};$$

also die Gleichung der entstehenden Fläche, aus (3'):

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-h)^2=x^2+y^2+z^2. \tag{4}$$

Um den Kubikinhalt dieses Körpers zu finden, wollen wir andere Koordinaten einführen, und setzen:

$$x = ra\cos\alpha,\quad y = rb\sin\alpha\cos\beta,\quad z = rc\sin\alpha\sin\beta;$$

so folgt aus (4):

$$r = 1 + \frac{h}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta + c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}}.$$

Ist nun im Allgemeinen

$$\left.\begin{aligned} \partial x &= m\partial r + n\partial\alpha + p\partial\beta, \\ \partial y &= m'\partial r + n'\partial\alpha + p'\partial\beta, \\ \partial z &= m''\partial r + n''\partial\alpha + p''\partial\beta; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

so folgt aus den im Archiv Thl. X. S. 417. ff. gegebenen Formeln:

$$\left.\begin{aligned} &\int\!\!\int\!\!\int \partial x\,\partial y\,\partial z = \\ -&\int\!\!\int\!\!\int [m''(pn' - np') + n''(p'm - m'p) + p''(m'n - mn')]\partial r\,\partial\alpha\,\partial\beta. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

In unserm Falle erhält man nun:

$$\int\!\!\int\!\!\int \partial x\,\partial y\,\partial z = abc\int\!\!\int\!\!\int r^2\sin\alpha\,\partial r\,\partial\alpha\,\partial\beta.$$

Will man den achten Theil des Inhalts haben, so muss man als Grenzen von r nehmen 0 und r, von α: 0 und $\frac{\pi}{2}$, von β: c und $\frac{\pi}{2}$, so dass der Inhalt:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{8abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta = \frac{8abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta \\ &+ 8abch\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta + c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}} \\ &+ 8abch^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta + c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta} \\ &+ \frac{8abch^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta + c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)^3}}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Bestimmen wir nun die hier vorkommenden Integrale. Zunächst ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta = \frac{\pi}{2}. \quad (8)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha\partial\alpha\,\partial\beta}{(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\pi}{2abc}\;{}^{*}). \quad (8)$$

Ferner ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\beta}{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

$$=\int_0^1\frac{\partial x}{(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha-(b^2-c^2)x^2\sin^2\alpha)\sqrt{1-x^2}}$$

(wenn $\sin\beta=x$)$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha)(a^2\cos^2\alpha+c^2\sin^2\alpha)}}$, also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha\partial\alpha\partial\beta}{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha\partial\alpha}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha)(a^2\cos^2\alpha+c^2\sin^2\alpha)}}.$$

Man setze $\cos\alpha=x$, so ist dieses Integral:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{\partial x}{\sqrt{b^2+(a^2-b^2)x^2}\sqrt{c^2+(a^2-c^2)x^2}}.$$

Man setze nun $x=\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}\varepsilon=\sqrt{\left(\frac{a^2-c^2}{c^2}\right)}$, so wird dasselbe Integral:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\varepsilon}\frac{c\partial\varphi}{\sqrt{a^2-c^2}\cos^2\varphi\sqrt{b^2+\frac{c^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2}\operatorname{tg}^2\varphi}\sqrt{c^2+c^2\operatorname{tg}^2\varphi}}$$

$$=\frac{\pi c}{2\sqrt{a^2-c^2}}\int_0^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{c\sqrt{b^2\cos^2\varphi+\frac{c^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2}\sin^2\varphi}}$$

$$=\frac{\pi}{2b\sqrt{a^2-c^2}}\int_0^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+\frac{c^2(a^2-b^2)}{b^2(a^2-c^2)}\sin^2\varphi}}$$

$$=\frac{\pi}{2b\sqrt{a^2-c^2}}\int_0^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}\sin^2\varphi}}$$

$$=\frac{\pi}{2b\sqrt{a^2-c^2}}F\left(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}}\right).$$

---

*) Dieses Integral ist das von Poisson schon längst angegebene. Man findet es leicht, wenn man das Volumen des Ellipsoides (1) sucht. Setzt man nämlich:

Demnach ist

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha\partial\alpha\,\partial\beta}{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta} \\ \quad =\frac{\pi}{2b\sqrt{a^2-c^2}}F(\varepsilon, \sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}}),\end{array}\right\} \quad (9)$$

worin $\operatorname{tg}\varepsilon=\sqrt{\left(\frac{a^2-c^2}{c^2}\right)}$.

Bekanntlich ist der achte Theil der Oberfläche des Ellipsoides (1):

$$\frac{\pi c^2}{4}+\frac{\pi a^2 b}{4\sqrt{a^2-c^2}}\left[\frac{c^2}{a^2}F(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}})+\frac{a^2-c^2}{a^2}E(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(q^2-c^2)}})\right]$$

wo ε denselben Werth hat, wie in (9). Setzt man aber in der Gleichung (1):

$$x=a\sin\alpha\sin\beta,\ y=b\sin\alpha\cos\beta,\ z=c\cos\alpha$$

und formt den Ausdruck für den Oberflächeninhalt um (S. Moigno Vorles. §. 114.), so erhält man für denselben achten Theil:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\sqrt{a^2b^2\cos^2\alpha+a^2c^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+b^2c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

Demnach ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\sqrt{a^2b^2\cos^2\alpha+a^2c^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+b^2c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$
$$=\frac{\pi c^2}{4}+\frac{\pi a^2 b}{4\sqrt{a^2-c^2}}\left[\frac{c^2}{a^2}F(\varepsilon,\eta)+\frac{a^2-c^2}{a^2}E(\varepsilon,\eta)\right],$$

wenn zur Abkürzung $\eta^2=\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}$ gesetzt wird.

$$x=ra^2\cos\alpha,\ y=rb^2\sin\alpha\cos\beta,\ z=rc^2\sin\alpha\sin\beta;$$

also

$$r^2=\frac{1}{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta};$$

so findet man, da $\frac{4\pi abc}{3}$ das Volumen ist:

$$\frac{8a^2b^2c^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha\partial\alpha\,\partial\beta}{(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\pi abc}{3}.$$

Setzt man hier statt a^2, b^2, c^2: $\frac{ab}{c}$, $\frac{ac}{b}$, $\frac{bc}{a}$; so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta + c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta} \\ = \frac{\pi bc}{4a} + \frac{a^2\pi}{4\sqrt{a^2-c^2}}\left[\frac{c^2}{a^2}F(\varepsilon,\eta) + \frac{a^2-c^2}{a^2}E(\varepsilon,\eta)\right],\end{array}\right\} \quad (10)$$

wenn ε denselben Werth behält und $\eta^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$ ist.

Setzt man das Integral (10) $= P$, so findet man leicht, dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha\partial\alpha\partial\beta}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta + c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}}$$

$$= \frac{1}{a}\frac{\partial P}{\partial a} + \frac{1}{b}\frac{\partial P}{\partial b} + \frac{1}{c}\frac{\partial P}{\partial c},$$

und wenn man beachtet, dass, vorausgesetzt ε, η seien Funktionen von r:

$$\frac{\partial . F(\varepsilon,\eta)}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2\sin^2\varepsilon}}\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}$$

$$+ \left[\frac{E(\varepsilon,\eta) - (1-\eta^2)F(\varepsilon,\eta)}{\eta(1-\eta^2)} - \frac{\eta\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{(1-\eta^2)\sqrt{1-\eta^2\sin^2\varepsilon}}\right]\frac{\partial\eta}{\partial r},$$

$$\frac{\partial . E(\varepsilon,\eta)}{\partial r} = \sqrt{1-\eta^2\sin^2\varepsilon}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial r} - \frac{F(\varepsilon,\eta) - E(\varepsilon,\eta)}{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial r};$$

so findet man nach allen Zusammenziehungen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha\partial\alpha\partial\beta}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta + c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}} = \frac{\pi F(\varepsilon,\eta)}{2\sqrt{a^2-c^2}}. \quad (11)$$

Setzt man nun alle Werthe, so erhält man aus (7) als Kubikinhalt des fraglichen Körpers:

(12)

$$\frac{8abc}{3}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi h F(\varepsilon,\eta)}{2\sqrt{a^2-c^2}} + \frac{3\pi h^2}{2b\sqrt{a^2-c^2}}F\left(\varepsilon, \sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}}\right) + \frac{h^3\pi}{2abc}\right]$$

$$= \frac{4abc\pi}{3}\left[1 + \frac{3h}{\sqrt{a^2-c^2}}F\left(\varepsilon, \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\right) + \frac{3h^2}{b\sqrt{a^2-c^2}}F\left(\varepsilon, \sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}}\right) + \frac{h^3}{abc}\right],$$

worin $\cos\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Man kann übrigens die Formel (11) auch unmittelbar in folgender Weise ableiten. Man setze in (4):

$$x = r\sin\alpha\sin\beta,$$
$$y = r\sin\alpha\cos\beta,$$
$$z = r\cos\alpha;$$

so ist

$$r^2\left(\frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\alpha}{c^2}\right)(r-h)^2=r^2,$$

$$r=h+\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta+a^2c^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+a^2b^2\cos^2\alpha}}.$$

Wendet man die Formeln (5) und (6) an, so ergiebt sich

$$\iiint\partial x\,\partial y\,\partial z=\tfrac{1}{3}\iint r^3\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta;$$

also ist der ganze Kubikinhalt:

$$\frac{8}{3}\left\{h^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta\right.$$
$$+3h^2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{\sqrt{b^2c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta+a^2c^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+a^2b^2\cos^2\alpha}}$$
$$+3ha^2b^2c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{b^2c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta+a^2c^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+a^2b^2\cos^2\alpha}$$
$$\left.+a^3b^3c^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{(b^2c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta+a^2c^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+a^2b^2\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem (7), so folgt daraus:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{\sqrt{b^2c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta+a^2c^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+a^2b^2\cos^2\alpha}}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$
$$=\frac{\pi}{2b\sqrt{a^2-c^2}}F\left(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}}\right).$$

Setzt man hier wieder statt a^2, b^2, c^2: $\frac{ab}{c}$, $\frac{ac}{b}$, $\frac{bc}{a}$; so erhält man unmittelbar die Formel (11).

Zugleich ergiebt sich aus dieser Vergleichung:

(13)

$$abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{a^2b^2\cos^2\alpha+a^2c^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+b^2c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}=\frac{\pi F(\varepsilon,\eta)}{2\sqrt{a^2-c^2}},$$

aus welcher Formel, wenn man sie als bekannt annimmt, durch die obigen Umformungen wieder die Formel (9) folgen würde.

§. 2.

Die Gleichungen der Normale in dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ des Ellipsoides (1) sind:

$$x - x_1 = \frac{c^2 x_1}{a^2 z_1}(z - z_1),$$
$$y - y_1 = \frac{c^2 y_1}{b^2 z_1}(z - z_1).$$

Man verlängere nun diese Normale (nach aussen) um die Länge h, so sind die Koordinaten des Endpunktes der Verlängerung, wie man leicht findet:

$$x = x_1 + \frac{b^2 c^2 h x_1}{\sqrt{b^4 c^4 x_1^2 + a^4 c^4 y_1^2 + a^4 b^4 z_1^2}},$$
$$y = y_1 + \frac{a^2 c^2 h y_1}{\sqrt{b^4 c^4 x_1^2 + a^4 c^4 y_1^2 + a^4 b^4 z_1^2}},$$
$$z = z_1 + \frac{a^2 b^2 h z_1}{\sqrt{b^4 c^4 x_1^2 + a^4 c^4 y_1^2 + a^4 b^4 z_1^2}}.$$

Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen und der Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1$$

die Grössen x_1, y_1, z_1, so erhält man die Gleichung derjenigen Fläche, die durch die Endpunkte aller in der angegebenen Weise verlängerten Normalen geht.

Setzt man

$$x_1 = ra^2 \cos\alpha, \quad y_1 = rb^2 \sin\alpha\cos\beta, \quad z_1 = rc^2 \sin\alpha\sin\beta;$$

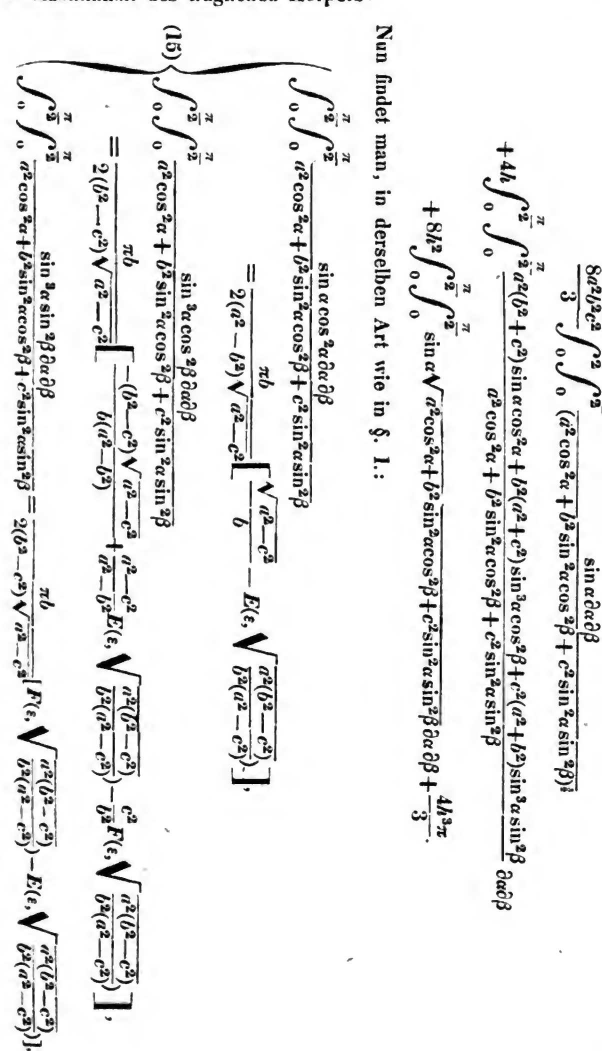
so erhält man als Gleichungen, welche die erwähnte Fläche ausdrücken können:

$$\left.\begin{aligned} x &= (h + ra^2)\cos\alpha, \\ y &= (h + rb^2)\sin\alpha\cos\beta, \\ z &= (h + rc^2)\sin\alpha\sin\beta, \\ r^2 &= \frac{1}{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta + c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Suchen wir nun den Kubikinhalt des von dieser Fläche umschlossenen Körpers. Die Umbildung des dreifachen Integrals $\iiint \partial x \partial y \partial z$ giebt hier:

$$\begin{aligned}\iiint [&c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta(ra^2+h)(rb^2+h) + a^2\cos^2\alpha\sin^2\beta(rb^2+h)(rc^2+h) \\ &+ b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta(ra^2+h)(rc^2+h) \\ &+ a^2\cos^2\alpha\cos^2\beta(rb^2+h)(rc^2+h)]\,\partial r\,\partial\alpha\,\partial\beta\sin\alpha.\end{aligned}$$

Die Gränzen von α und β sind, wenn man den achten Theil des fraglichen Körpers ausdrücken will, 0 und $\frac{\pi}{2}$. Nimmt man die Gränzen von r gleich 0 und r, so ist offenbar der achte Theil einer Kugel vom Halbmesser h, d. h. $\frac{h^3\pi}{6}$, noch beizufügen. Also ist der Kubikinhalt des fraglichen Körpers:



$$\frac{8a^2b^2c^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+4h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2(b^2+c^2)\sin\alpha\cos^2\alpha+b^2(a^2+c^2)\sin^3\alpha\cos^2\beta+c^2(a^2+b^2)\sin^3\alpha\sin^2\beta}{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}\,\partial\alpha\,\partial\beta$$

$$+8h^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}\,\partial\alpha\,\partial\beta+\frac{4h^3\pi}{3}.$$

Nun findet man, in derselben Art wie in §. 1.:

(15)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}=\frac{\pi b}{2(a^2-b^2)\sqrt{a^2-c^2}}\left[\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{b}-E\left(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}}\right)\right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\alpha\cos^2\beta\,\partial\alpha\,\partial\beta}{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}=\frac{\pi b}{2(b^2-c^2)\sqrt{a^2-c^2}}\left[\frac{-(b^2-c^2)\sqrt{a^2-c^2}}{b(a^2-b^2)}+\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}E\left(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}}\right)-\frac{c^2}{b^2}F\left(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}}\right)\right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\alpha\sin^2\beta\,\partial\alpha\,\partial\beta}{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}=\frac{\pi b}{2(b^2-c^2)\sqrt{a^2-c^2}}\left[F\left(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}}\right)-E\left(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}}\right)\right].$$

während schon oben gefunden wurde:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\pi}{2abc},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}\,\partial\alpha\,\partial\beta$$

$$=\frac{\pi bc}{4a}+\frac{a^2\pi}{4\sqrt{a^2-c^2}}\left[\frac{c^2}{a^2}F\left(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\right)+\frac{a^2-c^2}{a^2}E\left(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\right)\right]$$

Setzt man alle diese Werthe, so ergiebt sich für den Kubikinhalt des Körpers:

$$(16)\quad \frac{4abc\pi}{3}$$

$$+2h\pi\left[c^2+\frac{bc^2}{\sqrt{a^2-c^2}}F\left(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}}\right)+b\sqrt{a^2-c^2}\,E\left(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}}\right)\right]$$

$$+2\pi h^2\left[\frac{bc}{a}+\frac{c^2}{\sqrt{a^2-c^2}}F\left(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\right)+\sqrt{a^2-c^2}\,E\left(\varepsilon,\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\right)\right]$$

$$+\frac{4h^3\pi}{3},$$

worin ebenfalls $\cos\varepsilon=\frac{c}{a}$.

§. 3.

Sei abermals $(x_1\,y_1\,z_1)$ ein Punkt des Ellipsoides (1). Die Gleichungen des Radius vector in diesem Punkte sind

$$x=\frac{x_1}{z_1}z,\quad y=\frac{y_1}{z_1}z.$$

Die Gleichung der auf dem Radius vector in seinem Endpunkte senkrechten Ebene ist:

$$x_1x+y_1y+z_1z=x_1^2+y_1^2+z_1^2. \qquad (17)$$

Die Gleichungen der Normale in demselben Punkte sind:

$$x-x_1=\frac{c^2x_1}{a^2z_1}(z-z_1),\quad y-y_1=\frac{c^2y_1}{b^2z_1}(z-z_1).$$

Die durch den Mittelpunkt gehende, mit der Normale parallele Linie hat zu Gleichungen:

$$x=\frac{c^2x_1}{a^2z_1}z,\quad y=\frac{c^2y_1}{b^2z_1}z.$$

Diese Linie schneidet die Ebene (17) in einem Punkte, dessen Koordinaten sind:

$$x=\frac{b^2c^2x_1(x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2)}{b^2c^2x_1{}^2+a^2c^2y_1{}^2+a^2b^2z_1{}^2}=\frac{x_1(x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2)}{a^2},$$

$$y=\frac{a^2c^2y_1(x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2)}{b^2c^2x_1{}^2+a^2c^2y_1{}^2+a^2b^2z_1{}^2}=\frac{y_1(x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2)}{b^2},$$

$$z=\frac{a^2b^2z_1(x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2)}{b^2c^2x_1{}^2+a^2c^2y_1{}^2+a^2b^2z_1{}^2}=\frac{z_1(x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2)}{c^2}.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen und

$$\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}+\frac{z_1{}^2}{c^2}=1$$

die Grössen x_1, y_1, z_1, so erhält man die Gleichung der Fläche, die durch alle ähnlichen Punkte geht. Zu diesem Ende setzen wir:

$$x_1=r\cos\varphi,\quad y_1=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z_1=r\sin\varphi\sin\psi;$$

so ist:

$$x=\frac{r^3\cos\varphi}{a^2},\quad y=\frac{r^3\sin\varphi\cos\psi}{b^2},\quad z=\frac{r^3\sin\varphi\sin\psi}{c^2};$$

$$r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{c^2}\right)=1,$$

$$\frac{\cos^2\varphi}{a^2}=\frac{a^2x^2}{r^6},\quad \frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^2}=\frac{b^2y^2}{r^6},\quad \frac{\sin^2\varphi\sin^2\psi}{c^2}=\frac{c^2z^2}{r^6};$$

$$r^6=a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2;$$

also

$$\sqrt[3]{a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2}\left\{\frac{a^2x^2}{a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2}+\frac{b^2y^2}{a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2}+\frac{c^2z^2}{a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2}\right\}=1,$$

d. h. die Gleichung der verlangten Fläche ist:

$$(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^3=(a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2)^2. \qquad (18)$$

Um den Kubikinhalt zu finden, setzen wir

$$x=\frac{r}{a}\cos\alpha,\quad y=\frac{r}{b}\sin\alpha\cos\beta,\quad z=\frac{r}{c}\sin\alpha\sin\beta;$$

so findet sich für den körperlichen Inhalt:

$$\frac{8}{3abc}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)^3\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta.$$

Entwickelt man die dritte Potenz und integrirt, wie diess dann leicht möglich ist, so findet man für den Kubikinhalt:

(19)

$$\frac{4\pi}{3abc}\left[\frac{a^6+b^6+c^6}{7}+\frac{3(a^4b^2+a^4c^2+a^2b^4+a^2c^4+b^4c^2+b^2c^4)+2a^2b^2c^2}{35}\right].$$

Hätte man gesetzt:

$$x=\frac{r}{a^2}\cos\alpha,\quad y=\frac{r}{b^2}\sin\alpha\cos\beta,\quad z=\frac{r}{c^2}\sin\alpha\sin\beta;$$

so hätte man für den Inhalt erhalten:

$$\frac{8}{3a^2b^2c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

also ist

(20)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\pi abc}{2}\left[\frac{a^6+b^6+c^6}{7}+\frac{3(a^4b^2+a^4c^2+a^2b^4+a^2c^4+b^4c^2+b^2c^4)+2a^2b^2c^2}{35}\right].$$

Eben so erhielte man durch die Umformung $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha\cos\beta$, $z=r\sin\alpha\sin\beta$:

(21)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(a^4\cos^2\alpha+b^4\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^4\sin^2\alpha\sin^2\beta)^3}{(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)^{\frac{9}{2}}}\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta$$

$$=\frac{\pi}{70.abc}[5(a^6+b^6+c^6)+3(a^4b^2+a^4c^2+a^2b^4+a^2c^4+b^4c^2+b^2c^4)+2a^2b^2c^2].$$

Da die zweite Seite in (20) in Bezug auf a, b, c symmetrisch ist, d. h. sich nicht ändert, wenn man a, b, c mit c, b, a vertauscht, so kann man diese Vertauschung in der ersten Seite vornehmen, ohne dass der Werth sich ändert. Thut man dieses, und setzt dann statt a, b, c: $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a}$, so erhält man:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta+c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\pi}{2abc}\left\{\frac{1}{7}\left(\frac{1}{a^6}+\frac{1}{b^6}+\frac{1}{c^6}\right)+\frac{3}{35}\left(\frac{1}{a^4b^2}+\frac{1}{a^4c^2}+\frac{1}{a^2b^4}+\frac{1}{a^2c^4}+\frac{1}{b^4c^2}+\frac{1}{b^2c^4}\right)+\frac{2}{35}\cdot\frac{1}{a^2b^2c^2}\right\}.\quad(22)$$

Zugleich wollen wir bemerken, dass, wenn man an der vorliegenden Fläche jeden Radius vector um h nach aussen verlängert, die Gleichung der durch alle Endpunkte gehenden Fläche ist:

$$\left.\begin{array}{l}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-h)^2[a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2]^3 \\ \quad =(x^2+y^2+z^2)[a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2]^2.\end{array}\right\} \quad (23)$$

Die Kubatur des von dieser Fläche umschlossenen Körpers führt auf elliptische Funktionen, die sich, in ähnlicher Weise wie oben, leicht bestimmen lassen.

Diese Beispiele mögen genügen. Es lassen sich durch Umbildungen eine Anzahl interessanter Resultate ableiten, die bei anderer Gelegenheit zur Sprache kommen werden.

VII.

Unmittelbarer Beweis der Maclaurinschen Formel.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Man beweist, auf mehr oder minder mathematisch strengem Wege, dass, unter gewissen Bedingungen:

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1}x+\frac{\varphi''(0)}{1.2}x^2+\ldots. \quad (1)$$

Die bekannten Beweise kommen immer darauf hinaus, die Reihe des zweiten Gliedes aus $\varphi(x)$ zu bilden; keiner ist mir jedoch bekannt, der diese Reihe unmittelbar summirte. Diess allein scheint aber die unmittelbare Art des Beweises zu sein, da hier erst gewiss alle Bedingungen des Bestehens der Gleichung (1) zum Vorschein kommen müssen. Diese Aufgabe nun soll im Folgenden gelöst werden.

Angenommen die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1}x+\frac{\varphi''(0)}{1.2}x^2+\frac{\varphi'''(0)}{1.2.3}x^3+\ldots \text{ in inf.} \quad (2)$$

sei konvergent für bestimmte Werthe von x, so wird man für diese Werthe setzen können:

$$\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1}x+\frac{\varphi''(0)}{1.2}x^2+\frac{\varphi'''(0)}{1.2.3}x^3+\ldots.=X, \qquad (3)$$

wo X noch eine unbestimmte Funktion von x ist. Um dieselbe zu bestimmen, wollen wir die Reihe im ersten Gliede umgestalten. Zu diesem Ende setzen wir $\frac{x}{n}=\varepsilon$ und bezeichnen durch Vorsetzung des Zeichens $\mathfrak{L}$, dass n ins Unendliche wachsend, also ε ins Unendliche abnehmend gedacht werden müsse. Alsdann ist, wie man nach und nach leicht findet:

$$\varphi^{(r)}(0)=\mathfrak{L}\left(\frac{\varphi(r\varepsilon)-r\varphi(\overline{r-1}\varepsilon)+\frac{r(r-1)}{1.2}\varphi(\overline{r-2)}\,\varepsilon)-\ldots.(-1)^r\varphi(0)}{\varepsilon^r}\right),$$

was man übrigens auch mit Hülfe des Satzes, dass

$$r^r-r(r-1)^r+\frac{r(r-1)}{1.2}(r-2)^r-\ldots.(-1)^{r-1}r=1.2.3\ldots.r,$$

leicht unmittelbar nachweisen kann. Demnach ist

$$X=\mathfrak{L}\left\{\begin{array}{l}\varphi(0)-\frac{x}{\varepsilon}\frac{\varphi(0)}{1}+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\frac{\varphi(0)}{1.2}-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^3\frac{\varphi(0)}{1.2.3}+\ldots.\\ \qquad+\frac{x}{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\frac{\varphi(\varepsilon)}{1}+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^3\frac{\varphi(\varepsilon)}{1.2}-\ldots.\\ \qquad\qquad+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\frac{\varphi(2\varepsilon)}{1.2}-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^3\frac{\varphi(2\varepsilon)}{1.2.1}+\ldots.\\ \qquad\qquad\vdots\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\end{array}\right\},$$

in welcher Formel das allgemeine Glied offenbar

$$\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^r\frac{\varphi(r\varepsilon)}{1.2\ldots.r}-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{r+1}\frac{\varphi(r\varepsilon)}{1.2\ldots.r.1}+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{r+2}\frac{\varphi(r\varepsilon)}{1.2\ldots.r.1.2}$$

$$-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{r+3}\frac{\varphi(r\varepsilon)}{1.2\ldots.r.1.2.3}+\ldots.=\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^r\frac{e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\varphi(r\varepsilon)}{1.2\ldots.r}.$$

Demnach ist

$$X=\mathfrak{L}\left[e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\varphi(0)+\frac{x}{\varepsilon}\frac{e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{1}\varphi(\varepsilon)+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\frac{e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{1.2}\varphi(2\varepsilon)+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^3\frac{e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{1.2.3}\varphi(3\varepsilon)+\ldots.\right] \qquad (4)$$

$$=\mathfrak{L}\left[e^{-n}\varphi(0)+ne^{-n}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{n^2e^{-n}}{1.2}\varphi\left(\frac{2x}{n}\right)+\frac{n^3e^{-n}}{1.2.3}\varphi\left(\frac{3x}{n}\right)+\ldots.\right];$$

d. h. X kann als die Gränze betrachtet werden, der die Grösse

$$e^{-n}\varphi(0)+ne^{-n}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{n^2e^{-n}}{1.2}\varphi\left(\frac{2x}{n}\right)+\frac{n^3e^{-n}}{1.2.3}\varphi\left(\frac{3x}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n^n e^{-n}}{1.2\ldots n}\varphi(x)$$

mit unendlich wachsendem n sich nähert. Man setze nun $\varphi(x)=x$, so folgt aus (3) $X=x$, also ist

$$x=\mathfrak{L}\left[ne^{-n}\frac{x}{n}+\frac{n^2e^{-n}}{1.2}\cdot\frac{2x}{n}+\frac{n^3e^{-n}}{1.2.3}\cdot\frac{3x}{n}+\ldots \text{ in inf.}\right],$$

welche Reihe offenbar gegen das Glied $\frac{n^n e^{-n}}{1.2\ldots n}x$ strebt, so dass

$$x=\mathfrak{L}\left[\frac{ne^{-n}}{1}\cdot\frac{x}{n}+\frac{n^2e^{-n}}{1.2}\cdot\frac{2x}{n}+\frac{n^3e^{-n}}{1.2.3}\cdot\frac{3x}{n}+\ldots+\frac{n^n e^{-n}}{1.2\ldots n}x\right]. \quad (5)$$

Hieraus folgt zunächst, dass $\mathfrak{L}\left(\frac{n^n e^{-n}}{1.2\ldots n}\right)$ nothwendig endlich ist, da alle Glieder für $x>0$ positiv sind. Nun behaupte ich aber, dass $\mathfrak{L}\left(\frac{n^r e^{-n}}{1.2\ldots r}\right)=0$, so lange nicht $\mathfrak{L}\left(\frac{r}{n}\right)=1$ gesetzt werden kann. Denn sei $r=n-\alpha n$, wo $\alpha \begin{smallmatrix}>0\\<1\end{smallmatrix}$, so ist

$$\frac{n^r e^{-n}}{1.2\ldots r}=\frac{n^{n-\alpha n}e^{-n}}{1.2\ldots(n-\alpha n)}=\frac{n^n e^{-n}}{1.2\ldots n}\cdot\frac{(n-\alpha n+1)(n-\alpha n+2)\ldots n}{n^{\alpha n}},$$

$$\mathfrak{L}\left(\frac{n^r e^{-n}}{1\ldots r}\right)=\mathfrak{L}\left(\frac{n^n e^{-n}}{1\ldots n}\right)\cdot\mathfrak{L}\,\frac{(n-\alpha n+1)(n-\alpha n+2)\ldots n}{n^{\alpha n}}$$

$$=b\mathfrak{L}\left((1-\alpha+\frac{1}{n})(1-\alpha+\frac{2}{n})\ldots(1-\alpha+\frac{\alpha n}{n})\right), \text{ wenn } \mathfrak{L}\left(\frac{n^n e^{-n}}{1.2\ldots n}\right)=b.$$

Der letzte dieser Brüche ist 1, alle andern sind für $n=\infty$ kleiner als 1, so lange $\alpha \begin{smallmatrix}>0\\<1\end{smallmatrix}$, ihr Produkt ist somit Null. In diesem Produkte kommen nämlich zuerst eine beliebig grosse Anzahl Faktoren vor, die für ein unendliches n gleich $1-\alpha$ sind, und deren Einzelprodukt (z. B. $(1-\alpha)^r$) kleiner als jede noch so kleine Zahl werden kann *). Das Produkt der übrigen Faktoren ist nicht

---

*) Dass $(1-\alpha)^r$ kleiner als jede Zahl z. B. β werden kann, ist klar, denn sei

$$(1-\alpha)^m=\beta, \text{ also } m=\frac{\log\beta}{\log(1-\alpha)}, \ \alpha \begin{smallmatrix}>0\\<1\end{smallmatrix};$$

so ist

$$(1-\alpha)^{m+1}<\beta.$$

>1; das gesammte Produkt also kleiner als jede noch so kleine Zahl, d. h. $=0$. Also, da b endlich,

$$\mathfrak{L}\left(\frac{n^r e^{-n}}{1.2....r}\right)=0, \tag{6}$$

so lange $r<n$. Für ein endliches r ist der Satz ohnehin längst bewiesen.

Somit folgt aus (5)

$$x=\mathfrak{L}\left(\frac{n^n e^{-n}}{1.2....n}\right)x, \quad \text{also} \quad \mathfrak{L}\left(\frac{n^n e^{-n}}{1.2....n}\right)=1; \tag{7}$$

und aus (4), in Verbindung mit (6) und (7):

$$X=\mathfrak{L}\left(\frac{n^n e^{-n}}{1.2....n}\right).\varphi(x)=\varphi(x), \tag{8}$$

insofern keine der Grössen $\varphi(0)$, $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$, $\varphi\left(\frac{2x}{n}\right)$,....$\varphi(x)$ unendlich gross ist.

Man hat also folgenden Lehrsatz:

„Wenn die Reihe

$$\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1}x+\frac{\varphi''(0)}{1.2}x^2+\frac{\varphi'''(0)}{1.2.3}x^3+.... \tag{9}$$

konvergent ist, so ist die Summe derselben gleich $\varphi(x)$, vorausgesetzt, dass $\varphi(z)$ endlich sei von $z=0$ bis $z=x$." Diess ist der Maclaurinsche Satz.

Setzt man hier z statt x und sodann $\varphi(z)=f(x+z)$, so erhält man:

„Wenn die Reihe

$$f(x)+\frac{f'(x)}{1}z+\frac{f''(x)}{1.2}z^2+\frac{f'''(x)}{1.2.3}z^3+.... \tag{10}$$

konvergent ist, so ist ihre Summe gleich $f(x+z)$, vorausgesetzt dass $f(x+y)$ endlich sei von $y=0$ bis $y=z$." Diess ist der Taylorsche Satz.

Zur Begründung des Satzes wurde oben freilich der Satz angewendet, dass

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+....$$

Derselbe lässt sich aber leicht und ganz allgemein herleiten. Zugleich ist zu bemerken, dass in (9) und (10) x und z ganz beliebige reelle oder imaginäre Werthe haben können, wenn nur die angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

Setzt man also $r \geqq m+1$, je nachdem ob $m+1$ nicht eine ganze Zahl oder eine solche ist, so ist

$$(1-\alpha)^r<\beta.$$

VIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Theoreme über bestimmte Integrale.

1)

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx \,.\, \cos cx}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\left(\frac{e^{ca}+e^{-ca}}{2}\right)e^{-ab}.$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx \,.\, \cos cx}{a^2+x^2}\,x\,dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{ca}+e^{-ca}}{2}\right)e^{-ab}.$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx \,.\, \sin cx}{a^2+x^2}\,x\,dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{-ac}-e^{ac}}{2}\right)e^{-ab}.$$

In diesen Formeln muss b positiv und $> c$ sein, welches letztere auch negativ sein darf. a ist reell und positiv.

2)

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 bx}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\left(\frac{1+e^{-2ab}}{2}\right)$$

unter ähnlichen Bedingungen wie in 1).

3)

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,.\,\cos(cx)\,dx = \frac{a(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2-4b^2c^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,.\,\sin(cx)\,dx = \frac{(a^2+c^2-b^2)c}{(a^2+b^2+c^2)^2-4b^2c^2},$$

wenn a, b, c reell und a positiv ist.

4)

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\,.\,\sin(cx)\,dx = \frac{2abc}{(a^2+b^2+c^2)^2-4b^2c^2}$$

unter den gleichen Bedingungen wie in 3).

IX.

Miscellen.

Construction des Näherungswerthes $\frac{355}{113}$ der Zahl π.

Man zerlege sich $\frac{355}{113}$ in $3+\frac{16}{113}$; die Zahl 113, als eine Primzahl von der allgemeinen Form $4n+1$, setze man der Summe der Quadratzahlen 49 und 64 gleich, also

$$\frac{355}{113}=3+\frac{4^2}{7^2+8^2}.$$

Wenn man dann in Taf. II. Fig. 6. zwei Linien *AB*, *AC*, beide gleich dem Radius, senkrecht an einander setzt, auf der einen *AC* $\frac{1}{8}$ ihrer Länge $=CD$ abschneidet, *B* und *D* verbindet, *BA* in *E* halbirt und *BE* auf *BD* von *B* aus $=BF$ abträgt, darauf $FH \parallel CA$ zieht, ferner *DH* und endlich $FG \parallel DH$, so ist für $AC=AB=r=1$

$$BG=\frac{4^2}{7^2+8^2},$$

und man hat also an *BG* nur noch den dreifachen Radius anzutragen, um den Bruch $\frac{355}{113}$ linearisch darzustellen.

Es ist nämlich

$$\begin{array}{c} BF:BD=BH:BA \\ BF:BD=BG:BH \\ \hline BF^2:BD^2=BG:BA, \end{array}$$

$$\text{d. i. } \frac{r^2}{4}:\frac{(8r)^2+(7r)^2}{8^2}=BG:r$$

oder für $r=1$:

$$4^2:8^2+7^2=BG:1,$$

$$\text{folglich } BG=\frac{4^2}{8^2+7^2},$$

wie vorher behauptet wurde.

X.

Anwendung des barycentrischen Calculs auf die Bestimmung der grössten einem Vierseit eingeschriebenen und der kleinsten einem Viereck umschriebenen Ellipse.

Von

Herrn L. Schläfli,

Privatdocenten der Mathematik zu Bern.

Der Erfinder des barycentrischen Calculs unterscheidet zwischen einem eigentlichen und einem abgekürzten barycentrischen Calcul, und erklärt jenen als anwendbar zur Darstellung solcher Eigenschaften geometrischer Figuren, die für alle affinen Systeme zugleich gelten, während dieser es nur sei bei denjenigen noch allgemeinern Eigenschaften, die ins Gebiet der Collineationsverwandtschaft gehören. Da ich im Folgenden, je nachdem der Gegenstand die Freiheit der allgemeinen perspectivischen Beziehungen gestattet oder Beschränkung fordert, bald von der einen, bald von der andern Art der Rechnung Gebrauch machen werde, so finde ich für gut, mich gleich anfangs darüber auszusprechen.

Im Allgemeinen bezeichne ich mit x, y, z drei unter sich unabhängige lineare Functionen der rechtwinkligen Coordinaten eines Punkts in der Ebene und betrachte immer nur die zwei Verhältnisse der drei mit x, y, z bezeichneten Grössen, nie diese Grössen selbst, so dass in Beziehung auf dieselben nur homogene Gleichungen vorkommen können. Sind die genannten zwei Verhältnisse für einen Punkt gegeben, so sind dadurch auch die Verhältnisse der rechtwinkligen Coordinaten desselben Punkts zur Längeneinheit gegeben und somit der Punkt selbst bestimmt. Alsdann sollen die drei Grössen, zwischen denen jene zwei Verhältnisse bestehen, die allgemeinen Coordinaten des fraglichen Punktes heissen, während die durch die Gleichungen $x=0$, $y=0$, $z=0$ dargestellten Geraden, welche hier die Stelle der Coordinatenaxen vertreten, den von Herrn Möbius gebrauchten Namen der Fundamentallinien behalten. Obgleich so scheinbar eine Dreizahl von Coordinaten zur Bestimmung eines Punktes in der Ebene angewandt wird, so hängt diese Bestimmung doch wesentlich nur

von einer Zweizahl von Verhältnissen ab, weil immer nur die relativen, nie die absoluten Werthe jener drei Coordinaten in Betracht kommen. Sind die Fundamentallinien durch drei in rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückte Gleichungen gegeben, so sind dadurch die linearen Functionen x, y, z der genannten Coordinaten noch nicht vollständig bestimmt, sondern jede derselben kann noch einen beliebigen constanten Factor enthalten; man wird daher nach Belieben über die zwei zwischen denselben bestehenden Verhältnisse, z. B. so, dass irgend ein von den Fundamentalpunkten verschiedener in derselben Ebene gegebener vierter Punkt durch die zwei Gleichungen $x=y=z$ bestimmt werde, verfügen dürfen.

Wird insbesondere über jene an den linearen Functionen x, y, z haftenden Factoren so verfügt, dass die Gleichung $x+y+z=0$ die unendlich weit entfernte Gerade darstellt, d. h. dass in dem reducirten Ausdrucke von $x+y+z$ die Coefficienten der rechtwinkligen Coordinaten in Vergleich mit demjenigen der Längeneinheit verschwindend klein werden, so sollen alsdann die Grössen x, y, z barycentrische Coordinaten heissen. Denn der durch dieselben bestimmte Punkt wird dann zum Schwerpunkte dreier mit x, y, z proportionaler, in den Fundamentalpunkten befindlicher Massen. Zieht man aus dem fraglichen Punkte drei Gerade nach den Fundamentalpunkten, so theilen dieselben das Fundamental-Dreieck in algebraischem Sinne in drei Dreiecke, von denen sich leicht zeigen lässt, dass ihre Flächenräume jenen Massen oder den barycentrischen Coordinaten x, y, z proportional sind.

Die Aufgabe, deren Lösung uns zunächst beschäftigen wird, ist, den Inhalt einer Ellipse durch die Coefficienten ihrer in barycentrischen Coordinaten gegebenen Gleichung auszudrücken, wenn die Abmessungen des Fundamentaldreiecks bekannt sind. Der Gang, den wir hierbei befolgen, ist dieser: Zuerst suchen wir den Ausdruck für die senkrechte Projection der Entfernung zweier durch ihre barycentrischen Coordinaten gegebener Punkte auf eine beliebige Gerade, woraus sich im Besondern der Ausdruck für die Projection eines Halbmessers der Ellipse ergiebt. Dann bestimmen wir den Inhalt eines von zwei conjugirten Halbmessern gebildeten Parallelogramms, und ergreifen diesen Anlass, um auch die Summe der Quadrate der homologen Projectionen zweier conjugirten Halbmesser auszumitteln. Indem wir hiedurch zur Summe der Quadrate zweier conjugirter Halbmesser gelangen und dann mit der Hälfte derselben in jenes Parallelogramm dividiren, so bekommen wir auch den Sinus des Winkels der zwei gleichen conjugirten Halbmesser der Ellipse.

Ausdruck für die Projection der Entfernung zweier Punkte auf eine beliebige Abscissenaxe. Die zwei Punkte P, P', deren Entfernung PP' projicirt werden soll, seien durch ihre barycentrischen Coordinaten x, y, z; x', y', z' gegeben, und um die Rechnung abzukürzen, wollen wir $x+y+z=x'+y'+z'=1$ annehmen. Wenn wir dann mit A, B, C, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, p die Abscissen der drei Fundamentalpunkte, die Projectionen der Seiten des Fundamentaldreiecks und der Entfernung PP' bezeichnen, so sind die Abscissen der Punkte P, P' durch

$$xA+yB+zC \text{ und } x'A+y'B+z'C$$

und der Unterschied derselben oder die Projection der Entfernung PP' durch

$$p=(x'-x)A+(y'-y)B+(z'-z)C$$

ausgedrückt. Da aber in Folge der getroffenen Annahme $\Sigma(x'-x)=0$ und überdiess $C-B=\mathfrak{a}$, $A-C=\mathfrak{b}$, $B-A=\mathfrak{c}$ ist, so haben wir

$$p=\mathfrak{c}(y'-y)-\mathfrak{b}(z'-z).$$

Setzen wir nun

$$yz'-y'z=\xi,\quad zx'-z'x=v,\quad xy'-x'y=\zeta;$$

so wird

$$x'-x=x'(x+y+z)-x(x'+y'+z')=v-\zeta,\ \text{u. s. f.},$$

also

$$p=\mathfrak{c}(\zeta-\xi)-\mathfrak{b}(\xi-v)=\mathfrak{b}v+\mathfrak{c}\zeta-(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\xi=\mathfrak{a}\xi+\mathfrak{b}v+\mathfrak{c}\zeta,$$

oder wenn wir die Bedingung $x+y+z=x'+y'+z'=1$ wieder aufheben,

$$p=\frac{\mathfrak{a}(yz'-y'z)+\mathfrak{b}(zx'-z'x)+\mathfrak{c}(xy'-x'y)}{(x+y+z)(x'+y'+z')}. \qquad (1)$$

Ausdruck für die Projection eines Halbmessers der Ellipse.

Irgend ein in der Ebene des Fundamentaldreiecks liegender Kegelschnitt sei durch die Gleichung

$$Ax^2+By^2+Cz^2++2Dyz+2Ezx+2Fxy=0 \qquad (2)$$

dargestellt, und überdiess sei

$$\left.\begin{aligned} X&=Ax+Fy+Ez,\\ Y&=Fx+By+Dz,\\ Z&=Ex+Dy+Cz. \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Wenn wir dann

$$\left.\begin{aligned} A'&=BC-D^2, & D'&=EF-AD,\\ B'&=CA-E^2, & E'&=FD-BE,\\ C'&=AB-F^2, & F'&=DE-CF,\\ \Delta&=ABC+2DEF-AD^2-BE^2-CF^2=AA'+FF'+EE'=\text{etc.} \end{aligned}\right\} (4)$$

setzen, so haben wir

$$\left.\begin{aligned} \Delta x&=A'X+F'Y+E'Z,\\ \Delta y&=F'X+B'Y+D'Z,\\ \Delta z&=E'X+D'Y+C'Z. \end{aligned}\right\} (5)$$

Liegt der Punkt (xyz) auf der Curve, so ist für denselben

$$Xx+Yy+Zz=0,$$

und ist $(x'y'z')$ irgend ein anderer Punkt auf der durch jenen gezogenen Tangente, so ist

$$Xx' + Yy' + Zz' = 0$$

die Gleichung der Tangente. Ist aber von den beiden Punkten (xyz) und $(x'y'z')$ weiter nichts gesagt, als dass ihre Coordinaten der Gleichung $Xx' + Yy + Zz' = 0$ genügen, so zeigt diese an, dass in Beziehung auf den gegebenen Kegelschnitt jeder der beiden Punkte auf der Polare des andern liege. Nun ist der Mittelpunkt der Curve der Pol der unendlich weit entfernten Geraden $x' + y' + z' = 0$; folglich ist für denselben $X = Y = Z$, oder, wenn fortan x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Mittelpunkts bezeichnen, wegen (5)

$$x_0 : y_0 : z_0 = (A' + F' + E') : (F' + B' + D') : (E' + D' + C'). \quad (6)$$

Es seien f, g, h die Coordinaten eines unendlich weit entfernten Punktes und daher $f + g + h = 0$, so ist seine Polare ein Durchmesser, dem die Gleichung

$$fX + gY + hZ = lx + my + nz = 0 \quad (7)$$

zukömmt, wo l, m, n dieselben linearen Functionen von f, g, h sein sollen, welche in Beziehung auf x, y, z mit X, Y, Z bezeichnet worden sind. Da für den Endpunkt des Halbmessers die zwei Gleichungen

$$fX + gY + hZ = 0$$

und

$$xX + yY + zZ = 0$$

zugleich stattfinden, so kann man

$$X = (gz - hy)\,\omega, \quad Y = (hx - fz)\,\omega, \quad Z = (fy - gx)\,\omega \quad (7)$$

setzen, wo ω eine neue Unbekannte bezeichnet. Substituirt man diese Ausdrücke in (3), so erhält man

$$\left.\begin{aligned} Ax + (F + h\omega)y + (E - g\omega)z &= 0, \\ (F - h\omega)x + By + (D + f\omega)z &= 0, \\ (E + g\omega)x + (D - f\omega)y + Cz &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

und, wenn man x, y, z aus diesen drei Gleichungen eliminirt,

$$\varDelta + (fl + gm + hn)\,\omega^2 = 0. \quad (9)$$

Die Werthe von x, y, z sind nun in Function von ω zu bestimmen, so dass sie nicht nur den Gleichungen (8), sondern auch der Gleichung $x + y + z = 1$ genügen. Dieses kann auf folgende Weise geschehen.

Aus den identischen Gleichungen

$$F'h - E'g = Em - Fn, \quad B'h - D'g = An - El, \quad D'h - C'g = Fl - Am$$

ergiebt sich durch Addition

$$h(F' + B' + D') - g(E' + D' + C') = -\{A(m - n) + F(n - l) + E(l - m)\}. \quad (10)$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit ω und addirt sie zur Gleichung

$$A(A' + F' + E') + F(F' + B' + D') + E(E' + D' + C') = \varDelta, \quad (11)$$

so ergiebt sich

$$A(A'+F'+E')+(F+h\omega)(F'+B'+D')+(E-g\omega)(E'+D'+C')$$
$$=\Delta-\omega\{A(m-n)+F(n-l)+E(l-m)\}.$$

Wegen (9) ist aber

$$\Delta=-(fl+gm+hn)\,\omega^2=\{-h(n-l)+g(l-m)\}\,\omega^2;$$

folglich wird die rechte Seite der vorigen Gleichung zu

$$-\omega\{A(m-n)+(F+h\omega)(n-l)+(E-g\omega)(l-m)\}.$$

Dieselbe Gleichung verwandelt sich daher in

$$A(A'+F'+E'+(m-n)\,\omega)+(F+h\omega)\,(F'+B'+D'+(n-l)\,\omega)$$
$$+(E-g\omega)(E'+D'+C'+(l-m)\,\omega)=0. \qquad (12)$$

Zwei ähnliche Gleichungen fliessen aus dieser durch den Fortschritt von x zu y und z. Vergleicht man alle drei Gleichungen (12) mit den Gleichungen (9) und berücksichtigt die Bedingung $x+y+z=1$, so ergeben sich, indem man $A'+B'+C'+2D'+2E'+2F'=H$ setzt,

$$x=\frac{A'+F'+E'+(m-n)\,\omega}{H},\quad y=\frac{F'+B'+D'+(n-l)\,\omega}{H},$$
$$z=\frac{E'+D'+C'+(l-m)\,\omega}{H}$$

als barycentrische Coordinaten des Endpunkts des Halbmessers. Nimmt man für diejenigen des Mittelpunkts auch die Bedingung $x_0+y_0+z_0=1$ an, so sind sie nach (6)

$$x_0=\frac{A'+F'+E'}{H},\quad y_0=\frac{F'+B'+D'}{H},\quad z_0=\frac{E'+D'+C'}{H}.$$

Setzt man nun

$$y_0z-yz_0=\xi,\quad z_0x-zx_0=v,\quad x_0y-xy_0=\zeta;$$

so ist

$$\xi=\{(l-m)y_0-(n-l)z_0\}\,\frac{\omega}{H}=\frac{l(x_0+y_0+z_0)-(lx_0+my_0+nz_0)}{H}\,\omega.$$

Weil aber der Mittelpunkt auf dem betrachteten Durchmesser liegt, so ist

$$lx_0+my_0+nz_0,$$

und überdiess ist

$$x_0+y_0+z_0=1;$$

folglich

$$\xi=\frac{l\omega}{H},\quad v=\frac{m\omega}{H},\quad \zeta=\frac{n\omega}{H}; \qquad (13)$$

also ist nach (1) die Projection des betrachteten Halbmessers R auf die Abscissenaxe

$$p=\frac{al+bm+cn}{H}\omega. \qquad (14)$$

Wenn nun für den conjugirten Halbmesser f, g, h in f', g', h' übergehen, so sollen gleichzeitig l, m, n, x, y, z, ξ, v, ζ, ω, R, p in l', m', n', x', y', z', ξ', v', ζ', ω', R', p' übergehen. Dann drückt die Relation

$$fl'+gm'+hn'=f'l+g'm+h'n=0 \qquad (15)$$

das Conjugirtsein beider Halbmesser aus, und es ist nach (9) und (14)

$$\omega'^2=-\frac{\Delta}{f'l'+g'm'+h'n'}, \quad p'=\frac{al'+bm'+cn'}{H}\omega'.$$

Ehe wir aus diesen Ausdrücken Relationen zwischen den beiden conjugirten Halbmessern ableiten können, müssen wir die Werthe von

$$\Sigma fl. \ \Sigma f'l', \ l^2\Sigma f'l'+l'^2\Sigma fl, \ mn\Sigma f'l'+m'n'\Sigma fl$$

ausmitteln. Zunächst folgt aus den Bedingungen $f+g+h=0$, $f'+g'+h'=0$,

$$gh'-g'h=hf'-h'f=fg'-f'g=k.$$

Nun ist die Determinante der vier Grössen

$$\begin{matrix}\Sigma fl, & \Sigma fl' \\ \Sigma f'l, & \Sigma f'l'\end{matrix}$$

identisch gleich mit

$$\Sigma(gh'-g'h)(mn'-m'n)=k.\ \Sigma(mn'-m'n);$$

also ist mit Rücksicht auf (15)

$$\Sigma fl.\Sigma f'l'=k.\Sigma(mn'-m'n).$$

Ferner hat man die identische Gleichung

$$mn'-m'n=A'(gh'-g'h)+F'(hf'-h'f)+E'(fg'-f'g);$$

also ist endlich

$$\Sigma fl.\Sigma f'l'=k^2.H. \qquad (16)$$

Wenn man dem zweiten zu verwandelnden Ausdruck,

$$l^2\Sigma f'l'+l'^2\Sigma fl,$$

die der Null gleiche Grösse

$$-ll'\Sigma f'l-ll'\Sigma fl'$$

beifügt, so wird er

$$(lm' - l'm)(g'l - gl') + (nl' - n'l)(hl' - h'l).$$

Es ist aber

$$lm' - l'm = k(E' + D' + C'),\quad nl' - n'l = k(F' + B' + D'),$$
$$g'l - gl' = (A - E)k,\quad hl' - h'l = (A - F)k;$$

folglich mit Rücksicht auf (11)

$$l^2 \Sigma f'l' + l'^2 \Sigma fl = k^2 (AH - \Delta). \tag{17}$$

Zum dritten zu verwandelnden Ausdruck,

$$mn\Sigma f'l' + m'n' \Sigma fl,$$

addire man

$$- m'n\Sigma f'l - mn' \Sigma fl' = 0,$$

so verändert sich derselbe in

$$(fn' - f'n)(lm' - l'm) + (h'n - hn')(mn' - m'n)$$
$$= \{(D - C)(E' + D' + C') + (D - E)(A' + F' + E')\} k^2,$$

also ist endlich

$$mn\Sigma f'l' + m'n' \Sigma fl = k^2 (DH - \Delta). \tag{18}$$

Die Relationen (16), (17), (18) sollen uns jetzt zur Reduction der Ausdrücke von $pq' - p'q$ und $p^2 + p'^2$ dienen, wo q, q' die Projectionen der conjugirten Halbmesser auf die Ordinatenaxe bezeichnen.

Das von den conjugirten Halbmessern R, R' gebildete Parallelogramm hat $pq' - p'q$ zum Inhalt. Wenn nun $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ die Projectionen der Seiten des Fundamentaldreiecks auf die Ordinatenaxe sind, so ist nach (14)

$$pq' - p'q = \frac{\Sigma \mathfrak{a}l . \Sigma \mathfrak{a}'l' - \Sigma \mathfrak{a}l' . \Sigma \mathfrak{a}'l}{H^2}\, \omega'$$
$$= \frac{\Sigma (\mathfrak{b}\mathfrak{c}' - \mathfrak{b}'\mathfrak{c})(mn' - m'n)}{H^2} . \frac{\Delta}{\sqrt{\Sigma fl . \Sigma f'l'}}.$$

Bezeichnen wir den Inhalt des Fundamentaldreiecks mit J, so ist

$$\mathfrak{b}\mathfrak{c}' - \mathfrak{b}'\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\mathfrak{a}' - \mathfrak{c}'\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}'\mathfrak{b} = 2J;$$

und wenn wir für $mn' - m'n$, u. s. f. und für $\Sigma fl . \Sigma f'l'$ die früher gefundenen Werthe substituiren, so bekommen wir als Inhalt des von zweien conjugirten Halbmessern gebildeten Parallelogramms

$$pq' - p'q = 2J . \frac{\Delta}{H^2}. \tag{19}$$

Da dieser Ausdruck von f, g, h, f', g', h' frei ist, so fliesst daraus der bekannte Satz, dass der Inhalt des von zwei conjugirten Halbmessern gebildeten Parallelogramms von der Lage derselben unabhängig, mithin stets dem Producte der beiden halben Hauptaxen gleich ist. Zugleich sehen wir hieraus, dass die Grösse H positiv, negativ oder null ist, je nachdem die durch (2) dargestellte Curve eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist. Da der Inhalt der Ellipse dem πfachen des genannten Products gleich ist, so haben wir, indem Δ, H durch ihre vollständigen Ausdrücke ersetzt werden, folgende Formel:

Wenn in Beziehung auf ein Fundamentaldreieck vom Inhalt J einer beliebigen in der Ebene desselben befindlichen Ellipse die in barycentrischen Coordinaten ausgedrückte Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 0$$

zukömmt, so hat der Inhalt jener Ellipse den Werth

$$\pi . 2J . \frac{ABC + 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2}{\left\{ \begin{matrix} BC + CA + AB - D^2 - E^2 - F^2 \\ + 2EF + 2FD + 2DE - 2AD - 2BE - 2CF \end{matrix} \right\}^{\frac{3}{2}}}$$

Das zum Beweise dieser Formel zubereitete Material möge uns nun auch zur Berechnung der Summe der Quadrate der homologen Projectionen zweier conjugirter Halbmesser dienen. Die Gleichungen (9) und (14) geben unmittelbar

$$p^2 + p'^2 = \frac{(\Sigma \mathfrak{a} l)^2 \Sigma f' l' + (\Sigma \mathfrak{a} l')^2 \Sigma f l}{\Sigma f l . \Sigma f' l'} . \frac{-\Delta}{H^2},$$

und mit Benutzung der Relationen (16), (17), (18)

$$p^2 + p'^2 = \left\{ \Sigma A \mathfrak{a}^2 + 2 \Sigma D \mathfrak{b}\mathfrak{c} - \frac{\Delta(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})^2}{H} \right\} . \frac{-\Delta}{H^2}.$$

Weil aber die Projection des Umfangs einer geschlossenen Figur null ist, so ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = 0$; es ergiebt sich demnach:

$$p^2 + p'^2 = -\Delta . \frac{A\mathfrak{a}^2 + B\mathfrak{b}^2 + C\mathfrak{c}^2 + 2D\mathfrak{b}\mathfrak{c} + 2E\mathfrak{c}\mathfrak{a} + 2F\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{H^2},$$

was den bekannten Satz ausdrückt, dass die Summe der Quadrate der homologen Projectionen zweier conjugirter Halbmesser eines Kegelschnitts constant bleibt, welche Lage die conjugirten Halbmesser auch annehmen mögen.

Werden die Seiten und Winkel des Fundamentaldreiecks resp. mit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ bezeichnet, so ist

$$\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}'^2 = a^2, \text{ etc. } \quad \mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' = -bc \cos\alpha, \text{ etc.};$$

also ist

$$R^2+R'^2=p^2+q^2+p'^2+q'^2=-\varDelta\,\frac{\Sigma Aa^2-2\Sigma Dbc\cos\alpha}{H^2},$$

oder auch, da $2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2$ ist,

$$R^2+R'^2=\varDelta.\frac{a^2(E+F-A-D)+b^2(F+D-B-E)+c^2(D+E-C-F)}{H^2}.$$

Bezeichnet endlich V den Winkel, den die beiden gleichen conjugirten Halbmesser einschliessen, so ist

$$\sin V=\frac{pq'-p'q}{\frac{1}{2}(R^2+R'^2)},$$

und demnach

$$\sin^2 V=\frac{4J.\sqrt{H}}{\Sigma a^2(E+F-A-D)}. \tag{20}$$

Ueber besondere Formen der allgemeinen Gleichung eines Kegelschnitts, welche gewissen Lagen desselben gegen das Fundamentaldreieck entsprechen.

Soll der Kegelschnitt durch die Fundamentalpunkte gehen, so dürfen in seiner Gleichung die Glieder in x^2, y^2, z^2 nicht vorkommen. Daher kann beim Gebrauche allgemeiner Coordinaten jeder dem Fundamentaldreieck umschriebene Kegelschnitt durch die Gleichung

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$$

dargestellt werden. Giebt man derselben die Form

$$\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}=0,$$

so zeigt diese an, dass derselbe Kegelschnitt dem Dreiseit $(y+z)(z+x)(x+y)=0$ eingeschrieben ist.

Soll der Kegelschnitt eine Fundamentallinie berühren, so muss für den Berührungspunkt zugleich $x=0$, $Y=0$, $Z=0$, also nach (5) $A'=BC-D^2=0$ sein. Soll der Kegelschnitt dem Fundamentaldreieck eingeschrieben sein, so muss daher $A'=B'=C'=0$ sein. Verfolgt man diess weiter, so findet man, dass jeder dem Fundamentaldreieck eingeschriebene Kegelschnitt durch die Gleichung

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=0$$

dargestellt wird, der man auch die Form

$$\frac{1}{-x+y+z}+\frac{1}{x-y+z}+\frac{1}{x+y-z}=0$$

geben kann, welche zeigt, dass der Kegelschnitt dem Dreieck $(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)=0$ umschrieben ist.

Die Polare des Fundamentalpunkts ($y=0, z=0$) hat $X=0$ zu ihrer Gleichung. Soll sie mit der gegenüberliegenden Fundamentallinie $x=0$ zusammenfallen, so muss $F=E=0$ sein. Sollen nun überdiess die beiden andern Fundamentalpunkte der Curve angehören, so dass die Gleichungen $y=0$, $z=0$ Tangenten darstellen, so muss noch $B=C=0$ sein. Wenn also zwei Tangenten eines Kegelschnitts und deren Berührungssehne als Fundamentallinien angenommen werden, so wird derselbe durch die Gleichung

$$x^2=2yz$$

dargestellt.

Giebt man in Beziehung auf den Kegelschnitt dem Fundamentaldreieck eine solche Lage, dass jedes Eck Pol der Gegenseite wird, so muss $D=F=E=0$ sein, und die Gleichung des Kegelschnitts wird

$$Ax^2+By^2+Cz^2=0,$$

oder, wenn man will, noch einfacher

$$x^2+y^2=z^2.$$

Ueber die Art, wie man ein Vierseit am einfachsten durch allgemeine Coordinaten darstellen kann.

Wenn $t=0$, $t'=0$, $t''=0$, $t'''=0$ die Gleichungen von vier Geraden sind, deren keine drei im selben Punkt zusammentreffen, und man denkt sich dieselben allenfalls in rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückt, so wird man immer drei Factoren λ', λ'', λ''' angeben können, welche die Eigenschaft haben, die Gleichung $t+\lambda' t'+\lambda'' t''+\lambda''' t'''=0$ identisch zu machen, so dass dieselbe besteht, welche Werthe man auch den rechtwinkligen Coordinaten beilegen mag. Wir dürfen daher von vorn herein annehmen, die linearen Functionen t, t', t'', t''' seien mit solchen Factoren versehen, dass die Gleichung

$$t+t'+t''+t'''=0$$

identisch wird. Alsdann werden die Gleichungen

$$t+t'=0,\ t''+t'''=0$$

eine und dieselbe Gerade darstellen. Jene zeigt aber an, dass die Gerade durch den Durchschnittspunkt der beiden ersten Seiten, diese, dass sie durch denjenigen der beiden letzten Seiten des Vierseits geht. Folglich ist die Gerade eine Diagonale des Vierseits. Wenn wir daher

$$t+t'=x,\ t+t''=y,\ t+t'''=z$$

setzen, so sind $x=0$, $y=0$, $z=0$ die Gleichungen der Diagonalen des Vierseits; und da

$$x+y+z=2t,\ -x+y+z=-2t',\ x-y+z=-2t'',\ x+y-z=-2t'''$$

ist, so wird das Vierseit durch die Gleichung

$$(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)=0$$

dargestellt, indem zugleich seine Diagonalen als Fundamentallinien angenommen sind.

Ueber die einfachste Art, ein Viereck durch allgemeine Coordinaten darzustellen.

Wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ rechtwinklige Coordinaten bezeichnen, und es sind vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, durch die Proportionen

$$\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:1=a:b:c,\ \mathfrak{x}:\mathfrak{y}:1=a':b':c',\ \mathfrak{x}:\mathfrak{y}:1=a'':b'':c'',\ \mathfrak{x}:\mathfrak{y}:1=a''':b''':c'''$$

gegeben, so darf man immer voraussetzen, es sei

$$a+a'+a''+a'''=0,$$
$$b+b'+b''+b'''=0,$$
$$c+c'+c''+c'''=0.$$

Wenn nun ein Punkt durch die Proportionen

$$\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:1=(a+a'):(b+b'):(c+c')$$

bestimmt ist, so liegt derselbe auf der Geraden, welche die beiden ersten Ecken des gegebenen Vierecks verbindet. Da aber für denselben Punkt auch

$$\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:1=(a''+a'''):(b''+b'''):(c''+c''')$$

ist, so liegt derselbe auch auf der Geraden, welche die beiden letzten Ecken verbindet und ist somit ein Kreuzungspunkt des gegebenen Vierecks. Für die zwei übrigen Kreuzungspunkte hat man eben so

$$\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:1=(a+a''):(b+b''):(c+c'')$$

und

$$\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:1=(a+a'''):(b+b'''):(c+c''').$$

Man bestimme nun drei lineare Functionen x, y, z der rechtwinkligen Coordinaten, so dass

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:1=&[(a+a')x+(a+a'')y+(a+a''')z]\\ &:[(b+b')x+(b+b'')y+(b+b''')z]\\ &:[(c+c')x+(c+c'')y+(c+c''')z]\end{aligned}$$

sei, so werden die Gleichungen $x=0$, $y=0$, $z=0$ die Seiten des Dreiecks der Kreuzungspunkte darstellen. Setzt man ferner $x=y=z$, so verwandeln sich die vorigen Proportionen in $\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:1=a:b:c$, und wenn man $-x=y=z$ setzt, in $\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:1=a':b':c'$, u. s. f. Also

sind jetzt die Ecken des Vierecks resp. durch die Paare von Gleichungen

$$x=y=z, \quad -x=y=z, \quad x=-y=z, \quad x=y=-z,$$

folglich das gesammte Viereck durch das einzige Paar Gleichungen

$$x^2=y^2=z^2$$

dargestellt, während die Fundamentalpunkte mit den Kreuzungspunkten zusammenfallen.

Allgemeiner Ausdruck für einen einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitt.

Wenn die beliebigen Constanten f, g, h der Bedingung $f+g+h=0$ genügen, so stellt die Gleichung

$$\frac{x^2}{f}+\frac{y^2}{g}+\frac{z^2}{h}=0$$

irgend einen dem Vierseit $\Pi(x\pm y\pm z)=0$ eingeschriebenen Kegelschnitt dar. Denn, setzt man $x:y:z=f:g:h$, so genügt der dadurch bezeichnete Punkt der Gleichung des Kegelschnitts, und die Tangente in demselben hat die Gleichung $x+y+z=0$. Eben so liegt der durch die Proportionen $x:y:z=-f:g:h$ bestimmte Punkt auf der Curve, und die betreffende Tangente hat $-x+y+z=0$ zur Gleichung, u. s. f. Man sieht zugleich, dass das Viereck der Berührungspunkte durch die Proportionen

$$x^2:y^2:z^2=f^2:g^2:h^2$$

dargestellt wird.

Die Verhältnissgrössen f, g, h haben eine perspectivische Bedeutung. Werden die Punkte, in denen irgend eine Tangente des Kegelschnitts von den Seiten des umschriebenen Vierseits, denen der Reihe nach die Gleichungen

$$x+y+z=0, \quad -x+y+z=0, \quad x-y+z=0, \quad x+y-z=0$$

zukommen, geschnitten wird, resp. mit A, B, C, D bezeichnet, so ist

$$AB.CD:AC.DB:AD.BC=f:g:h,$$

oder, wenn man will, $-\frac{g}{h}$ ist der Werth des perspectivischen Doppelverhältnisses $\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}$.

Denn es sei $ax+by+cz=0$ die Gleichung der beliebigen Tangente, so hat man für die Punkte C und D resp. die Paare von Proportionen

$$x:y:z=(b+c):(c-a):-(a+b)$$

und

$$x:y:z=-(b+c):(c+a):(a-b).$$

Nun ist $\frac{AC}{AD}$ gleich dem Verhältniss der aus den Punkten C und D auf die erste Seite $(x+y+z=0)$ gefällten Senkrechten, also gleich dem Verhältnisse der beiden Werthe, welche dem als lineare Function der rechtwinkligen Coordinaten betrachteten Ausdrucke $x+y+z$ in den beiden Punkten C und D zukommen. Wenn wir diese zwei Beziehungen auf C und D durch einen und zwei Accente anzeigen, so ist

$$\frac{AC}{AD}=\frac{(x+y+z)'}{(x+y+z)''}.$$

Ganz so haben wir auch

$$\frac{BC}{BD}=\frac{(-x+y+z)'}{(-x+y+z)''};$$

also

$$\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=\left(\frac{x+y+z}{-x+y+z}\right)':\left(\frac{x+y+z}{-x+y+z}\right)''.$$

Da nun zufolge der obigen Proportionen

$$\left(\frac{x+y+z}{-x+y+z}\right)'=\frac{(b+c)+(c-a)-(a+b)}{-(b+c)+(c-a)-(a+b)}=-\frac{c-a}{a+b},$$

$$\left(\frac{x+y+z}{-x+y+z}\right)''=\frac{-(b+c)+(c+a)+(a-b)}{(b+c)+(c+a)+(a-b)}=\frac{a-b}{c+a}$$

ist, so haben wir

$$\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=-\frac{c^2-a^2}{a^2-b^2},$$

und daher

$$AB.CD:AC.DB:AD.BC=(b^2-c^2):(c^2-a^2):(a^2-b^2).$$

Weil aber $ax+by+cz=0$ die Gleichung einer Tangente sein soll, so ist für ihren Berührungspunkt

$$\frac{x}{f}:\frac{y}{g}:\frac{z}{h}=a:b:c$$

oder $x:y:z=af:bg:ch$, also $a^2f+b^2g+c^2h=0$, woraus wegen $f+g+h=0$ sogleich $f:g:h=(b^2-c^2):(c^2-a^2):(a^2-b^2)$ folgt.

Allgemeiner Ausdruck für einen einem Viereck umschriebenen Kegelschnitt.

Wenn $f+g+h=0$, so stellt die Gleichung

$$fx^2+gy^2+hz^2=0$$

irgend einen dem Viereck $x^2=y^2=z^2$ umschriebenen Kegelschnitt dar, was keines weitern Beweises bedarf.

Die Grössen f, g, h bestimmen das constante perspectivische Doppelverhältniss, welches für die vier aus irgend einem Punkte des Kegelschnitts nach den Ecken des Vierecks gezogenen Strahlen a, b, c, d stattfindet. Denn es seien A, B, C, D die Ecken des gegebenen Vierecks, denen resp. die Gleichungenpaare

$$x=y=z, \quad -x=y=z, \quad x=-y=z, \quad x=y=-z$$

zukommen, und P irgend ein Punkt des Kegelschnitts, für welchen

$$x:y:z=a:b:c,$$

also auch

$$a^2f+b^2g+c^2h=0$$

und daher

$$f:g:h=(b^2-c^2):(c^2-a^2):(a^2-b^2)$$

ist. Dann kommen den Strahlen a und b die Gleichungen

$$t=(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0,$$
$$u=(b-c)x-(c+a)y+(a+b)z=0$$

zu. Bezeichnet man nun die Werthe, welche die linearen Functionen t, u der rechtwinklingen Coordinaten in den Punkten C und D erhalten, resp. mit t', u', t'', u'', so ist

$$\frac{PC.\sin(ac)}{PD.\sin(ad)}=\frac{t'}{t''}, \quad \frac{PC.\sin(bc)}{PD.\sin(bd)}=\frac{u'}{u''};$$

also

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(ad)}:\frac{\sin(bc)}{\sin(bd)}=\frac{t'}{t''}:\frac{u'}{u''}=\frac{t'}{u'}:\frac{t''}{u''}.$$

Da nun $x'=-y'=z'$ und $x''=y''=-z''$ ist, so folgt

$$\frac{t'}{u'}=\frac{(b-c)-(c-a)+(a-b)}{(b-c)+(c+a)+(a+b)}=-\frac{c-a}{a+b},$$
$$\frac{t''}{u''}=\frac{(b-c)+(c-a)-(a-b)}{(b-c)-(c+a)-(a+b)}=\frac{a-b}{c+a}.$$

Also

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(ad)}:\frac{\sin(bc)}{\sin(bd)}=-\frac{c^2-a^2}{a^2-b^2},$$

woraus sofort

$$\sin(ab)\sin(cd):\sin(ac)\sin(db):\sin(ad)\sin(bc)=f:g:h$$

folgt.

Bezeichnet man mit J, $\pi.2J.\sqrt{Q}$ den Inhalt des Fundamentaldreiecks und denjenigen einer durch die barycentrische Gleichung

$$Ax^2+By^2+Cz^2=0$$

ausgedrückten Ellipse, so ist nach (19)

$$Q=\frac{(ABC)^2}{(BC+CA+AB)^3}. \qquad (21)$$

Ist Q negativ, so ist die Curve eine Hyperbel, und $2J.\sqrt{-Q}$ ist ihre Potenz, d. h. der constante Inhalt eines von den beiden Asymptoten und einer beliebigen Tangente gebildeten Dreiecks. Je nachdem in diesem Falle Q ein Maximum oder Minimum ist, so ist umgekehrt die Potenz ein Minimum oder Maximum.

Aufgabe. Einem gegebenen Vierseit eine Ellipse von grösstem Inhalt und eine Hyperbel von grösster Potenz einzuschreiben.

Auflösung. Das Vierseit sei in barycentrischen Coordinaten durch

$$\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}\right)\left(-\frac{x}{l}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}\right)\left(\frac{x}{l}-\frac{y}{m}+\frac{z}{n}\right)\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{m}-\frac{z}{n}\right)=0$$

dargestellt, so kömmt, wenn $f+g+h=0$ ist, die Gleichung

$$\frac{x^2}{fl^2}+\frac{y^2}{gm^2}+\frac{z^2}{hn^2}=$$

irgend einem eingeschriebenen Kegelschnitt zu. Es kömmt nun darauf an, das perspectivische Doppelverhältniss $-\frac{g}{h}$ der vier Punkte, in denen irgend eine Tangente des Kegelschnitts von den gegebenen vier Seiten geschnitten wird, so zu bestimmen, dass

$$Q=\frac{l^2m^2n^2.fgh}{(l^2f+m^2g+n^2h)^3}$$

ein Maximum oder Minimum wird. Setzt man

$$f=\cos\varphi,\ g=\cos\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right),\quad h=\cos\left(\varphi-\frac{4\pi}{3}\right), \qquad (22)$$

wodurch der Bedingung $f+g+h=0$ genügt wird, und

$$l^2+m^2e^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}+n^2e^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}}=r.e^{\theta\sqrt{-1}}, \qquad (23)$$

so wird $fgh=\frac{1}{4}\cos3\varphi$ und $\Sigma l^2f=r.\cos(\varphi-\theta)$; folglich

$$Q=\frac{l^2m^2n^2}{4r^3}\cdot\frac{\cos 3\varphi}{\cos^3(\varphi-\theta)}=\frac{l^2m^2n^2}{4r^3}\cdot q.$$

Hieraus fliesst

$$\frac{\partial q}{\partial\varphi}=-3\frac{\sin(2\varphi+\theta)}{\cos^4(\varphi-\theta)},$$

und für den Fall, wo die daherige Maximums- oder Minimums-bedingung

$$\sin(2\varphi+\theta)=0$$

erfüllt ist,

$$\frac{\partial^2 q}{\partial\varphi^2}=-6\frac{\cos(2\varphi+\theta)}{\cos^4(\varphi-\theta)};$$

also, wenn die genannte Bedingung unendlich nahe erfüllt ist,

$$q=\frac{\cos(2\varphi+\theta)}{\cos^2(\varphi-\theta)}-3\frac{\cos(2\varphi+\theta)}{\cos^4(\varphi-\theta)}\partial\varphi^2.$$

Folglich ist Q ein **positives Maximum**, wenn $\cos(2\varphi+\theta)=1$, ein **negatives Minimum** dagegen, wenn $\cos(2\varphi+\theta)=-1$ ist. Im ersten einer Ellipse von grössten Inhalte entsprechenden Falle ist

$$f:g:h=\cos\frac{\theta}{2}:\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{3}\right):\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{3}\right);\quad q=\frac{1}{\cos^2\frac{3\theta}{2}};$$

im zweiten einer Hyperbel von grösster Potenz entsprechenden Falle ist

$$f':g':h'=\sin\frac{\theta}{2}:\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{3}\right):\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{3}\right);\ q'=-\frac{1}{\sin^2\frac{3\theta}{2}};$$

also beiläufig:

$$\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}=1,\ ff'+gg'+hh'=0.$$

Um dieselbe Aufgabe durch geometrische Construction zu lösen, bringe man die Bedingungsgleichung für θ unter die Form

$$l^2\sin\theta+m^2\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)+n^2\sin\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right)=0.$$

Die Gerade, welche die Diagonalen des Vierseits halbirt, schneidet die Seiten des von denselben gebildeten Dreiecks ausserhalb so, dass das Verhältniss je zweier Segmente einem der drei Verhältnisse $l^2:m^2:n^2$ gleich ist. Man kann also drei gerade Linien

finden, die sich wie $l^2:m^2:n^2$ verhalten, die wir daher auch geradezu als resp. mit l^2, m^2, n^2 gleich annehmen dürfen. Man trage dieselben um einen beliebigen Punkt O herum so auf, dass jede folgende gegen die unmittelbar vorhergehende um -120^0 geneigt ist, und suche dann die Resultante aller drei Geraden, so werden von ihr die einzelnen Geraden um die Winkel θ, $\theta+240^0$, $\theta+480^0$ abstehen, und die Resultante selbst wird gleich r sein. Halbirt man nun die zuletzt genannten Winkel, trägt auf den halbirenden Richtungen von O aus eine beliebige Längeneinheit auf und projicirt die aufgetragenen Stücke sowohl auf die Richtung der Resultante als auch auf eine zu derselben senkrechte Richtung, so sind die drei ersten Projectionen mit den zur Ellipse, die drei letzten mit den zur Hyperbel gehörenden Werthen f, g, h proportional. Gesetzt nun die erste Seite des gegebenen Vierseits werde von den drei folgenden in den Punkten B, C, D geschnitten und vom Kegelschnitt in A berührt, so ist

$$AB.CD:AC.DB:AD.BC=f:g:h.$$

Legt man z. B. durch B eine Gerade und macht auf derselben $B\mathfrak{c}:\mathfrak{c}\mathfrak{d}:\mathfrak{d}B:B\mathfrak{a}=h:f:g:\infty$, zieht sodann $C\mathfrak{c}$, $D\mathfrak{d}$, welche sich in S schneiden mögen, so wird der Parallelstrahl $S\mathfrak{a}$ die erste Seite BCD in ihrem Berührungspunkte A schneiden. Da die Berührungspunkte aller vier gegebenen Seiten ein Viereck bilden, dessen Kreuzungspunkte in die Ecken des Diagonalendreiseits fallen, so sind nunmehr die drei übrigen Berührungspunkte leicht zu finden, und man wird sodann bloss mittelst des Lineals beliebig viele Tangenten des verlangten Kegelschnitts construiren können.

Am meisten der geometrischen Behandlungsweise scheint mir folgende Art, die Aufgabe aufzufassen, sich zu nähern. Es seien L, M, N die Mitten der Diagonalen des gegebenen Vierseits, und P der Mittelpunkt irgend eines eingeschriebenen Kegelschnitts, so liegen bekanntlich alle vier Punkte auf einer Geraden. Nun ist das Quadrat des Inhalts des zum Mittelpunkte P gehörenden Kegelschnitts dem Producte $LP.MP.NP$ proportional, und wird daher zugleich mit diesem ein Maximum oder Minimum. Also wird der Mittelpunkt P der eingeschriebenen Ellipse von grösstem Inhalt oder der eingeschriebenen Hyperbel von grösster Potenz der quadratischen Bedingungsgleichung

$$\frac{1}{LP}+\frac{1}{MP}+\frac{1}{NP}=0$$

genügen; d. h. die Summe seiner verkehrten Abstände von den Mitten der drei Diagonalen ist Null.

In der That kann man

$$f:g:h=(m^2-n^2)(s-l^2):(n^2-l^2)(s-m^2):(l^2-m^2)(s-n^2)$$

setzen, wo s eine das Verhältniss $\frac{g}{h}$ ersetzende Variable bezeichnet, aus dem einfachen Grunde, weil $\Sigma(m^2-n^2)(s-l^2)=0$ ist. Da nun fl^2, gm^2, hn^2 die barycentrischen Coordinaten des Mittelpunkts

P und 0, m^2, $-n^2$ diejenigen des Punkts L sind, so giebt die Formel (1) für die Projection der Geraden LP den Ausdruck

$$-\frac{\mathfrak{a}m^2n^2+\mathfrak{b}n^2l^2+\mathfrak{c}l^2m^2}{(m^2-n^2)(n^2-l^2)(l^2-m^2)}(s-l^2);$$

folglich ist

$$LP:MP:NP=(s-l^2):(s-m^2):(s-n^2).$$

Substituirt man nun die obigen Werthe von f, g, h in dem Ausdrucke für Q, so ergiebt sich

$$Q=\frac{l^2m^2n^2(s-l^2)(s-m^2)(s-n^2)}{[(m^2-n^2)(n^2-l^2)(l^2-m^2)]^2};$$

also ist Q mit dem Producte $(s-l^2)(s-m^2)(s-n^2)$ und daher auch mit dem Producte $LP.MP.NP$ proportional.

Bezeichnet S den Schwerpunkt der drei Diagonalmitten L, M, N, d. h. ist $SL+SM+SN=0$, so ist auch

$$\overline{SP}^2=\tfrac{1}{6}\left(\overline{SL}^2+\overline{SM}^2+\overline{SN}^2\right),$$

welche Gleichung zur geometrischen Construction des Mittelpunkts P dient.

Wenn man bemerkt, dass für jeden eingeschriebenen Kegelschnitt $-\frac{g}{h}$ dem perspectivischen Doppelverhältniss $\frac{PM}{PN}:\frac{LM}{LN}$ gleich ist, so gewinnt man folgenden Satz:

Es seien a, b, c, d vier Gerade, die ein Vierseit bilden, L, M, N die Mitten der Diagonalen, welche paarweise die Gegenecken (ab) und (cd), (ac) und (db), (ad) und (bc) verbinden, P der Mittelpunkt irgend eines eingeschriebenen Kegelschnitts, von dessen Tangenten irgend welche das Vierseit in den Punkten A, B, C, D schneidet. Dann haben die vier in einer Geraden liegenden Punkte P, L, M, N dasselbe perspectivische Doppelverhältniss wie die Punkte A, B, C, D, d. h. es ist stets

$$\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=\frac{PM}{PN}:\frac{LM}{LN},$$

welche Lage auch die fünfte Tangente haben mag. Ferner, wenn der Mittelpunkt P sich auf seiner Ortsgeraden fortbewegt, so hat das Quadrat des Inhalts des entsprechenden Kegelschnitts zum Producte $LP.MP.NP$ ein constantes Verhältniss.

Aufgabe. Einem Viereck eine Ellipse von kleinstem Inhalt oder eine Hyperbel von grösster Potenz umzuschreiben.

Auflösung. Werden die Kreuzungspunkte des gegebenen Vierecks zu Fundamentalpunkten angenommen, und bezeichnen die drei constanten Grössen l, m, n die Verhältnisse, in denen je eine Seite des Fundamentaldreiecks vom entsprechenden Gegenseitenpaare des Vierecks innerhalb und ausserhalb geschnitten wird, so wird das Viereck durch das Gleichungenpaar

$$\frac{x^2}{l^2}=\frac{y^2}{m^2}=\frac{z^2}{n^2}$$

und irgend ein umschriebener Kegelschnitt durch die Gleichung

$$\frac{fx^2}{l^2}+\frac{gy^2}{m^2}+\frac{hz^2}{n^2}=0$$

dargestellt, wo die der Bedingung $f+g+h=0$ unterworfenen Constanten f, g, h das perspectivische Doppelverhältniss der vier aus einem beliebigen Punkte des Kegelschnitts nach den Ecken des gegebenen Vierecks gezogenen Strahlen bestimmen. Die Formel (21) wird hier

$$Q=\frac{l^2m^2n^2 \,.\, f^2g^2h^2}{(l^2gh+m^2hf+n^2fg)^3},$$

und wenn man die Relationen

$$g\partial h-h\partial g=h\partial f-f\partial h=f\partial g-g\partial f$$

beachtet, so findet man

$$\partial Q=\frac{l^2m^2n^2.fgh\{l^2gh(g-h)+m^2hf(h-f)+n^2fg(f-g)\}}{(l^2gh+m^2hf+n^2fg)^4}\,(g\partial h-h\partial g)$$

und somit die Maximums- oder Minimumsbedingung

$$fgh\,.\,[l^2gh(g-h)+m^2hf(h-f)+n^2fg(f-g)]=0, \qquad (24)$$

welche vom sechsten Grade ist. Von den drei Lösungen $f=0$, $g=0$, $h=0$ entspricht jede einem Gegenseitenpaar des Vierecks, worauf sich in diesen drei Fällen der umschriebene Kegelschnitt reducirt. Nehmen wir z. B. f als unendlich klein an, so wird

$$Q=-\frac{m^2n^2f^2}{l^4g^2};$$

so oft also eine der drei Grössen f, g, h verschwindet, ist Q ein Maximum, und diese drei Maxima haben alle Null zum Werthe. Man kann übrigens auch ohne Rechnung begreifen, dass unter der Schaar umschriebener Kegelschnitte die Gegenseitenpaare Maxima von Q darbieten müssen, weil von denselben kein allmäliger Uebergang zu umschriebenen Ellipsen, sondern nur zu Hyperbeln denkbar ist. Lassen wir nun den Factor fgh in (24) bei Seite, und betrachten den Ausdruck

$$S=l^2\frac{g-h}{f}+m^2\frac{h-f}{g}+n^2\frac{f-g}{h},$$

so sehen wir, dass derselbe dreimal durchs Unendliche geht, während das Verhältniss $\frac{g}{h}$ von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst; folglich muss es immer drei reelle Werthe dieses Verhältnisses geben, für welche S verschwindet, und zwar liegen dieselben resp. zwischen $-\infty$ und -1, zwischen -1 und 0, und zwischen 0 und $+\infty$. Verfolgen wir den Verlauf von Q in irgend einem dieser drei Stadien, so sehen wir es zu Anfang desselben abnehmend und am Ende wachsend. Ist es inzwischen endlich geblieben, so muss es also da, wo S verschwand, durch ein Minimum gegangen sein. Im entgegengesetzten Falle ist es zuerst $-\infty$, dann plötzlich $+\infty$ geworden, hat von da an eine Weile abgenommen, ohne die Null erreichen zu können, weil alle drei Nullwerthe von Q zugleich Maxima sind, musste also wieder durch ein Minimum gehen, um bis $+\infty$ zu wachsen, von da in $-\infty$ überzuspringen und bis ans Ende des Stadiums zu wachsen. Die reellen drei Lösungen der Gleichung $S=0$ entsprechen also sämmtlich kleinsten Werthen von Q. Dieses wird durch die Rechnung bestätigt. Es ist nämlich

$$\partial S=2\left(\frac{l^2}{f^2}+\frac{m^2}{g^2}+\frac{n^2}{h^2}\right)(g\partial h-h\partial g);$$

folglich, wenn f, g, h der Bedingungsgleichung $S=0$ genügen, so wird Q beim Uebergang von f, g, h in $f+\partial f$, $g+\partial g$, $h+\partial h$, mit Vernachlässigung der dritten und höhern Potenzen der Incremente:

$$Q=\frac{l^2m^2n^2f^2g^2h^2}{(l^2gh+m^2hf+n^2fg)^3}$$
$$+\frac{l^2m^2n^2(l^2g^2h^2+m^2h^2f^2+n^2f^2g^2)}{(l^2gh+m^2hf+n^2fg)^4}(g\partial h-h\partial g)^2.$$

Da nun alle drei Wurzeln der Gleichung $S=0$ reell sind, so ist das zweite Glied des vorliegenden Ausdrucks rechts stets positiv; folglich Q in allen drei Fällen, wo $S=0$ wird, ein Minimum.

Ob Q positiv oder negativ sei, hängt einzig von der quadratischen Function

$$T=l^2gh+m^2hf+n^2fg$$

ab, denn T und Q sind zugleich positiv oder negativ. Setzen wir aber $2l^2=\mu+\nu$, $2m^2=\nu+\lambda$, $2n^2=\lambda+\mu$, d. h. $\lambda=-l^2+m^2+n^2$, u. s. w., so wird

$$2T=-(\lambda f^2+\mu g^2+\nu h^2),$$
$$2(\mu+\nu)T=-(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)f^2-(\mu g-\nu h)^2.$$

Also muss, damit T positiv sein könne, jedenfalls

$$\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu=(l+m+n)(-l+m+n)(l-m+n)(l+m-n)$$

negativ sein. Denkt man sich aber, was erlaubt ist, alle Grössen l, m, n positiv und l als die grösste derselben, so läuft diese Bedingung darauf hinaus, dass $l > m+n$ sein muss, d. h. dass das zweite Eck des Vierecks rückwärts vom ersten Fundamentalpunkt, so dass dieser zwischen das erste und zweite Eck zu stehen kömmt, liegen muss. Mit andern Worten, kein Eck des Vierecks darf innerhalb des von den drei übrigen Ecken gebildeten Dreiecks liegen. In diesem Falle gestattet die Gleichung $T=0$ zwei reelle Lösungen, welche den umschriebenen Parabeln entsprechen, und Q hat ein positives und zwei negative Minima, d. h. man kann dem Viereck eine Ellipse von kleinstem Inhalt und zwei Hyperbeln von grösster Potenz umschreiben. Im entgegengesetzten Falle, wenn keine der als positiv gedachten Grössen l, m, n grösser als die Summe der beiden übrigen ist, d. h. wenn ein Eck des gegebenen Vierecks innerhalb des von den drei übrigen Ecken gebildeten Dreiecks liegt, kann dem Viereck weder Ellipse noch Parabel umschrieben werden, und Q hat drei negative Minima, d. h. man kann dem Viereck drei Hyperbeln von grösster Potenz umschreiben.

Bezeichnet man die Gruppen zusammengehöriger Werthe von f, g, h, welche die drei Lösungen der cubischen Gleichung $S=0$ darstellen, durch

$$f,\, g,\, h;\quad f',\, g',\, h';\quad f'',\, g'',\, h'';$$

so bestehen die drei Gleichungen

$$\Sigma l^2 \frac{g-h}{f}=0,\quad \Sigma l^2 \frac{g'-h'}{f'}=0,\quad \Sigma l^2 \frac{g''-h''}{f''}=0,$$

aus denen durch Elimination der Verhältnisse von l^2, m^2, n^2 eine Relation sich ergeben muss, die nur f, g, h, f', f'', etc. enthält. Ich behaupte nun, diese Relation werde erhalten, indem man in irgend einer der drei letzten Gleichungen die beiden Proportionen

$$l^2 : m^2 : n^2 = ff'f'' : gg'g'' : hh'h'' \tag{25}$$

substituirt, wodurch sich die Gleichungen

$$\Sigma(g-h)f'f''=0,\ \Sigma(g'-h')f''f=0,\ \Sigma(g''-h'')ff'=0 \tag{26}$$

ergeben. Denn, da diese unter sich identisch sind, wovon man sich durch Subtraction je zweier derselben leicht überzeugen kann, so stellen sie eine und dieselbe und zwar die verlangte Relation dar, und dadurch sind dann auch die zwei vorigen Proportionen bewiesen. Eliminirt man ferner aus denselben mittelst der Gleichung $f''+g''+h''=0$ die Grössen f'', g'', h'', so erhält man

$$\frac{l^2}{ff'}+\frac{m^2}{gg'}+\frac{n^2}{hh'}=0, \tag{27}$$

eine in Beziehung auf f', g', h' quadratische Gleichung, welche

dazu dienen mag, wenn eine Lösung $f:g:h$ bekannt ist, daraus eine zweite $f':g':h'$ zu finden.

Durch die Proportionen (25) verwandelt sich das Minimum Q in

$$Q = \frac{f'f''.g'g''.h'h''}{(f'f''+g'g''+h'h'')^3}.$$

Da die Lösung der Aufgabe von derjenigen der cubischen Gleichung $\Sigma l^2 \frac{g-h}{f}=0$ abhängt, so kann sie nicht geometrisch mit Lineal und Zirkel ausgeführt werden, sondern nur durch Näherung. Gebraucht man die Bezeichnungen (22), so geht die genannte cubische Gleichung über in

$$l^2 \operatorname{tang}\varphi + m^2 \operatorname{tang}\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + n^2 \operatorname{tang}\left(\varphi - \frac{4\pi}{3}\right) = 0. \quad (28)$$

Nun ist es leicht, drei gerade Stücke zu construiren, die sich wie l^2, m^2, n^2 verhalten. Man nehme auf jeder Seite des Dreiecks der Kreuzungspunkte des gegebenen Vierecks (resp. Fundamentallinien) die Mitte zwischen den beiden Punkten, in denen sie vom entsprechenden Gegenseitenpaar geschnitten wird, so werden bekanntlich alle drei Mitten in einer Geraden liegen, welche die Seiten des Dreiecks der Kreuzungspunkte in Segmente theilt, deren Verhältnisse durch l^2, m^2, n^2 dargestellt sind. Man trage auf einer beliebigen Geraden solche Strecken OL, LM, MN auf, dass

$$OL:LM:MN = l^2:m^2:n^2$$

sei, errichte dann auf diese Gerade drei Senkrechte LL', MM', NN', ziehe aus O unter einem beliebigen Winkel $LOL' = \varphi$ den Strahl OL', durch seinen Durchschnittspunkt L' mit der ersten Senkrechten einen zweiten Strahl $L'M'$, der unter $-120°$ gegen den ersten OL', also um $\varphi - 120°$ gegen die feste Gerade geneigt ist, und durch seinen Durchschnittspunkt M' mit der zweiten Senkrechten einen dritten Strahl, der gegen den zweiten $L'M'$ um $-120°$ geneigt ist und die dritte Senkrechte in N' schneidet. Dreht man jetzt den ersten Strahl OL' um den Punkt O herum, so wird es im Ganzen drei reelle Richtungen desselben geben, für welche der Punkt N' mit N zusammenfällt, (und die Summe der drei entsprechenden Winkel φ wird, wie wir bald zeigen werden, ein Vielfaches von 180° sein). Denkt man sich nun in die Kreuzungspunkte Massen verlegt, welche sich wie die Längen der drei beweglichen Strahlen OL', $L'M'$, $M'N$ verhalten und positiv oder negativ genommen werden müssen, jenachdem die Längen der betreffenden Strahlen in den ihnen angewiesenen Richtungen oder in den entgegengesetzten gemessen wurden, so fällt der Schwerpunkt derselben in den M i t t e l p u n k t des gesuchten Kegelschnitts.

Die trigonometrische Erörterung der vorliegenden Aufgabe scheint mir einiges Interesse darzubieten. Setzt man

$$l^2+m^2 e^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}+n^2 e^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}}=r.e^{\theta\sqrt{-1}},$$
$$l^2+m^2+n^2=2r\cos\varepsilon;$$

also

$$r^2=l^4+m^4+n^4-m^2n^2-n^2l^2-l^2m^2,$$

und

$$r^2\sin^2\varepsilon=\frac{3}{4}(l+m+n)(-l+m+n)(l-m+n)(l+m-n),$$

so verwandelt sich die Minimumsbedingung (28) in

$$\cos\varepsilon\sin 3\varphi=\sin(\varphi-\theta). \quad (29)$$

Bezeichnet man die drei Wurzeln dieser Gleichung durch φ, φ', φ'' und berücksichtigt die identische Formel

$$\Sigma\sin 3\varphi\sin(\varphi'-\varphi'')=4\sin(\varphi'-\varphi'')\sin(\varphi''-\varphi)\sin(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi'+\varphi''),$$

so folgt durch Elimination von ε, θ aus den drei Gleichungen (29) die Relation

$$\sin(\varphi+\varphi'+\varphi'')=0, \quad (30)$$

welche mit (26) eines und dasselbe ist. Da es für den Werth von φ auf π mehr oder weniger nicht ankömmt, so dürfen wir geradezu

$$\varphi+\varphi'+\varphi''=0$$

voraussetzen. Hieraus kann man dann unter andern folgende Relationen ableiten:

$$\sin(2\varphi+\theta)=2\sin(\varphi-\theta)\cos(\varphi'-\varphi''),$$
$$\sin(2\varphi+\theta)+\sin(2\varphi'+\theta)+\sin(2\varphi''+\theta)=0,$$
$$\cos(2\varphi+\theta)+\cos(2\varphi'+\theta)+\cos(2\varphi''+\theta)=\frac{1}{\cos\varepsilon},$$

$$\Sigma\sin(\varphi-\theta)\cos(\varphi'-\varphi'')=0,\quad \Sigma\cos(\varphi-\theta)\cos(\varphi'-\varphi'')=\frac{1}{\cos\varepsilon},$$

$$\sin\varphi\sin\varphi'\sin\varphi''=\frac{1}{4}\frac{\sin\theta}{\cos\varepsilon},\quad \cos\varphi\cos\varphi'\cos\varphi''=\frac{1}{4}\left(1+\frac{\cos\theta}{\cos\varepsilon}\right).$$

$$\cos(\varphi'-\varphi'')\cos(\varphi''-\varphi)\cos(\varphi-\varphi')=\frac{1}{8}\operatorname{tang}^2\varepsilon,$$

$$\cos 3\varphi\cos 3\varphi'\cos 3\varphi''=\frac{\cos 3\varepsilon+\cos 3\theta}{4\cos^3\varepsilon},$$

$$\sin 3\varphi\sin 3\varphi'\sin 3\varphi''=\frac{\sin 3\theta}{4\cos^3\varepsilon},$$

$$\sin(\varphi-\theta)\sin(\varphi'-\theta)\sin(\varphi''-\theta)=\frac{1}{4}\sin 3\theta,$$

$$\cos(\varphi-\theta)\cos(\varphi'-\theta)\cos(\varphi''-\theta)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos\varepsilon}+\cos 3\theta\right).$$

$$[\sin(\varphi'-\varphi'')\sin(\varphi''-\varphi)\sin(\varphi-\varphi')]^2$$
$$=\frac{8\cos\varepsilon(\cos 3\varepsilon+\cos 3\theta)+\sin^2\varepsilon(4\cos^2\varepsilon-\sin^2\varepsilon)}{64\cos^4\varepsilon}=\frac{H}{64\cos^4\varepsilon},$$

$$\sin^3(2\varphi+\theta)$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\cos 3\theta}{\cos\varepsilon}-\tfrac{1}{4}\operatorname{tang}^2\varepsilon\right)\cdot\sin(2\varphi+\theta)+\tfrac{1}{4}\operatorname{tang}^2\varepsilon\sin 3\theta. \quad (31)$$

Um diese Gleichung aufzulösen, setze man

$$\cos\psi=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\tfrac{1}{4}\operatorname{tang}^2\varepsilon\sin 3\theta}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\cos 3\theta}{\cos\varepsilon}-\tfrac{1}{4}\operatorname{tang}^2\varepsilon\right)^{\frac{3}{2}}},$$

was

$$\operatorname{tang}\psi=\frac{(1+\cos\varepsilon\cos 3\theta)\sqrt{H}}{3\sqrt{3}\sin^2\varepsilon\cos\varepsilon\sin 3\theta}$$

nach sich zieht, so ist

$$\sin(2\varphi+\theta)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\cos 3\theta}{\cos\varepsilon}-\tfrac{1}{4}\operatorname{tang}^2\varepsilon}\,.\cos\frac{\psi}{3}\,.$$

Da φ, φ', φ'' stets alle drei reell sind, so muss H positiv sein. Um dieses verificiren zu können, setze ich

$$L=l^2+m^2+n^2,\quad M=m^2n^2+n^2l^2+l^2m^2,\quad N=l^2m^2n^2,$$

und daher

$$r^2=L^2-3M,\ \cos\varepsilon=\frac{L}{2r},\ \sin^2\varepsilon=3\frac{L^2-4M}{4r^2},\ \cos 3\varepsilon+\cos 3\theta=\frac{27N}{2r^3};$$

so folgt

$$\frac{16}{3}r^4.H=L^4+8L^2M-48M^2+288LN$$
$$=(l^2-m^2+n^2)^2(l^2+m^2-n^2)^2+12l^2(m^2+n^2)(-l^2+m^2+n^2)^2$$
$$+192l^2m^2n^2(l^2+m^2+n^2)+16l^2m^2n^2(m^2+n^2)+16m^2n^2(m^2-n^2)^2;$$

also ist H stets positiv.

Unterscheidet man endlich die drei Werthe von Q, welche den drei Wurzeln φ, φ', φ'' entsprechen, durch Accente, so ist

$$QQ'Q''=\left(\frac{4}{9}\right)^3\frac{l^4m^4n^4}{[-(l+m+n)(-l+m+n)(l-m+n)(l+m-n)]^3}.$$

Anhang,

Ueber diejenigen einem Vierseit eingeschriebenen oder einem Viereck umschriebenen Ellipsen, für welche der Winkel der zwei gleichen conjugirten Durchmesser sich am meisten dem Rechten nähert.

Bezeichnen a, b, c, J die Seiten und den Inhalt des Fundamentaldreiecks, und ist

$$Ax^2+By^2+Cz^2=0$$

die barycentrische Gleichung einer Ellipse, deren gleiche conjugirte Durchmesser den Winkel V einschliessen, so ist nach Formel (20)

$$\sin^2 V=\frac{(4J)^2(BC+CA+AB)}{(a^2A+b^2B+c^2C)^2}=-\operatorname{tang}^2 W. \qquad (32)$$

Ist dieser Ausdruck negativ, so ist die betreffende Curve eine Hyperbel, deren Asymptoten den Winkel W einschliessen

I. Für einen dem Vierseit

$$\frac{x}{l}\pm\frac{y}{m}\pm\frac{z}{n}=0$$

eingeschriebenen Kegelschnitt ist nun

$$A:B:C=\frac{1}{l^2f}:\frac{1}{m^2g}:\frac{1}{n^2h},$$

wo

$$f+g+h=0;$$

also

$$\sin^2 V=-\operatorname{tang}^2 W=\frac{(4J)^2 fgh(l^2f+m^2g+n^2h)}{l^2m^2n^2\left(\frac{a^2}{l^2}gh+\frac{b^2}{m^2}hf+\frac{c^2}{n^2}fg\right)^2}, \qquad (33)$$

woraus sich für das Maximum des Winkels V oder W die Bedingungsgleichung

$$(34)$$

$$(l^2f+m^2g+n^2h)^2\left(\frac{a^2}{l^2(m^2-n^2)f}+\frac{b^2}{m^2(n^2-l^2)g}+\frac{c^2}{n^2(l^2-m^2)h}\right)$$
$$+(m^2-n^2)(n^2-l^2)(l^2-m^2)\left(\frac{a^2f}{l^2(m^2-n^2)^2}+\frac{b^2g}{m^2(n^2-l^2)^2}+\frac{c^2h}{n^2(l^2-m^2)^2}\right)=0$$

ergiebt. Diese ist vom vierten Grade; ihre linke Seite geht, wäh-

rend das Verhältniss $\frac{g}{h}$ alle reellen Werthe durchläuft, dreimal durchs Unendliche, nämlich für $f=0$, für $g=0$ und für $h=0$. Nehmen wir $l^2>m^2>n^2$ an, und lassen, während $h=1$ bleibt, g von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen, so wird die linke Seite Ω obiger Gleichung nach und nach:

$$1^0.\text{ für } g=-\infty,\quad \Omega=\frac{c^2(l^2-m^2)}{n^2}g^2,\ \begin{pmatrix}+\infty\\+\infty\end{pmatrix}$$

$$2^0.\text{ für } g=-1,\quad \Omega=\frac{a^2(m^2-n^2)}{l^2f},\ \begin{pmatrix}+\infty\\-\infty\end{pmatrix}$$

$$3^0.\text{ für } g=\ \ 0,\quad \Omega=-\frac{b^2(l^2-n^2)}{m^2g},\ \begin{pmatrix}+\infty\\-\infty\end{pmatrix}$$

$$4^0.\text{ für } g=\frac{n^2-l^2}{l^2-m^2}=-1-\frac{m^2-n^2}{l^2-m^2},$$

$$\Omega=-(m^2-n^2)(l^2-n^2)\left(\frac{a^2}{l^2(m^2-n^2)}+\frac{c^2}{n^2(l^2-m^2)}-\frac{b^2}{m^2(l^2-n^2)}\right).$$

also negativ, weil der dreigliedrige Factor auch so

$$\frac{[an^2(l^2-m^2)-cl^2(m^2-n^2)]^2}{l^2m^2n^2(m^2-n^2)(l^2-m^2)(l^2-n^2)}+\frac{(a+c)^2-b^2}{m^2(l^2-n^2)}$$

geschrieben werden kann. Da der vierte Werth von g zwischen 1^0 und 2^0 hineinfällt, so ergiebt sich aus Vorliegendem, dass die Gleichung (34) vier reelle Wurzeln hat.

Die betrachtete Curve ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem

$$fgh(l^2f+m^2g+n^2h)$$

positiv oder negativ ist. Unter der obigen Voraussetzung $l^2>m^2>n^2$ folgt hieraus, dass während $\frac{g}{h}$ die vier durch die Werthe

$$-\infty,-\frac{l^2-n^2}{l^2-m^2},-1,\ 0,\ +\infty$$

begränzten Stadien durchläuft, die Curve im ersten Stadium von der Diagonale $z^2=0$ aus durch die Hyperbel zur Parabel, im zweiten von der Parabel durch die Ellipse zur Diagonale $x^2=0$, im dritten von der Diagonale $x^2=0$ durch die Hyperbel zur Diagonale $y^2=0$, und endlich im vierten von der Diagonale $y^2=0$ durch die Ellipse zur Diagonale $z^2=0$ übergeht. Aus der obigen Erörterung der Gleichung (34) geht aber hervor, dass in jedes der genannten vier Stadien eine Wurzel derselben fällt. Also werden immer vier reelle Kegelschnitte der Aufgabe genügen. Zwei davon sind Ellipsen mit grösstem spitzen Winkel der gleichen conjugirten Durchmesser und zwei Hyperbeln mit grösstem Asymptotenwinkel.

Zu demselben Ergebniss gelangt man noch leichter durch rein geometrische Betrachtung, indem man die Bewegung des Mittelpunkts des eingeschriebenen Kegelschnitts längs der die Diagonalen des Vierseits halbirenden Geraden verfolgt. In die weitere Erörterung der Gleichung (34) wage ich nicht mich einzulassen wegen der grossen Verwicklung der Ausdrücke, die sie herbeiführen würde.

Es seien L, M, N, P resp. die Mitten der drei Diagonalen des gegebenen Vierseits und der Mittelpunkt des gesuchten Kegelschnitts, so darf man

$$LP:MP:NP=(s-l^2):(s-m^2):(s-n^2)$$

setzen, wo s eine die Lage des Punkts P auf der Geraden LMN bestimmende Unbekannte bezeichnet. Dann ist überhaupt für jeden eingeschriebenen Kegelschnitt

$$f:g:h=(m^2-n^2)(s-l^2):(n^2-l^2)(s-m^2):(l^2-m^2)(s-n^2),$$

und für den gesuchten Kegelschnitt verwandelt sich die Bedingungsgleichung (34) in

$$\Sigma\frac{a^2(n^2-l^2)(l^2-m^2)}{l^2(m^2-n^2)(s-l^2)}+\Sigma\frac{a^2(s-l^2)}{l^2(m^2-n^2)}=0. \qquad (34^b)$$

Bestimmt man auf der Mittelpunktsgeraden LMN einen Punkt O so, dass

$$OL:OM:ON:OP=l^2:m^2:n^2:s,$$

so hat man vermöge der gegenwärtigen Bedingung

$$\Sigma\frac{a^2}{OL.MN}\left(\frac{NL.LM}{LP}+LP\right)=0.$$

Wenn, abgesehen von der so eben behandelten Aufgabe in (33) der Werth von $\tang^2 W$ unendlich gross wird, so entspricht derselbe einer eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbel. Da die Bedingung hiefür, $\Sigma\frac{a^2}{l^2}gh=0$, vom zweiten Grade ist, so giebt es im Allgemeinen zwei gleichseitige Hyperbeln, die dem gegebenen Vierseit eingeschrieben sind. Sollen dieselben reell sein, so muss eine der als positiv angesehenen Grössen $\frac{a}{l}, \frac{b}{m}, \frac{c}{n}$ grösser sein als die Summe der beiden übrigen.

II. Für einen dem Viereck $\frac{x^2}{l^2}=\frac{y^2}{m^2}=\frac{z^2}{n^2}$ umschriebenen Kegelschnitt ist

$$A:B:C=\frac{f}{l^2}:\frac{g}{m^2}:\frac{h}{n^2}, \text{ wo } f+g+h=0;$$

also

$$\sin^2 V=-\operatorname{tang}^2 W=\frac{(4J)^2}{l^2m^2n^2}\frac{l^2gh+m^2hf+n^2fg}{\left(\frac{a^2}{l^2}f+\frac{b^2}{m^2}g+\frac{c^2}{n^2}h\right)^2}. \tag{35}$$

Setzt man nun, um abzukürzen

$$-l^2+m^2+n^2=\lambda,\quad l^2-m^2+n^2=\mu,\quad l^2+m^2-n^2=\nu,$$

also

$$2l^2=\mu+\nu, \text{ u. s. w.},$$

$$\frac{b^2}{m^2}-\frac{c^2}{n^2}=\alpha,\quad \frac{c^2}{n^2}-\frac{a^2}{l^2}=\beta,\quad \frac{a^2}{l^2}-\frac{b^2}{m^2}=\gamma,$$

also

$$\alpha+\beta+\gamma=0,$$

so findet man

$$\partial\sin^2 V=\frac{(4J)^2}{l^2m^2n^2}\frac{\alpha\lambda f+\beta\mu g+\gamma\nu h}{\left(\frac{a^2}{l^2}f+\frac{b^2}{m^2}g+\frac{c^2}{n^2}h\right)^3}(g\partial h-h\partial g).$$

Wenn also die Bedingung

$$\alpha\lambda f+\beta\mu g+\gamma\nu h=0, \tag{36}$$

oder

$$f:g:h=(\beta\mu-\gamma\nu):(\gamma\nu-\alpha\lambda):(\alpha\lambda-\beta\mu),$$

oder

$$f:\left(\frac{(-a^2+b^2+c^2)l^2}{\Sigma(-a^2+b^2+c^2)l^2}-\frac{(-l^2+m^2+n^2)l^2}{\Sigma(-l^2+m^2+n^2)l^2}\right)$$
$$=g:\left(\frac{(a^2-b^2+c^2)m^2}{\Sigma(-a^2+b^2+c^2)l^2}-\frac{(l^2-m^2+n^2)m^2}{\Sigma(-l^2+m^2+n^2)l^2}\right)$$
$$=h:\left(\frac{(a^2+b^2-c^2)n^2}{\Sigma(-a^2+b^2+c^2)l^2}-\frac{(l^2+m^2-n^2)n^2}{\Sigma(-l^2+m^2+n^2)l^2}\right)$$

erfüllt ist, so stellt die Gleichung

$$\frac{fx^2}{l^2}+\frac{gy^2}{m^2}+\frac{hz^2}{n^2}=0,$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(-a^2+b^2+c^2)x^2+(a^2-b^2+c^2)y^2+(a^2+b^2-c^2)z^2}{(-a^2+b^2+c^2)l^2+(a^2-b^2+c^2)m^2+(a^2+b^2-c^2)n^2}\\ =\dfrac{(-l^2+m^2+n^2)x^2+(l^2-m^2+n^2)y^2+(l^2+m^2-n^2)z^2}{(l+m+n)(-l+m+n)(l-m+n)(l+m-n)}\end{array}\right\}(37)$$

den verlangten unter allen dem gegebenen Viereck umschriebenen am meisten dem Kreise sich nähernden Kegelschnitt dar.

Wenn man diejenigen Werthe von f, g, h, welche die Bedingung (36) erfüllen, um die sehr kleinen Incremente $\varDelta f$, $\varDelta g$, $\varDelta h$ wachsen lässt, so bekömmt man mit Vernachlässigung der Glieder dritter Ordnung

$$\varDelta . \sin^2 V = -\frac{(4J)^2}{2l^2m^2n^2}\,\frac{\alpha^2\lambda+\beta^2\mu+\gamma^2\nu}{\left(\frac{a^2}{l^2}f+\frac{b^2}{m^2}g+\frac{c^2}{n^2}h\right)^4}\,(g\varDelta h-h\varDelta g)^2 .$$

Da nun, wie ich sogleich zeigen werde, die Summe

$$S=\alpha^2\lambda+\beta^2\mu+\gamma^2\nu$$

stets positiv ist, so ist $\sin^2 V=-\operatorname{tang}^2 W$ beim Stattfinden der Bedingung (36) stets ein Maximum. Dass S positiv sein muss, folgt aus der identischen Gleichung

$$2l^2m^2n^2.b^2c^2.S=[b^2c^2l^2-c^2(a^2+b^2-c^2)m^2-b^2(a^2-b^2+c^2)a^2]^2$$
$$+(4J)^2(c^2m^2-b^2n^2)^2.$$

Bedeutet Π dieselbe Function von l, m, n, welche $(4J)^2$ von a, b, c ist, so dass

$$\Pi=(l+m+n)(-l+m+n)(l-m+n)(l+m-n)=l^2\lambda+m^2\mu+n^2\nu$$
$$=\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu,$$

so hat man auch die identischen Gleichungen

$$2l^2m^2n^2.S=(a^2\lambda+b^2\mu+c^2\nu)^2-(4J)^2.\Pi,$$
$$\lambda(\beta\mu-\gamma\nu)^2+\mu(\gamma\nu-\alpha\lambda)^2+\nu(\alpha\lambda-\beta\mu)^2=\Pi S.$$

Mit Hülfe derselben erlangt man durch Substitution der in (36) für f, g, h gefundenen Werthe im Ausdrucke (35) als Werth des gesuchten Maximums

$$\left.\begin{array}{l}\sin^2 V=-\operatorname{tang}^2 W=-\dfrac{(4J)^2\,\Pi}{2l^2m^2n^2S},\\ \operatorname{tang}^2 V=-\sin^2 W=-\dfrac{(4J)^2\,\Pi}{(a^2\lambda+b^2\mu+c^2\nu)^2}.\end{array}\right\}(38)$$

Hieraus erhellt sogleich, dass die verlangte Curve eine Ellipse oder Hyperbel ist, jenachdem Π negativ oder positiv ist, d. h. jenachdem das gegebene Viereck ein gewöhnliches ist oder nicht.

Im letztern Falle, wo dem Viereck überhaupt nur Hyperbeln umschrieben werden können, ist der durch die Formel (38) bestimmte spitze Asymptotenwinkel ein Minimum.

Da die Ausdrücke in (38) sich nicht ändern, wenn man l, m, n resp. mit a, b, c vertauscht, so construire man ein Dreieck, dessen Seiten l, m, n sind, verlege in dessen Ecken die Massen a, b, c und bestimme mittelst derselben ein Viereck; dann wird der kleinste Asymptotenwinkel einer umschriebenen Hyperbel derselbe sein, wie vorhin, wo in den Ecken eines von den Seiten a, b, c gebildeten Dreiecks sich die Massen l, m, n befanden.

Eine geometrische Construction der verlangten Curve scheint am leichtesten aus der Gleichung (37) hervorzugehen. Dieselbe zeigt nämlich, dass die gesuchte Curve durch die vier Durchschnittspunkte der beiden durch die Gleichungen

$$(-a^2+b^2+c^2)x^2+(a^2-b^2+c^2)y^2+(a^2+b^2-c^2)z^2=0,$$
$$(-l^2+m^2+n^2)x^2+(l^2-m^2+n^2)y^2+(l^2+m^2-n^2)z^2=0$$

dargestellten Kegelschnitte geht, in Beziehung auf welche beide die Kreuzungspunkte des gegebenen Vierecks zugeordnete harmonische Pole sind. Der erste derselben ist ein Kreis und hat also den Höhenpunkt des Dreiecks der Kreuzungspunkte oder des Fundamentaldreiecks zum Mittelpunkt, sein Halbmesser ist das geometrische Mittel zwischen den zwei vom Höhenpunkt aus in derselben Richtung gemessenen Segmenten jeder Höhe. Dieser Kreis ist daher leicht zu construiren. Beim zweiten Kegelschnitte können jedenfalls auch die Punkte, in denen er die Fundamentallinien schneidet, und sein Mittelpunkt geometrisch construirt werden. Indess weiss ich die einfachste Construction nicht anzugeben. — Wenn dann auch nur zwei der in Rede stehenden Durchschnittspunkte reell sind, so kennt man nach Auffindung derselben im Ganzen sechs Punkte des verlangten Maximumskegelschnitts, also mehr als genug, um denselben zu construiren.

Es giebt einen Fall, wo der Winkel W constant ein Rechter ist. Wenn nämlich $a^2:b^2:c^2=l^2:m^2:n^2$ ist, so zeigt die Formel (35), dass $\tang^2 W$ unendlich gross bleibt, wie man auch das Verhältniss $\frac{g}{h}$ variiren mag. Wenn also das gegebene Viereck durch die barycentrischen Gleichungen $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ dargestellt wird, d. h. wenn seine Ecken die Mittelpunkte der vier dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen Kreise sind, mit andern Worten, wenn seine Gegenseiten paarweise auf einander senkrecht stehen, so sind alle umschriebenen Kegelschnitte gleichseitige Hyperbeln.

Im Allgemeinen hingegen kann einem gegebenen Viereck immer eine gleichseitige Hyperbel und zwar nur eine umschrieben werden. Die Bedingung für dieselbe ist

$$\frac{a^2}{l^2}f+\frac{b^2}{m^2}g+\frac{c^2}{n^2}h=0,$$

und liefert für die Curve selbst die Gleichung

$$\left(\frac{b^2}{m^2}-\frac{c^2}{n^2}\right)\frac{x^2}{l^2}+\left(\frac{c^2}{n^2}-\frac{a^2}{l^2}\right)\frac{y^2}{m^2}+\left(\frac{a^2}{l^2}-\frac{b^2}{m^2}\right)\frac{z^2}{n^2}=0.$$

An die im Eingange dieses Anhangs angeführte Formel habe ich noch eine Bemerkung anzuknüpfen. Man kann darin a^2, b^2, c^2 resp. gegen $\frac{B+C}{2}$, $\frac{C+A}{2}$, $\frac{A+B}{2}$ vertauschen, ohne dass der Ausdruck sich ändert. Gestützt auf diese Beobachtung erhält man mittelst einiger Reductionen

$$\cos^2 V=\frac{1}{\cos^2 W}=\frac{a^2b^2c^2}{2}\,\frac{\Sigma(-a^2+b^2+c^2)\left(\frac{C+A}{b^2}-\frac{A+B}{c^2}\right)^2}{(\Sigma a^2A)^2}.$$

Dieser Ausdruck kann nie negativ werden; denn es ist

$$2c^2.\Sigma(-a^2+b^2+c^2)\left(\frac{C+A}{b^2}-\frac{A+B}{c^2}\right)^2$$

$$=\left[(-a^2+b^2+c^2)\left(\frac{C+A}{b^2}-\frac{A+B}{c^2}\right)-(a^2-b^2+c^2)\left(\frac{A+B}{c^2}-\frac{B+C}{a^2}\right)\right]^2$$

$$+(4J)^2\left(\frac{B+C}{a^2}-\frac{C+A}{b^2}\right)^2.$$

Wenn derselbe verschwinden soll, so ist dieses nicht anders möglich, als indem

$$\frac{B+C}{a^2}=\frac{C+A}{b^2}=\frac{A+B}{c^2}$$

wird, woraus

$$A:B:C=(-a^2+b^2+c^2):(a^2-b^2+c^2):(a^2+b^2-c^2)$$

folgt. Unter dieser Bedingung ist dann die durch die Gleichung

$$Ax^2+By^2+Cz^2=0$$

dargestellte Curve ein Kreis, zu dessen Realität noch die Bedingung erfordert wird, dass eines der Quadrate a^2, b^2, c^2 die Summe der beiden übrigen übertreffe, d. h. dass das Fundamentaldreieck stumpfwinklig sei.

XI.

Neue Methode zur Summirung endlicher und unendlicher Reihen.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Bei dem überaus häufigen Gebrauche, den man in der Analysis und ihren physikalischen Anwendungen von den endlichen und unendlichen Reihen macht, darf es nicht befremden, dass man dieser eigenthümlichen Grössenform schon seit längerer Zeit besondere Aufmerksamkeit geschenkt und sie von den verschiedensten Seiten her betrachtet hat. Zwei Aufgaben und zwar die zunächst liegenden sind es vorzüglich, an denen wohl jeder Mathematiker, der auf Eroberungen auszog, seine Kräfte versucht haben mag; es sind diess die beiden Probleme, welche schon aus der blossen Aufstellung einer Gleichung zwischen einem geschlossenen Ausdrucke und einer Reihe hervorgehen: die Aufgabe der Verwandlung einer gegebenen Function in eine Reihe von vorgeschriebener Form und die Aufgabe der Summirung einer nach bestimmtem Gesetze gebildeten Reihe. Was nun das Erste anbetrifft, so ist in der That kein Mangel an hieher gehörenden Entwickelungen, und man hat in vielen Fällen die Wahl, ob man eine gegebene Function mit Taylor und Mac Laurin in eine nach Potenzen der Variablen aufsteigende, oder mit Lagrange und Fourier in eine nach den Cosinus oder Sinus der successiven Vielfachen eines Bogens fortschreitende Reihe verwandeln will. So allgemein man nun hier die Untersuchungen hielt, in sofern man nämlich auf die Entwickelung einer beliebigen Function ausging, so speziell scheint das umgekehrte Problem der Reihensummirung gefasst worden zu sein, wenigstens findet man keine durchgreifende Methode zur Summirung solcher Reihen, deren allgemeines Glied eine willkührliche Function seines Index bildet. Zwar hat Euler eine Gruppe von Formeln angegeben, die man gewöhnlich als Summenformeln zu bezeichnen pflegt, aber, streng genommen, verdienen sie diesen Namen nicht, da sie nur zur Umwandlung

der gegebenen Reihe in eine andere und zwar halbconvergente Reihe dienen und mithin Näherungsformeln sind, welche die Eigenthümlichkeit besitzen, dass man mit ihrer Hülfe die Approximation nicht so weit als man will, sondern nur bis zu einer gewissen Gränze der Genauigkeit treiben kann. Ein Hauptgrund des Mangels an Allgemeinheit, den man in den meisten Reihensummirungen bemerkt, mag wohl in der zum Theil beschränkten Auffassung des Begriffs einer Reihensumme liegen, wenigstens scheinen Manche nur dahin zu streben, dass die Summe einer vorgelegten Reihe durch die gewöhnlichen algebraischen, logarithmischen, goniometrischen und höchstens noch elliptischen Functionen, also überhaupt durch diejenigen Functionen ausgedrückt werde, für welche bereits Tafeln berechnet sind; diess ist aber nur eine Forderung des praktischen Rechners, dem an möglichster Erleichterung seiner Arbeit gelegen sein muss, die Wissenschaft dagegen darf in ihrer Allgemeinheit unter Summirung einer Reihe nichts Anderes verstehen, als Aufstellung eines geschlossenen Ausdrucks, welcher der gegebenen Reihe numerisch gleichgilt. — Zu solchen geschlossenen Ausdrücken empfiehlt sich nun ganz besonders die unter dem Namen des bestimmten Integrales bekannte häufig vorkommende Grössenform, und es unterliegt daher nach dem Vorigen keinem Zweifel, dass eine Reihe als summirt anzusehen ist, wenn man sie in die compacte Gestalt eines bestimmten Integrales verwandelt hat; lässt sich der Werth dieses Integrales durch die bekannteren Functionen ausdrücken, so giebt diess unmittelbar eine Reihensummirung in dem gewöhnlichen spezielleren Sinne.

Soll nun der Gedanke einer Summation durch bestimmte Integrale seine Ausführung erhalten, so wird es zunächst darauf ankommen, das allgemeine Glied der gegebenen Reihe selbst in ein solches Integral umzusetzen, also, weil wir die Untersuchung allgemein halten wollen, eine beliebige Function $f(n)$ des Stellenzeigers n durch ein bestimmtes Integral auszudrücken. Diess würde zwar auf verschiedene Weise möglich sein, aber nicht jede solche Gleichung zwischen $f(n)$ und einem bestimmten Integrale ist für unsere Zwecke brauchbar; erstlich nämlich muss eine derartige Gleichung von der Form sein:

$$f(n)=\int_\alpha^\beta F(n,t)\,\varphi(t)\,dt$$

worin die Integrationsgränzen von n unabhängig sind und $\varphi(t)$ kein n enthält. Denn es folgt jetzt für $n=0,1,2,3...$

$$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+\ldots.$$

$$=\int_\alpha^\beta F(0,t)\varphi(t)dt+\int_\alpha^\beta F(1,t)\varphi(t)dt+\int_\alpha^\beta F(2,t)\,\varphi(t)\,dt+\ldots.$$

d. i. weil alle Integrale gleiche Integrationsgränzen besitzen:

$$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+\dots$$
$$=\int_\alpha^\beta [F(0,t)+F(1,t)+F(2,t)+\dots]\,\varphi(t)\,dt$$

und nun muss zweitens die Function $F(n,t)$ so beschaffen sein, dass die unter dem Integralzeichen in Klammern eingeschlossene Reihe summirt werden kann. Heisst ihre Summe $\Phi(t)$, so ist dann unsere ursprüngliche Reihe auf den geschlossenen Ausdruck

$$\int_\alpha^\beta \Phi(t)\,\varphi(t)\,dt$$

zurückgebracht und somit summirt. Dieses seinem Principe nach äusserst einfache Verfahren würde z. B. sehr leicht ins Werk zu setzen sein, wenn $F(n,t)=t^n$ oder $=e^{-nt}$ wäre, und man ausserdem wüsste, von welcher Form die unbekannte Function $\varphi(t)$ sein muss, damit die Gleichung

$$f(n)=\int_\alpha^\beta t^n\varphi(t)\,dt \quad \text{oder} \quad f(n)=\int_\alpha^\beta e^{-nt}\varphi(t)\,dt$$

bestehen kann. Wollte man, wie es Abel im zweiten Bande seiner Werke in einem ähnlichen Falle gethan hat, ohne die Kenntniss von $\varphi(t)$ durchzukommen versuchen, so finge man die Rechnung mit einer Hypothese an und wüsste am Ende nicht, unter welchen Bedingungen die gefundenen Resultate Geltung haben. Glücklicherweise ist es aber durch einen guten Griff möglich, das aufgestellte Prinzip in aller Strenge durchzuführen und es besteht dann die ganze Untersuchung aus folgenden drei Hauptpunkten.

I. Es wird zunächst gezeigt, dass für jede gewissen Bedingungen unterworfene Function f und für ein wesentlich positives a, die Gleichungen

$$f(a)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t}{a^2+t^2}\,\frac{f(-t\sqrt{-1})-f(+t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}\,dt$$

und

$$f(a)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{a}{a^2+t^2}\,\frac{f(-t\sqrt{-1})+f(+t\sqrt{-1})}{2}\,dt$$

statt finden. Da der Beweis derselben nur die allerersten Eigenschaften des bestimmten Integrales in Anspruch nimmt und von jeder anderweiten Theorie unabhängig ist, so können diese Formeln, ganz abgesehen von dem Zwecke welchem sie hier dienen, auch als Mittel zur Entwickelung verschiedener bestimmter Integrale benutzt werden.

II. Eine einfache Consequenz der obigen Formeln ist die Summirung der beiden unendlichen Reihen

$$\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)\cos x+f(2)\cos 2x+f(3)\cos 3x+\ldots$$

und

$$f(1)\sin x+f(2)\sin 2x+f(3)\sin 3x+\ldots\ldots$$

so wie einer Partie anderer theils unendlicher theils endlicher Reihen von sehr allgemeinen Formen.

III. Hieran schliesst sich unmittelbar die Lehre von den halbconvergenten Reihen; die vielfach behandelte Frage nach dem Reste derartiger Reihen und den Gesetzen seiner Aenderung findet hier in ihrem ganzen Umfange eine vollständige Erledigung.

I.

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Werthe des Doppelintegrales

$$1)\qquad S=\int_{\xi}^{\Xi}dx\int_{\eta}^{T}F'(x+yi)\,dy$$

worin i die Quadratwurzel aus der negativen Einheit bedeutet und sich die Integrationsgränzen ξ und Ξ auf x, sowie η und T auf y beziehen.

Die erste Integration ist leicht auszuführen, denn für $x+yi=z$ hat man durch Differenziation in Beziehung auf y, da x für die erste Integration als constant gilt,

$$i\,dy=dz \text{ oder } dy=\frac{1}{i}\,dz$$

und mithin

$$\int F'(x+yi)\,dy=\frac{1}{i}\int F'(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{i}F(z)+C=\frac{1}{i}F(x+yi)+C.$$

Substituirt man diess nach Einführung der Gränzen $y=T$ und $y=\eta$ in 1), so wird

$$2)\qquad S=\frac{1}{i}\int_{\xi}^{\Xi}dx\,[F(x+Ti)-F(x+\eta i)].$$

In einem bestimmten Doppelintregale darf man bekanntlich die Reihenfolge der Integrationen umkehren, aber nur unter der Voraussetzung, dass die zu integrirende Function innerhalb der Integrationsgränzen weder unendlich noch discontinuirlich wird. Findet nun in 1) dieser Fall statt, giebt es also kein System von Werthen $x=a$ und $y=b$ (wobei a zwischen ξ und Ξ, b zwischen η und T liegt, durch welches $F'(x+yi)$ unendlich wird oder eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, so darf man statt der Gleichung 1) auch die folgende setzen:

$$S=\int_{\eta}^{T}dy\int_{\xi}^{\Xi}F'(x+yi)\,dy$$

$$=\int_{\eta}^{T}dy\,[F(\Xi+yi)-(\xi+yi)],$$

und wenn man diesen Werth von S mit dem früheren in 2) vergleicht, so ergiebt sich die Formel

$$\frac{1}{i}\int_{\xi}^{\Xi}[F(x+Ti)-F(x+\eta i)]\,dx$$

$$=\int_{\eta}^{T}[F(\Xi+yi)-F(\xi+yi)]\,dy.$$

Nimmt man spezieller $\xi=0$, $\Xi=\infty$, $\eta=-\infty$, $T=+\infty$ und setzt voraus, dass gleichzeitig die beiden Eigenschaften

3) $$\begin{cases} F(x+\infty i)=F(x-\infty i)=0, \\ F(\infty+yi)=0 \end{cases}$$

statt finden, so verschwindet die linke Seite der vorigen Gleichung nebst einem Theile der rechten; es bleibt nur

4) $$\int_{-\infty}^{\infty}F(yi)\,dy=0,$$

und hier muss ausser den Bedingungen 3) noch die eine erfüllt sein, dass $F'(x+yi)$ für alle x zwischen 0 und ∞, sowie für alle y zwischen $-\infty$, und $+\infty$, endlich und stetig bleibt.

Als Beispiel hierzu diene die Annahme

$$F(z)=\frac{f(z)}{a+z} \qquad (a \text{ positiv und } >0)$$

und hier bezeichne $f(z)$ eine Function der Art, dass $f'(x+yi)$ endlich und stetig bleibt für alle x zwischen 0 und ∞, sowie für alle y zwischen $-\infty$ und $+\infty$. Dass jetzt auch $F'(x+yi)$ zwischen denselben Gränzen weder unendlich noch discontinuirlich wird, ist sehr leicht einzusehen; ferner befriedigt die Function

$$F(x+yi)=\frac{f(x+yi)}{a+x+yi}=\frac{a+x-yi}{(a+x)^2+y^2}f(x+yi)$$

offenbar die Bedingungen 3), und daher ist jetzt nach Nro. 4)

5) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(yi)}{a+yi}\,dy=0,$$

wobei a eine wesentlich positive von Null verschiedene Grösse sein muss.

Die Betrachtungen, welche wir so eben durchgeführt haben, erleiden eine Modifikation in dem Falle, wo die Function $F'(x+yi)$ während der Integrationsintervalle $x=\xi$ bis $x=\Xi$ und $y=\eta$ bis $y=\Upsilon$ unendlich wird oder eine Unterbrechung der Continuität erleidet. Wir wollen annehmen, dass eine solche Discontinuität an einer einzigen Stelle, nämlich für $x=a$ und $y=b$, eintrete, wobei $\Xi>a>\xi$ und $\Upsilon>b>\eta$ sein muss. Es ist jetzt nicht mehr erlaubt, in dem Doppelintegrale 1) ohne weiteres die Integrationsordnung umzukehren, und man kann sich leicht a posteriori überzeugen, dass verschiedene Werthe herauskommen, jenachdem man die Integration nach y oder die nach x zuerst vornimmt. So wie nun aber überhaupt $\Xi>a>\xi$

$$\int_\xi^\Xi \varphi(x)dx=\int_\xi^a \varphi(x)\,dx+\int_a^\Xi \varphi(x)dx$$

$$=\int_\xi^{a-\varepsilon} \varphi(x)dx+\int_{a+\varepsilon}^\Xi \varphi(x)\,dx \quad (\text{für } \varepsilon=0)$$

ist, so können wir in diesem Falle das Integral S als den Gränzwerth ansehen, welchem sich der Ausdruck

$$6)\quad \int_\xi^{a-\varepsilon} dx\int_\eta^\Upsilon F'(x+yi)dy+\int_{a+\varepsilon}^\Xi dx\int_\eta^\Upsilon F'(x+yi)dy$$

unendlich nähert, sobald ε bis zur Null herabsinkt; da hier in keinem der beiden Doppelintegrale der zum Eintritt der Discontinuität nothwendige Werth $x=a$ vorkommt, (im ersten Integrale ist x immer kleiner als die obere Integrationsgränze $a-\varepsilon$ und im zweiten immer grösser als die untere Integrationsgränze $a+\varepsilon$), so bleibt in jedem Integrale für sich $F'(x+yi)$ stetig und man kann daher in jedem einzelnen Doppelintegrale die Integrationsordnung umkehren; statt des Ausdrucks 6) kommt so der folgende zu stehen:

$$\int_\eta^\Upsilon dy\int_\xi^{a-\varepsilon} F'(x+yi)dx+\int_\eta^\Upsilon dy\int_{a+\varepsilon}^\Xi F'(x+yi)\,dy,$$

d. i. durch Ausführung der Integrationen nach x

$$\int_\eta^\Upsilon dy\,[F(a-\varepsilon+yi)-F(\xi+yi)]$$

$$+\int_\eta^\Upsilon dy\,[F(\Xi+yi)-F(a+\varepsilon+yi)]$$

$$=\int_{\eta}^{T} dy[F(\Xi+yi)-F(\xi+yi)]$$

$$+\int_{\eta}^{T} dy[F(a-\varepsilon+yi)-F(a+\varepsilon+yi)],$$

und wenn wir nun ε bis zur Null abnehmen lassen, so erhalten wir den Werth von S. Vergleichen wir diess mit dem unter allen Umständen richtigen Werthe von S in Nro. 2), so ist

$$\frac{1}{i}\int_{\xi}^{\Xi}[F(x+Ti)-F(x+\eta i)]dx$$

$$=\int_{\eta}^{T}[F(\Xi+yi)-F(\xi+yi)]dy$$

$$+\operatorname{Lim}\int_{\eta}^{T}[F(a-\varepsilon+yi)-F(a+\varepsilon+yi)]dy;$$

hier nehmen wir wie früher $\xi=0$, $\Xi=\infty$, $\eta=-\infty$, $T=+\infty$ und setzen voraus, dass wieder die Bedingungen

$$7)\qquad \begin{cases} F(x+\infty i)=F(x-\infty i)=0 \\ F(\infty+yi)=0 \end{cases}$$

erfüllt sind; es verwandelt sich dann die vorige Gleichung nach kleiner Transposition in die folgende:

$$8)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} F(yi)dy$$

$$=\operatorname{Lim}\int_{-\infty}^{\infty}[F(a-\varepsilon+yi)-F(a+\varepsilon+yi)]dy.$$

Als Beispiel hierzu benutzen wir die Substitution

$$F(z)=\frac{f(z)}{a-z} \qquad (a \text{ positiv und } >0)$$

mit der Voraussetzung, dass die aus $f(z)$ abgeleitete Function $f'(x+yi)$ für alle x zwischen 0 und ∞, sowie für alle y zwischen $-\infty$ und $+\infty$, endlich und stetig bleibe. Es erleidet dann, wie leicht zu sehen ist,

$$F'(x+yi)=\frac{f(x+yi)}{[a-(x+yi)]^2}+\frac{f'(x+yi)}{a-(x+yi)}$$

innerhalb jener Gränzen eine einzige Unterbrechung der Stetig-

keit, nämlich für $x=a$ und $y=0$, und zugleich wird hier $F'(x+yi)$ unendlich. Ausserdem sind die Bedingungen 7) erfüllt, weil

$$F(x+yi)=\frac{f(x+yi)}{a-(x+yi)}=\frac{a-x-yi}{(a-x)^2+y^2}f(x+yi)$$

ist, und daher haben wir unter Anwendung der Formel 8)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(yi)}{a-yi}\,dy$$

$$=\text{Lim}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{f(a-\varepsilon+yi)}{\varepsilon-yi}+\frac{f(a+\varepsilon+yi)}{\varepsilon+yi}\right]dy,$$

oder wenn man die Brüche rechts auf gleichen Nenner bringt

9)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(yi)}{a-yi}\,dy$$

$$=\text{Lim}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}[f(a-\varepsilon+yi)+f(a+\varepsilon+yi)]\,dy$$

$$+\text{Lim}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yi}{\varepsilon^2+y^2}[f(a-\varepsilon+yi)-f(a+\varepsilon+yi)]\,dy.$$

Da die Function f immer stetig bleibt (weil ihr Differenzialquotient diese Eigenschaft haben soll) so ist

$$\text{Lim}\,f(a-\varepsilon+yi)=\text{Lim}\,f(a+\varepsilon+yi)=f(a+yi).$$

Dadurch vereinfacht sich die vorige Gleichung sehr und giebt

10)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(yi)}{a-yi}\,dy=2\,\text{Lim}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}f(a+yi)\,dy.$$

Wenden wir rechts den bekannten Satz an, dass $f(a+h)$ $=f(a)+hf'(a+\lambda h)$ ist, wo λ einen positiven ächten Bruch bezeichnet, so wird für $h=yi$

11)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}f(a+yi)\,dy$$

$$=f(a)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}\,dy+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon yi}{\varepsilon^2+y^2}f'(a+\lambda yi)\,dy$$

$$=f(a).\pi+\tfrac{1}{2}\varepsilon i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2y}{\varepsilon^2+y^2}f'(a+\lambda yi)\,dy.$$

Da $f'(a+yi)$ und mithin $f'(a+\lambda yi)$ immer endlich bleibt, so sind das Maximum und Minimum dieser Function endliche Grössen; nennen wir sie A und B, so folgt

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2y}{\varepsilon^2+y^2}f'(a+\lambda yi)\,dy<\tfrac{1}{2}\varepsilon i A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2y\,dy}{\varepsilon^2+y^2}$$

und zugleich

$$>\tfrac{1}{2}\varepsilon i B\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2y\,dy}{\varepsilon^2+y^2}.$$

Die Ausdrücke rechts nähern sich aber für unendlich abnehmende ε der Gränze Null, wie überhaupt für jedes reelle $\varkappa$

$$\mathrm{Lim}\left\{\varepsilon\int_{-\varkappa}^{\varkappa}\frac{2y\,dy}{\varepsilon^2+y^2}\right\}=0$$

ist, und daraus folgt nun nach dem unmittelbar Vorhergehenden

$$\mathrm{Lim}\left\{\tfrac{1}{2}\varepsilon i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2y}{\varepsilon^2+y^2}f'(a+\lambda yi)\,dy\right\}=0,$$

und nach Nro. 11)

12) $$\mathrm{Lim}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}f(a+yi)\,dy=\pi f(a).$$

Dasselbe Resultat kann man auch dadurch finden, dass man erst eine neue Variable z einführt, welche mit y durch die Gleichung $y=\varepsilon z$ verbunden ist; es wird dann

$$\mathrm{Lim}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon\,dy}{\varepsilon^2+y^2}f(a+yi)=\mathrm{Lim}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^2}f(a+\varepsilon zi)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^2}f(a)=f(a).\pi.$$

Benutzen wir nun das Resultat 12) für die Gleichung 10), so folgt

13) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(yi)}{a-yi}\,dy=2\pi f(a).$$

Wenn wir die Gleichung 5) hiervon subtrahiren, so wird

14) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yi}{a^2+y^2}f(yi)\,dy=\pi f(a),$$

und wenn wir sie dazu addiren:

$$15)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2+y^2} f(yi)\,dy = \pi f(a).$$

Zerlegen wir das Integrationsgintervall $y=-\infty$ bis $y=+\infty$ in zwei andere von $y=-\infty$ bis $y=0$ und von $y=0$ bis $y=+\infty$, so können wir statt der Gleichung 14) die folgende schreiben:

$$\pi f(a) = \int_{-\infty}^{0} \frac{yi}{a^2+y^2} f(yi)\,dy + \int_{0}^{\infty} \frac{yi}{a^2+y^2} f(yi)\,dy,$$

und hier nehmen wir im ersten Integrale $y=-t$, im zweiten $y=+t$; es wird so

$$\pi f(a) = \int_{-\infty}^{0} \frac{ti}{a^2+t^2} f(-ti)\,dt + \int_{0}^{\infty} \frac{ti}{a^2+t^2} f(+ti)\,dt$$

$$= -\int_{0}^{\infty} \frac{ti}{a^2+t^2} f(-ti)\,dt + \int_{0}^{\infty} \frac{ti}{a^2+t^2} f(+ti)\,dt.$$

Hier lassen sich beide Integrale wegen der gleichen Integrationsgränzen in ein einziges Integral zusammenziehn; schreibt man dabei $-\frac{1}{i}$ für i und dividirt beiderseits mit 2, so ergiebt sich

$$16)\qquad \frac{\pi}{2} f(a) = \int_{0}^{\infty} \frac{t}{a^2+t^2} \frac{f(-ti)-f(+ti)}{2i}\,dt.$$

Wendet man dieselbe kleine Transformation auf das Integral 15) an, so geht jene Gleichung in die folgende über:

$$17)\qquad \frac{\pi}{2} f(a) = \int_{0}^{\infty} \frac{a}{a^2+t^2} \frac{f(-ti)+f(+ti)}{2}\,dt.$$

Die Bedingung für die Gültigkeit der Formeln 16) und 17) besteht, wenn wir u und t für das frühere x und y schreiben, darin, dass $f'(u+ti)$ innerhalb der Gränzen $u=0$, $u=\infty$, $t=-\infty$, $t=+\infty$, endlich bleiben muss. Hinsichtlich des a gilt die Beschränkung, dass es nicht negativ genommen werden darf; in der ersten Formel kann, wie leicht zu sehen ist, a noch der Null gleich sein, während es in der zweiten Formel jedenfalls die Null übersteigen muss.

Nimmt man beispielsweis $f(z)=e^{-bz}$ also $f'(u+ti)=-be^{-b(u+ti)}$ $=-be^{-bu}(\cos bt - i\sin bt)$, so sind für ein positives b die der

Function f auferlegten Bedingungen erfüllt, und dann führen die Formeln 16) und 17) zu den bekannten Resultaten

$$\frac{\pi}{2}e^{-ab}=\int_0^\infty \frac{t}{a^2+t^2}\sin bt\,dt,$$

$$\frac{\pi}{2}e^{-ab}=\int_0^\infty \frac{a}{a^2+t^2}\cos bt\,dt.$$

Bevor wir von den Formeln 16) und 17) diejenigen Anwendungen machen, auf welche es in dieser Abhandlung hauptsächlich ankommt, wollen wir noch auf einige Consequenzen hinweisen, die sich unmittelbar an jene Gleichungen anknüpfen. Setzen wir die Zerlegung

$$18)\qquad f(\pm ti)=\varphi(t)\mp i\psi(t)$$

voraus, um die Formeln 16) und 17) in der etwas einfacheren Gestalt

$$19)\qquad \frac{\pi}{2}f(z)=\int_0^\infty \frac{t}{z^2+t^2}\psi(t)\,dt$$

und

$$20)\qquad \frac{\pi}{2}f(z)=\int_0^\infty \frac{z}{z^2+t^2}\varphi(t)\,dt$$

darstellen zu können, so liegt der Gedanke sehr nahe, aus ihnen durch mehrmalige Differenziation in Beziehung auf z neue Gleichungen abzuleiten, welche die Verwandlung von $f^{(n)}z$ in ein bestimmtes Integral darstellen. Es wird nämlich

$$\frac{\pi}{2}f^{(n)}(z)=\int_0^\infty D_z^n\left\{\frac{t}{z^2+t^2}\right\}\psi(t)\,dt,$$

oder auch

$$\frac{\pi}{2}f^{(n)}(z)=\int_0^\infty D_z^n\left\{\frac{z}{z^2+t^2}\right\}\varphi(t)\,dt,$$

wo die angedeuteten Differenziationen leicht auszuführen sind, wenn man

$$\frac{t}{z^2+t^2}=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{z-ti}-\frac{1}{z+ti}\right]$$

und

$$\frac{z}{z^2+t^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-ti}+\frac{1}{z+ti}\right]$$

setzt. Man findet so nach einer kleinen Reduction

$$\frac{\pi}{2}f^{(n)}(z)=(-1)^n 1.2..n\int_0^\infty \frac{\sin\left[(n+1)\operatorname{Arctan}\frac{t}{z}\right]}{(z^2+t^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}\psi(t)\,dt,$$

und aus der zweiten Formel

$$\frac{\pi}{2}f^{(n)}(z)=(-1)^n 1.2..n\int_0^\infty \frac{\cos\left[(n+1)\operatorname{Arctan}\frac{t}{z}\right]}{(z^2+t^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}\varphi(t)\,dt.$$

Setzt man in beiden Gleichungen $t=z\tan\vartheta$, wo ϑ die neue Variable der Integration bezeichnet, so wird

$$\frac{1}{z^2+t^2}=\frac{\cos^2\vartheta}{z^2}.$$

Den Gränzen $t=0$ und $t=\infty$ entsprechen die neuen Integrationsgränzen $\vartheta=\operatorname{Arctan}\frac{0}{z}=0$ und $\vartheta=\operatorname{Arctan}\frac{\infty}{z}=\frac{1}{2}\pi$, und mithin erhalten wir

$$21)\quad \frac{\pi}{2}f^{(n)}(z)=\frac{(-1)^n n'}{z^{n+1}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\psi(z\tan\vartheta)\cos^{n-1}\vartheta\sin(n+1)\vartheta\,d\vartheta$$

und

$$22)\quad \frac{\pi}{2}f^{(n)}(z)=\frac{(-1)^n n'}{z^{n+1}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\varphi(z\tan\vartheta)\cos^{n-1}\vartheta\cos(n+1)\vartheta\,d\vartheta,$$

wobei n' zur Abkürzung für $1.2\ldots n$ gebraucht worden ist. Dass sich von diesen Formeln mannichfaltige Anwendungen vermitteln lassen, ist leicht einzusehen, und wenn wir hier nicht speziell darauf eingehen, so geschieht diess nur, um eine übergrosse Digression zu vermeiden.

Eine zweite Bemerkung, welche sich an die Formeln 19) und 20) knüpft, betrifft die Bestimmung einer Function $F(u)$ der Art, dass sie der Gleichung

$$23)\quad f(a)=\int_0^\infty e^{-au}F(u)\,du$$

genügt. Erinnert man sich nämlich an die bekannten Formeln

$$\int_0^\infty e^{-au}\sin bu\,du=\frac{b}{a^2+b^2}$$

und

$$\int_0^\infty e^{-au}\cos bu\,du = \frac{a}{a^2+b^2},$$

so erkennt man auf der Stelle, dass sich die Formeln 19) und 20) auch unter der Gestalt

$$\frac{\pi}{2}f(a)=\int_0^\infty \psi(t)dt\int_0^\infty e^{-au}\sin tu\,du$$

und

$$\frac{\pi}{2}f(a)=\int_0^\infty \varphi(t)dt\int_0^\infty e^{-au}\cos tu\,du$$

darstellen lassen, wobei wieder a für z gesetzt worden ist. Durch Umkehrung der Integrationsordnung fliessen hieraus unmittelbar die Formeln

$$\frac{\pi}{2}f(a)=\int_0^\infty e^{-au}\,du\int_0^\infty \psi(t)\sin ut\,dt$$

und

$$\frac{\pi}{2}f(a)=\int_0^\infty e^{-au}\,du\int_0^\infty \varphi(t)\cos ut\,dt,$$

und wenn man diess mit der Gleichung 23) zusammenhält, so erkennt man auf der Stelle, dass die dort noch unbekannte Function $F(u)$ ihre Bestimmung erhält, indem man entweder

$$24)\qquad F(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \psi(t)\sin ut\,dt,$$

oder

$$25)\qquad F(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi(t)\cos ut\,dt$$

setzen darf. Hiermit rechtfertigt sich also die Supposition 23), welche man öfter gemacht hat, ohne jedoch die Bedingungen ihrer Gültigkeit hinzuzufügen.

II.

Mit Hülfe der im vorigen Abschnitte vollendenten Vorarbeiten können nun die Reihen

$$\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)\cos x+f(2)\cos 2x+f(3)\cos 3x+\ldots,$$
$$f(1)\sin x+f(2)\sin 2x+f(3)\sin 3x+\ldots.$$

mit der grössten Leichtigkeit summirt werden, indem man jedes einzelne Glied derselben in ein bestimmtes Integral verwandelt. Vorher aber noch eine Bemerkung. Nennen wir $\Phi(x)$ die Summe der ersten Reihe und $\Psi(x)$ die der zweiten, so erkennt man ohne Mühe die Richtigkeit der Gleichungen

$$\Phi(2\pi \pm x) = \Phi(4\pi \pm x) = \Phi(6\pi \pm x) \ldots = \Phi(x),$$
$$\Psi(2\pi + x) = \Psi(4\pi + x) = \Psi(6\pi + x) \ldots = \Psi(x);$$

und aus ihnen geht hervor, dass die Functionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ periodische Functionen von x sind. Eine unmittelbare Folge hiervon ist, dass man die Werthe von $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ nur für alle diejenigen x zu kennen braucht, welche innerhalb des Intervalles $x=0$ bis $x=\pi$ liegen. Denn wären $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ für ein anderes x aufzusuchen, so giebt es immer zwei auf einander folgende Vielfache von π, zwischen denen x enthalten sein muss; das grössere von diesen beiden Vielfachen ist entweder gerade oder ungerade; im ersten Falle, wo also $(2n-1)\pi < x < 2n\pi$ ist, setze man $x = 2n\pi - x_1$, so liegt x_1 zwischen 0 und π, und man hat $\Phi(x) = \Phi(x_1)$; ist aber das nächst höhere Vielfache von π ein ungerades, also $2n\pi < x < (2n+1)\pi$, so sei $x = 2n\pi + x_2$ und man findet jetzt $\Phi(x) = \Phi(x_2)$, wo x_2 zwischen 0 und π liegt. Für die Bestimmung von $\Psi(x)$ verfährt man ähnlich; im ersten Falle setzt man $x = (2n-1)\pi + x_1 = (2n-2)\pi + (\pi - x_1)$ und findet $\Psi(x) = \Psi(\pi - x_1)$, wo x_1 und mithin auch $\pi - x_1$ zwischen den Gränzen 0 und π enthalten ist; im zweiten Falle nimmt man $x = 2n\pi + x_2$ und hat $\Psi(x) = \Psi(x_2)$. Für negative x endlich dienen die Beziehungen $\Phi(-x) = \Phi(+x)$ und $\Psi(-x) = -\Psi(+x)$. Nach diesen Bemerkungen wird man es für keine Beeinträchtigung der Allgemeinheit halten, wenn wir uns im Folgenden auf solche x beschränken, welche in dem Intervalle 0 bis π begriffen sind.

Schreiben wir nun in den Gleichungen 19) und 20) n für z, multipliziren die erste mit $\cos nx$ und die zweite mit $\sin nx$, so ist

$$26) \qquad \frac{\pi}{2} f(n) \cos nx = \int_0^\infty \frac{t \cos nx}{n^2 + t^2} \psi(t)\, dt$$

und

$$27) \qquad \frac{\pi}{2} f(n) \sin nx = \int_0^\infty \frac{n \sin nx}{n^2 + t^2} \varphi(t)\, dt.$$

In Nro. 26) nehmen wir der Reihe nach $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ und addiren alle so entstehenden Gleichungen, indem wir jedoch von der ersten derselben nur die Hälfte in Rechnung bringen. Es wird dann

$$28) \quad \frac{\pi}{2}\left[\tfrac{1}{2} f(0) + f(1)\cos x + f(2)\cos 2x + f(3)\cos 3x + \ldots\right]$$
$$= \int_0^\infty \left[\frac{1}{2t} + \frac{t \cos x}{t^2 + 1^2} + \frac{t \cos 2x}{t^2 + 2^2} + \ldots\right] \psi(t)\, dt,$$

und ebenso ergiebt sich aus der Gleichung 27) für $n=1,2,3,\ldots$

$$29)\quad \frac{\pi}{2}\Big[f(1)\sin x+f(2)\sin 2x+f(3)\sin 3x+\ldots\Big]$$
$$=\int_0^\infty\Big[\frac{\sin x}{t^2+1^2}+\frac{2\sin 2x}{t^2+2^2}+\frac{3\sin 3x}{t^2+3^2}+\ldots\Big]\varphi(t)dt.$$

Die beiden in 28) und 29) unter den Integralzeichen vorkommenden Reihen lassen sich ohne Schwierigkeit summiren, wenn man x auf das Intervall 0 bis π beschränkt, wozu wir vorhin schon uns berechtigt fanden. Man kann die fragliche Summirung mittelst des Fourier'schen Theoremes über die Cosinus- und Sinusreihen ableiten, aber auch hiervon ganz unabhängig auf folgendem Wege dazu gelangen. Es sei

$$30)\quad y=\frac{x}{2k}+\frac{k}{1}\frac{\sin x}{k^2+1^2}+\frac{k}{2}\frac{\sin 2x}{k^2+2^2}+\frac{k}{3}\frac{\sin 3x}{k^2+3^2}+\ldots,$$

darin k eine beliebige constante Grösse und y die unbekannte Summe der, wie man leicht sieht, stets convergenten Reihe. Es folgen aus der Gleichung 30) unmittelbar die beiden Gleichungen

$$31)\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2k}+\frac{k\cos x}{k^2+1^2}+\frac{k\cos 2x}{k^2+2^2}+\frac{k\cos 3x}{k^2+3^2}+\ldots,$$

$$32)\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-k\Big[\frac{\sin x}{k^2+1^2}+\frac{2\sin 2x}{k^2+2^2}+\frac{3\sin 3x}{k^2+3^2}+\ldots\Big],$$

wobei die Reihen rechts mit denjenigen übereinkommen, um deren Summirung es sich in 28) und 29) handelt. Die Gleichung 30) lässt sich aber noch in einer anderen Form darstellen, wenn man berücksichtigt, dass identisch

$$\frac{k}{n}\frac{\sin nx}{k^2+n^2}=\frac{1}{k}\left\{\frac{\sin nx}{n}-\frac{n\sin nx}{k^2+n^2}\right\}$$

ist, und man hat dann, diese Zerlegung auf jedes einzelne Glied angewendet,

$$y=\frac{x}{2k}+\frac{1}{k}\Big[\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots\Big]$$
$$-\frac{1}{k}\Big[\frac{\sin x}{k^2+1^2}+\frac{2\sin 2x}{k^2+2^2}+\frac{3\sin 3x}{k^2+3^2}+\ldots\Big].$$

Die Summe der ersten eingeklammerten Reihe rechts ist nach einer sehr bekannten Formel $=\frac{\pi-x}{2}$, wobei aber x jederzeit >0 und $\leqq\pi$ sein muss; für die zweite Reihe können wir ihren Werth aus Nro. 32) substituiren, und so verwandelt sich die vorige Gleichung in die Differenzialgleichung

$$y = \frac{\pi}{2k} + \frac{1}{k^2}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Das vollständige Integral derselben ist

$$33) \qquad y = \frac{\pi}{2k} + C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx},$$

worin C_1 und C_2 noch unbestimmte Constanten bezeichnen. Um ihre Werthe zu finden, setzen wir zunächst in 30) und 33) $x=\pi$, was nach dem Obigen erlaubt ist; es findet sich dann

$$34) \qquad 0 = C_1 e^{k\pi} + C_2 e^{-k\pi}.$$

Ferner folgt aus 33) durch Differenziation

$$\frac{dy}{dx} = k(C_1 e^{kx} - C_2 e^{-kx}),$$

und wenn wir hier sowohl wie in Nro. 31) $x=\pi$ nehmen, so ist

$$\frac{1}{2k} - \frac{k}{k^2+1^2} + \frac{k}{k^2+2^2} + \frac{k}{k^2+3^2} + \cdots$$
$$= k(C_1 e^{k\pi} - C_2 e^{-k\pi}),$$

d. i.

$$35) \qquad \frac{\pi}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} = k(C_1 e^{k\pi} - e^{-k\pi}),$$

wie man sogleich findet, wenn man in der bekannten Gleichung

$$\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}\mu\pi = \frac{1}{2\mu} + \frac{\mu}{1^2-\mu^2} - \frac{\mu}{2^2-\mu^2} + \cdots$$

$\mu = k\sqrt{-1}$ setzt. Aus den beiden Gleichungen 34) und 35) erhalten wir nun für C_1 und C_2 die Werthe

$$C_1 = \frac{\pi}{2k}\,\frac{e^{-k\pi}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}, \quad C_2 = -\frac{\pi}{2k}\,\frac{e^{k\pi}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}};$$

und nach Nro. 33) ist der vollständig entwickelte Werth von y

$$y = \frac{\pi}{2k} - \frac{\pi}{2k}\,\frac{e^{k(\pi-x)} - e^{-k(\pi-x)}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}.$$

Substituiren wir denselben in die Gleichungen 31) und 32), so erhalten wir die Summenformeln

$$36) \qquad \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{k(\pi-x)} + e^{-k(\pi-x)}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}$$
$$= \frac{1}{2k} + \frac{k\cos x}{k^2+1^2} + \frac{k\cos 2x}{k^2+2^2} + \frac{k\cos 3x}{k^2+3^2} + \cdots$$

und

$$37)\qquad \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{k(\pi-x)}-e^{-k(\pi-x)}}{e^{k\pi}-e^{-k\pi}}$$
$$=\frac{\sin x}{k^2+1^2}+\frac{2\sin 2x}{k^2+2^2}+\frac{3\sin 3x}{k^2+3^2}+\ldots.$$

Dieselben gelten, wie aus ihrer Herleitung unmittelbar folgt, nur unter der Bedingung $\pi \geqq x > 0$; die erste liefert aber für $x=0$ noch ein wichtiges Resultat, wie man aus der Formel

$$\frac{\pi}{2}\cot\mu\pi=\frac{1}{2\mu}-\frac{\mu}{1^2-\mu^2}-\frac{\mu}{2^2-\mu^2}-\ldots..$$

für $\mu=k\sqrt{-1}$ erkennt, und daher darf man für Nro. 36) die erweiterte Bedingung $\pi\geqq x\geqq 0$ aufstellen. Schreiben wir t für k, so dienen die Formeln 36) und 37) zur Summirung der in 28) und 29) vorkommenden Reihen, und es ist daher

$$\frac{\pi}{2}\Big[\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)\cos x+f(2)\cos 2x+f(3)\cos 3x+\ldots\Big]$$
$$=\int_0^\infty \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{t(\pi-x)}+e^{-t(\pi-x)}}{e^{t\pi}-e^{-t\pi}}\psi(t)\,dt,$$

und

$$\frac{\pi}{2}\Big[f(1)\sin x+f(2)\sin 2x+f(3)\sin 3x+\ldots.\Big]$$
$$=\int_0^\infty \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{t(\pi-x)}-e^{-t(\pi-x)}}{e^{t\pi}-e^{-t\pi}}\varphi(t)\,dt,$$

oder endlich vermöge der Bedeutung von $\psi(t)$ und $\varphi(t)$

$$38)\qquad \tfrac{1}{2}f(0)+f(1)\cos x+f(2)\cos 2x+f(3)\cos 3x+\ldots$$
$$=\int_0^\infty \frac{e^{(\pi-x)t}+e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,\frac{f(-ti)-f(ti)}{2i}\,dt,$$

wobei $\pi\geqq x\geqq 0$ sein muss, und

$$39)\qquad f(1)\sin x+f(2)\sin 2x+f(3)\sin 3x+\ldots.$$
$$=\int_0^\infty \frac{e^{(\pi-x)t}-e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,\frac{f(-ti)+f(ti)}{2}\,dt,$$

unter der Bedingung, dass $\pi\geqq x>0$ ist. — Diese Gleichungen sind die zu entwickelnden Summenformeln und man kann sie in

so fern „allgemeine" nennen, als die Function $f(z)$ nur der einen Bedingung unterworfen ist, dass $f'(u+ti)$ innerhalb der Gränzen $u=0$, $u=\infty$ und $t=-\infty$, $t=+\infty$ endlich und stetig bleibt.

Ein ganz einfaches Beispiel für unsere allgemeinen Formeln liefert die Annahme

$$f(z)=\frac{1}{r+z},$$

worin r eine positive Grösse bezeichnen möge. Es ist dann für $\pi \geqq x \geqq 0$:

$$\frac{1}{2r}+\frac{\cos x}{r+1}+\frac{\cos 2x}{r+2}+\frac{\cos 3x}{r+3}+\dots$$
$$=\int_0^\infty \frac{e^{(\pi-x)t}+e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,\frac{t}{r^2+t^2}\,dt,$$

und für $\pi \geqq x > 0$:

$$\frac{\sin x}{r+1}+\frac{\sin 2x}{r+2}+\frac{\sin 3x}{r+3}+\dots\dots$$
$$=\int_0^\infty \frac{e^{(\pi-x)t}-e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,\frac{r}{r^2+t^2}\,dt.$$

Nimmt man in der zweiten Formel $r=0$, so geht das Integral in $\frac{1}{2}(\pi-x)$ über, wie man leicht nach der Regel findet, dass für ein zur Null herabsinkendes r

$$\text{Lim}\int_0^c F(t)\frac{r}{r^2+t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}F(0)$$

ist; man kommt so auf ein bekanntes Resultat.

Von besonderem Interesse ist der Umstand, dass sich die Frage nach der Convergenz der Reihen in 38) und 39) mit Leichtigkeit erledigen lässt. Wir wollen die hierzu nöthige Betrachtung zunächst an der letzten Reihe durchführen, weil sie für diese etwas einfacher als für die erste ausfällt. Nennen wir

$$\left.\begin{array}{l}A \text{ das Minimum}\\ B \text{ das Maximum}\end{array}\right\}\text{ von }\frac{f(-ti)+f(+ti)}{2}$$

während des Intervalles $t=0$ bis $t=\infty$, und beachten wir ferner, dass der Ausdruck

$$\frac{e^{(\pi-x)t}-e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}$$

innerhalb desselben Intervalles stets positiv bleibt, so erkennen wir ohne Mühe, dass der Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{e^{(\pi-x)t}-e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}} \cdot \frac{f(-ti)+f(ti)}{2}\,dt$$

mehr beträgt als

$$\int_0^\infty \frac{e^{(\pi-x)t}-e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}} A\,dt;$$

dagegen weniger als

$$\int_0^\infty \frac{e^{(\pi-x)t}-e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}} B\,dt.$$

Der Betrag des Integrales, welches hier einmal mit A und dann mit B multiplizirt wird, ist leicht zu finden, wenn man für den Ausdruck

$$\frac{1}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}=\frac{e^{-\pi t}}{1-e^{-2\pi t}}$$

die für jedes positive t convergente unendliche Reihe

$$e^{-\pi t}+e^{-3\pi t}+e^{-5\pi t}+\ldots.$$

substituirt. Das Integral nimmt dann die Form an

$$\int_0^\infty e^{-xt}\,dt+\int_0^\infty e^{-(2\pi+x)t}\,dt+\int_0^\infty e^{-(4\pi+x)t}\,dt+\ldots$$
$$-\int_0^\infty e^{-(2\pi-x)t}\,dt-\int_0^\infty e^{-(4\pi-x)t}\,dt-\ldots$$

oder nach Ausführung der einzelnen Integrationen

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2\pi+x}+\frac{1}{4\pi+x}+\frac{1}{6\pi+x}+\ldots.$$
$$-\frac{1}{2\pi-x}-\frac{1}{4\pi-x}-\frac{1}{6\pi-x}-\ldots.$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{2x}{(2\pi)^2-x^2}-\frac{2x}{(4\pi)^2-x^2}-\frac{2x}{(6\pi)^2-x^2}-\ldots.$$

und die Summe dieser Reihe ist bekanntlich $\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}x$; es liegt demnach der Werth des in Nro. 39) vorkommenden Integrales zwischen

$$\tfrac{1}{2}A\cot\tfrac{1}{2}x \text{ und } \tfrac{1}{2}B\cot\tfrac{1}{2}x$$

und da das Integral der Reihe jedenfalls gleich ist, letztere mag divergiren oder convergiren, so folgt

$$f(1)\sin x + f(2)\sin 2x + f(3)\sin 3x + \ldots$$
$$= M\{\tfrac{1}{2}A\cot\tfrac{1}{2}x,\ \tfrac{1}{2}B\cot\tfrac{1}{2}x\},$$

wobei die bekannte Bezeichnung der Mittelgrössen angewendet worden ist, der zufolge eine zwischen α und β fallende Grösse durch $M\{\alpha, \beta\}$ ausgedrückt wird. Sind nun A und B endliche Grössen, d. h. bleiben $f(-ti)$ und $f(ti)$ endlich von $t=0$ bis $t=\infty$, so folgt aus der obigen Beziehung, dass die in Rede stehende Reihe eine endliche Summe hat. Alles zusammengenommen können wir jetzt behaupten, dass jene Reihe convergirt, wenn erstlich $f'(u+ti)$ von $u=0$ bis $u=\infty$ und von $t=-\infty$ bis $t=\infty$ endlich und stetig bleibt und ausserdem $f(ti)$ während des Intervalles $t=-\infty$ bis $t=\infty$ nicht unendlich wird.

Dass unter denselben Bedingungen auch die in Nro. 38) vorkommende Reihe convergirt, ist leicht einzusehen. Stellen wir nämlich das Integral rechts in der Form

$$40)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{(\pi-x)t}+e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,t\,.\,\frac{f(-ti)-f(ti)}{2it}\,dt$$

dar, so können wir zunächst behaupten, dass der Faktor

$$\frac{f(-ti)-f(ti)}{2it}$$

von $t=0$ bis $t=\infty$ endlich bleibt. Für ein von Null verschiedenes t erhellt diess unmittelbar aus der Endlichkeit von $f(ti)$ zwischen $t=-\infty$ und $t=\infty$ oder, was Dasselbe ist, aus der Endlichkeit von $f(-ti)$ und $f(ti)$ innerhalb des Intervalles $t=0$ bis $t=\infty$; für $t=0$ dagegen wird jener Quotient $=-f'(0)$, was eine endliche Grösse ist, wegen der Voraussetzung, dass $f'(u+ti)$ für positive u und beliebige t endlich bleiben soll. Nennen wir nun

$$\left.\begin{array}{l} A' \text{ das Minimum} \\ B' \text{ das Maximum} \end{array}\right\} \text{ von } \frac{f(-ti)-f(ti)}{2it}$$

während des Intervalles $t=0$ bis $t=\infty$, so sind A' und B' endliche Grössen, und der Werth des unter Nro. 40) verzeichneten Integrales liegt zwischen

$$\int_0^\infty \frac{e^{(\pi-x)t}+e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,t\,A'\,dt$$

und

$$\int_0^\infty \frac{e^{(\pi-x)t}+e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,t\,B'\,dt.$$

Der Betrag des hier vorkommenden Integrales findet sich auf ähnliche Weise wie vorhin durch Entwickelung von

$$\frac{1}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}},$$

er ist nämlich

$$\int_0^\infty e^{-xt}\,t\,dt + \int_0^\infty e^{-(2\pi+x)t}\,t\,dt + \int_0^\infty e^{-(4\pi+x)t}\,t\,dt + \ldots$$
$$+ \int_0^\infty e^{-(2\pi-x)t}\,t\,dt + \int_0^\infty e^{-(4\pi-x)t}\,t\,dt + \ldots$$
$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2\pi+x)^2} + \frac{1}{(4\pi+x)^2} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{(2\pi-x)^2} + \frac{1}{(4\pi-x)^2} + \ldots\ldots$$

Beide Reihen convergiren für $\pi > x > 0$, und wenn wir S das Aggregat ihrer Summen nennen, so liegt der Werth des Integrales 40) zwischen $A'S$ und $B'S$, d. h. es ist für $\pi > x > 0$

$$\tfrac{1}{2}f(0) + f(1)\cos x + f(2)\cos 2x + \ldots\ldots$$
$$= M\{A'S,\ B'S\}$$

und mithin die Reihe convergent, weil A', B' und S endliche Grössen sind.

Geben wir in den allgemeinen Formeln 38) und 39) dem x specielle Werthe, so erhalten wir eben so viele besondere Formeln zur Reihensummirung. So folgt aus Nro. 38) für $x=0$

41) $$\tfrac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \ldots$$
$$= \int_0^\infty \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}\,\frac{f(-ti) - f(ti)}{2i}\,dt;$$

ferner durch die Spezialisirung $x=\pi$:

42) $$\tfrac{1}{2}f(0) - f(1) + f(2) - f(3) + f(4) - \ldots$$
$$= \int_0^\infty \frac{2}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}\,\frac{f(-ti) - f(ti)}{2i}\,dt.$$

Die halbe Differenz der Gleichungen 41) und 42) ist

43) $$f(1) + f(3) + f(5) + f(7) + \ldots\ldots$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{\frac{1}{2}\pi t} - e^{-\frac{1}{2}\pi t}}{e^{\frac{1}{2}\pi t} + e^{-\frac{1}{2}\pi t}}\,\frac{f(-ti) - f(ti)}{2i}\,dt.$$

Nimmt man endlich in Nro. 39) $x=\frac{1}{2}\pi$, so findet man noch

44)
$$f(1)-f(3)+f(5)-f(7)+\ldots\ldots$$
$$=\int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\pi t}+e^{-\frac{1}{2}\pi t}}\,\frac{f(-ti)+f(ti)}{2}\,dt.$$

Die Integrale in 41) und 43) können etwas umgewandelt werden, wenn man sich erinnert, dass

$$\frac{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}=\frac{e^{2\pi t}+1}{e^{2\pi t}-1}=1+2\frac{1}{e^{2\pi t}-1},$$

und ähnlich

$$\frac{e^{\frac{1}{2}\pi t}-e^{-\frac{1}{2}\pi t}}{e^{\frac{1}{2}\pi t}+e^{-\frac{1}{2}\pi t}}=\frac{e^{\pi t}-1}{e^{\pi t}+1}=1-2\frac{1}{e^{\pi t}+1}$$

ist. Das auf der rechten Seite in 41) vorkommende Integral zerfällt dann in die beiden Integrale

$$\int_0^\infty \frac{f(-ti)-f(ti)}{2i}\,dt+2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{f(-ti)-f(ti)}{2i},$$

und eben so wird das in Nro. 43) vorkommende Integral, abgesehen von seinem Koeffizienten,

$$=\int_0^\infty \frac{f(-ti)-f(ti)}{2i}\,dt-2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\pi t}+1}\,\frac{f(-ti)-f(ti)}{2i}.$$

Hier lässt sich das jedesmal zuerst stehende Integral kürzer ausdrücken. Multiplizirt man nämlich die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{f(-ti)-f(ti)}{2i}\,dt\,\frac{t}{t^2+z^2}=\frac{\pi}{2}f(z)$$

mit dz und integrirt darauf zwischen den Gränzen $z=0$ und $z=\infty$, so wird

$$\int_0^\infty \frac{f(-ti)-f(ti)}{2i}\,dt\int_0^\infty \frac{t\,dz}{t^2+z^2}=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty f(z)\,dz,$$

oder, weil der Werth des links nach z genommenen Integrales $=\frac{\pi}{2}$ ist,

$$\int_0^\infty \frac{f(-ti)-f(ti)}{2i}\,dt=\int_0^\infty f(z)\,dz.$$

Benutzt man diess für das Vorhergehende und schreibt der Gleichförmigkeit wegen t für z, so kommen statt der Gleichungen 41) und 43) die folgenden zu stehen:

44) $$\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\ldots\ldots$$
$$=\int_0^\infty f(t)\,dt+2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{f(-ti)-f(ti)}{2i}$$

und

45) $$f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+\ldots\ldots$$
$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty f(t)\,dt-\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\pi t}+1}\,\frac{f(-ti)-f(ti)}{2i}.$$

Setzen wir endlich $f(a+z)$ für $f(z)$, wo a eine constante Grösse bezeichnet, so nehmen die Gleichungen 44), 42), 45) und 43) die nachstehende etwas allgemeinere Gestalt an, wobei $f'(z)$ der Bedingung unterworfen sein muss, dass $f'(u+ti)$ stetig und endlich bleibt von $u=a$ bis $u=\infty$ und von $t=-\infty$ bis $t=+\infty$.

46) $$\tfrac{1}{2}f(a)+f(a+1)+f(a+2)+f(a+3)+\ldots\ldots$$
$$=\int_0^\infty f(a+t)\,dt+2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{f(a-ti)-f(a+ti)}{2i}.$$

47) $$\tfrac{1}{2}f(a)-f(a+1)+f(a+2)-f(a+3)+\ldots\ldots$$
$$=2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,\frac{f(a-ti)-f(a+ti)}{2i}.$$

48) $$f(a+1)+f(a+3)+f(a+5)+f(a+7)+\ldots\ldots$$
$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty f(a+t)\,dt-\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\pi t}+1}\,\frac{f(a-ti)-f(a+ti)}{2i}.$$

49) $$f(a+1)-f(a+3)+f(a+5)-f(a+7)+\ldots\ldots$$
$$=\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\frac{1}{2}\pi t}+e^{-\frac{1}{2}\pi t}}\,\frac{f(a-ti)+f(a+ti)}{2}.$$

Aus diesen Summenformeln für unendliche Reihen lassen sich mit der grössten Leichtigkeit ähnlich gebaute Summenformeln für endliche Reihen ableiten, indem man eine endliche Reihe als Differenz zweier unendlichen Reihen betrachtet. Nimmt man z. B. in der Gleichung 46) erst $a=0$ und dann a gleich einer positiven ganzen Zahl p, so giebt die Subtraktion der so entstehenden zwei neuen Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(p-1)+\tfrac{1}{2}f(p)$$

$$=\int_0^\infty f(t)\,dt-\int_0^\infty f(p+t)dt+2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{f(-ti)-f(ti)}{2i}$$

$$-2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{f(p-ti)-f(p+ti)}{2i},$$

wobei sich die Differenz

$$\int_0^\infty f(t)\,dt-\int_0^\infty f(p+t)\,dt$$

kürzer ausdrücken lässt, wenn man im ersten Integrale $t=z$ und im zweiten $p+t=z$ setzt; es wird dieselbe hierdurch

$$=\int_0^\infty f(z)\,dz-\int_p^\infty f(z)\,dz=\int_0^p f(z)\,dz,$$

und diess ist offenbar dasselbe wie

$$\int f(p)\,dp+\text{Const.},$$

wenn man sich nur die Constante gehörig bestimmt denkt. Die vorige Summenformel geht nach dieser Bemerkung und nach beiderseitiger Addition von $\tfrac{1}{2}f(p)-\tfrac{1}{2}f(0)$ in die folgende über:

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(p)$$

$$=\frac{1}{2}f(p)-\frac{1}{2}f(0)+\int f(p)\,dp+\text{Const.}$$

$$+2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{f(-ti)-f(ti)}{2i}$$

$$+2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{f(p+ti)-f(p-ti)}{2i}.$$

Vereinigt man hier die drei von p unabhängigen Ausdrücke

$$-\frac{1}{2}f(0),\ \text{Const.},\ 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{f(-ti)-f(ti)}{2i}$$

zu einer einzigen Constanten, welche C heissen möge, so erhalten wir endlich folgende Summenformel:

50) $$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots.+f(p)$$

$$=C+\frac{1}{2}f(p)+\int f(p)\,dp+2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{f(p+ti)-f(p-ti)}{2i}.$$

Ganz dasselbe Verfahren ist auch auf die Gleichungen 47), 48) und 49) anwendbar; bezeichnet man überhaupt immer mit C den Complex aller derjenigen Ausdrücke, welche von der willkührlichen ganzen positiven Zahl p unabhängig sind, so findet man ohne Mühe aus der Gleichung 47)

$$51)\qquad f(1)-f(2)+f(3)-\ldots+(-1)^{p-1}f(p)$$
$$=C+(-1)^{p-1}\tfrac{1}{2}f(p)+(-1)^{p-1}2\int_0^\infty\frac{dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,\frac{f(p+ti)-f(p-ti)}{2i};$$

ferner aus Nro. 48), wenn p eine gerade Zahl bezeichnet,

$$52)\qquad f(1)+f(3)+f(5)+\ldots+f(p-1)$$
$$=C+\tfrac{1}{2}\int f(p)\,dp-\int_0^\infty\frac{dt}{e^{\pi t}+1}\,\frac{f(p+ti)-f(p-ti)}{2i};$$

endlich aus Nro. 49) für ein ebenfalls gerades p

$$53)\qquad f(1)-f(3)+f(5)-\ldots+(-1)^{\frac{1}{2}p-1}f(p-1)$$
$$=C+(-1)^{\frac{1}{2}p-1}\int_0^\infty\frac{dt}{e^{\frac{1}{2}\pi t}+e^{-\frac{1}{2}\pi t}}\,\frac{f(p+ti)+f(p-ti)}{2}.$$

Dass in den Formeln 46) bis 53) alles bisher über die Summirung allgemeiner Reihen Bekannte enthalten ist, wird der nächste Abschnitt zeigen.

III.

Die Summenformeln 46) bis 53) sind noch einer bedeutenden Transformation fähig, wenn man die zwischen den Gränzen 0 und ∞ vorzunehmenden Integrationen dadurch ausführt, dass man die Functionen $f(a+ti)$ und $f(a-ti)$ in Reihen verwandelt. Diess hat nicht die mindeste Schwierigkeit, wenn man sich an die genaue Form des Theoremes von Mac Laurin erinnert, wonach

$$F(t)=F(0)+\frac{t}{1}F'(0)+\frac{t^2}{1.2}F''(0)+\ldots\ldots$$
$$\ldots+\frac{t^{m-1}}{1.2..(m-1)}F^{(m-1)}(0)+\frac{t^m}{1.2.3..m}F^{(m)}(\lambda t)$$

ist, und hier λ einen positiven ächten Bruch bezeichnet. Für $m=2n+1$ und $F(t)=\frac{1}{2i}\{f(a+ti)-f(a-ti)\}$ findet man hiernach ohne Mühe

$$53)\qquad \frac{f(a+ti)-f(a-ti)}{2i}$$
$$=\frac{t}{1}f'(a)-\frac{t^3}{1.2.3}f'''(a)+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}t^{2n-1}}{1.2\ldots(2n-1)}f^{(2n-1)}(a)$$

$$+\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{1.2...(2n+1)}\frac{f^{(2n+1)}(a+\lambda ti)+f^{(2n+1)}(a-\lambda ti)}{2},$$

und daraus ergiebt sich sehr leicht

$$54)\qquad 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\frac{f(a+ti)-f(a-ti)}{2i}$$

$$=\frac{f'(a)}{1}\,2\int_0^\infty\frac{t\,dt}{e^{2\pi t}-1}-\frac{f'''(a)}{1.2.3}\,2\int_0^\infty\frac{t^3 dt}{e^{2\pi t}-1}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(-1)^{n-1}f^{(2n-1)}(a)}{1.2.3..(2n-1)}\,2\int_0^\infty\frac{t^{2n-1}dt}{e^{2\pi t}-1}$$

$$+\frac{(-1)^n}{1.2.3..(2n+1)}\,2\int_0^\infty\frac{t^{2n+1}dt}{e^{2\pi t}-1}\frac{f^{(2n+1)}(a+ti)+f^{(2n+1)}(a-ti)}{2}.$$

Die Werthe der auf der rechten Seite stehenden Integrale sind mit Ausnahme des letzten unschwer zu bestimmen; denn es ist für ein ganzes positives k

$$2\int_0^\infty\frac{t^{2k-1}dt}{e^{2\pi t}-1}=2\int_0^\infty t^{2k-1}\left[e^{-2\pi t}+e^{-4\pi t}+e^{-6\pi t}+\ldots\right]dt$$

$$=2.\frac{1.2..(2k-1)}{(2\pi)^{2k}}\left[\frac{1}{1^{2k}}+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\ldots\right],$$

d. i., wenn man die Reihe rechts mit Hülfe der Bernoullischen Zahlen summirt:

$$55)\qquad 2\int_0^\infty\frac{t^{2k-1}dt}{e^{2\pi t}-1}=\frac{1}{2k}B_{2k-1}.$$

Benutzt man diess für die Gleichung 54), so verwandelt sich dieselbe in die folgende:

$$2\int_0^\infty\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\frac{f(a+ti)-f(a-ti)}{2i}$$

$$=\frac{B_1}{1.2}f'(a)-\frac{B_3}{1.2.3.4}f'''(a)+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}B_{2n-1}}{1.2\ldots(2n)}f^{(2n-1)}(a)$$

$$+\frac{(-1)^n}{1.2..(2n+1)}\,2\int_0^\infty\frac{t^{2n+1}dt}{e^{2\pi t}-1}\frac{f^{(2n+1)}(a+\lambda ti)+f^{(2n+1)}(a-\lambda ti)}{2}.$$

Der Werth des letzten Integrales lässt sich nicht unmittelbar angeben, wohl aber zwischen zwei Gränzen einschliessen; nennen wir nämlich

$$\left.\begin{array}{l} H_{2n+1} \text{ das Minimum} \\ K_{2n+1} \text{ das Maximum} \end{array}\right\} \text{ von } \frac{f^{(2n+1)}(a+ti)+f^{(2n+1)}(a-ti)}{2},$$

welche eintreten, wenn t das Intervall 0 bis ∞ durchläuft, so überzeugen wir uns leicht, dass das Integral

$$2\int_0^\infty \frac{t^{2n+1}dt}{e^{2\pi t}-1} \frac{f^{(2n+1)}(a+\lambda ti)+f^{(2n+1)}(a-\lambda ti)}{2}$$

mehr beträgt als

$$2\int_0^\infty \frac{t^{2n+1}dt}{e^{2\pi t}-1} H_{2n+1} = H_{2n+1} \cdot \frac{1}{2n+2} B_{2n+1},$$

dagegen aber weniger als

$$2\int_0^\infty \frac{t^{2n+1}dt}{e^{2\pi t}-1} K_{2n+1} = K_{2n+1} \cdot \frac{1}{2n+2} B_{2n+1},$$

also eine Mittelgrösse zwischen beiden ist. Insofern man nun immer eine zwischen α und β fallende Zahl als einen Bruchtheil der grösseren Zahl β ansehen darf, kann man jetzt

$$2\int_0^\infty \frac{t^{2n+1}dt}{e^{2\pi t}-1} \frac{f^{(2n+1)}(a+\lambda ti)+f^{(2n+1)}(a-\lambda ti)}{2}$$
$$= \varrho K_{2n+1} \cdot \frac{1}{2n+2} B_{2n+1}$$

setzen, wo ϱ einen positiven ächten Bruch bezeichnet. Nach dem Vorhergehenden folgt dann

$$56)\qquad 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \frac{f(a+ti)-f(a-ti)}{2i}$$
$$= \frac{B_1}{1.2} f'(a) - \frac{B_3}{1.2.3.4} f'''(a) + \frac{B_5}{1.2..6} f^{V}(a) - \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)^{n-1}B_{2n-1}}{1.2\dots(2n)} f^{(2n-1)}(a) + \frac{(-1)^n B_{2n+1}}{1.2..(2n+2)} \varrho K_{2n+1},$$

wovon wir bald nachher Gebrauch machen werden.

Nicht minder leicht ist es, den Werth des Integrales

$$57)\qquad 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}} \frac{f(a+ti)-f(a-ti)}{2i}$$

auf vollkommen analoge Weise zu entwickeln. Benutzt man wieder die unter Nro. 53) verzeichnete Substitution, so verwandelt sich dasselbe in

$$58)\quad \frac{f'(a)}{1}\,2\int_0^\infty \frac{t\,dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}} - \frac{f'''(a)}{1.2.3}\,2\int_0^\infty \frac{t^3\,dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^{n-1} f^{(2n-1)}(a)}{1.2.3\ldots(2n-1)}\,2\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}\,dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}$$

$$+ \frac{(-1)^n}{1.2.3..(2n+1)}\,2\int_0^\infty \frac{t^{2n+1}\,dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,\frac{f^{(2n+1)}(a+\lambda ti)+f^{(2n+1)}(a-\lambda ti)}{2}.$$

Mit Ausnahme des letzten Integrales stehen die Integrale unter der allgemeinen Form

$$=\int_0^\infty \frac{t^{2k-1}\,dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}} = 2\int_0^\infty t^{2k-1}\,dt\,[e^{-\pi t}+e^{-3\pi t}+e^{-5\pi t}+\ldots]$$

$$= 2\,.\,\frac{1.2\ldots(2k-1)}{\pi^{2k}}\left[\frac{1}{1^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{5^{2k}}+\ldots\right],$$

woraus man durch Summirung der Reihe findet:

$$59)\quad 2\int_0^\infty \frac{t^{2k-1}\,dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}} = \frac{2^{2k}-1}{2k}\,B_{2k-1}.$$

Was ferner das letzte Integral in Nro. 58) anbelangt, so ist klar, dass dasselbe mehr beträgt als

$$2\int_0^\infty \frac{t^{2n+1}\,dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,H_{2n+1} = \frac{2^{2n+2}-1}{2n+2}\,B_{2n+1}\,H_{2n+1}$$

und dagegen weniger als

$$2\int_0^\infty \frac{t^{2n+1}\,dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,K_{2n+1} = \frac{2^{2n+2}-1}{2n+2}\,B_{2n+1}\,K_{2n+1},$$

wobei H_{2n+1} und K_{2n+1} dieselbe Bedeutung haben wie vorhin. Es folgt daraus, dass man unser Integral d. h.

$$60)\quad 2\int_0^\infty \frac{t^{2n+1}\,dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,\frac{f^{(2n+1)}(a+\lambda ti)+f^{(2n+1)}(a-\lambda ti)}{2}$$

$$=\varrho\,\frac{2^{2n+2}-1}{2n+2}\,B_{2n+1}\,K_{2n+1}$$

zu setzen berechtigt ist, indem wieder ϱ einen positiven ächten Bruch bedeutet. Benutzt man jetzt die in 59) und 60) verzeichneten Resultate zur Umwandlung der unter Nro. 58) aufgeführten Reihe, welche dem Integrale in 57) gleich war, so findet man

$$61)\qquad 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,\frac{f(a+ti)-f(a-ti)}{2i}$$

$$=\frac{(2^2-1)B_1}{1.2}f'(a)-\frac{(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}f'''(a)+\frac{(2^6-1)B_5}{1.2..6}f^V(a)-\ldots.$$

$$\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(2^{2n}-1)B_{2n-1}}{1.2\ldots(2n)}f^{(2n-1)}(a)+\frac{(-1)^n(2^{2n+2}-1)B_{2n+1}}{1.2..(2n+2)}\varrho K_{2n+1}.$$

Ganz derselben Behandlungsweise kann man das ferner für unsere Zwecke nothwendige Integral

$$\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\pi t}+1}\,\frac{f(a+ti)-f(a-ti)}{2i}$$

unterwerfen; man gelangt aber kürzer zu dem sich dabei ergebenden Endresultate, wenn man die Gleichung 56) von der Gleichung 61) subtrahirt; es ergiebt sich so

$$62)\qquad \int_0^\infty \frac{dt}{e^{\pi t}+1}\,\frac{f(a+ti)-f(a-ti)}{2i}$$

$$=\frac{(2^1-1)B_1}{1.2}f'(a)-\frac{(2^3-1)B_3}{1.2.3.4}f'''(a)+\frac{(2^5-1)B_5}{1.2..6}f^V(a)-\ldots.$$

$$..+\frac{(-1)^{n-1}(2^{2n-1}-1)B_{2n-1}}{1.2\ldots(2n)}f^{(2n-1)}(a)+\frac{(-1)^n(2^{2n+1}-1)B_{2n+1}}{1.2\ldots(2n+2)}\varrho K_{2n+1}.$$

Wir wollen endlich noch das Integral

$$63)\qquad \int_0^\infty \frac{dt}{e^{\frac{1}{2}\pi t}+e^{-\frac{1}{2}\pi t}}\,\frac{f(a+ti)+f(a-ti)}{2}$$

einer Transformation unterwerfen, wodurch dasselbe in eine endliche Reihe umgesetzt wird. Benutzen wir nämlich das im Anfange dieses Abschnittes citirte Theorem von Mac Laurin für die Fälle $m=2n+2$ und $F(t)=\frac{1}{2}\{f(a+ti)+f(a-ti)\}$, so ist zunächst

$$\frac{f(a+ti)+f(a-ti)}{2}$$

$$=f(a)-\frac{t^2}{1.2}f''(a)+\frac{t^4}{1.2..4}f^{IV}(a)-\ldots+\frac{(-1)^n t^{2n}}{1.2..(2n)}f^{(2n)}(a)$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1.2..(2n+2)}\,\frac{f^{(2n+2)}(a+\lambda ti)+f^{(2n+2)}(a-\lambda ti)}{2},$$

und mittelst Substitution dieses Ausdrucks verwandelt sich das vorhin genannte Integral in die Reihe

$$64)\quad f(a)\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\frac{1}{2}\pi t}+e^{-\frac{1}{2}\pi t}} - \frac{f''(a)}{1.2}\int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{e^{\frac{1}{2}\pi t}+e^{-\frac{1}{2}\pi t}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^n f^{(2n)}(a)}{1.2..(2n)}\int_0^\infty \frac{t^{2n}\,dt}{e^{\frac{1}{2}\pi t}+e^{-\frac{1}{2}\pi t}}$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1}}{1.2..(2n+2)}\int_0^\infty \frac{t^{2n+2}\,dt}{e^{\frac{1}{2}\pi t}+e^{-\frac{1}{2}\pi t}}\;\frac{f^{(2n+2)}(a+\lambda ti)+f^{(2n+2)}(a-\lambda ti)}{2}.$$

Mit Ausnahme des letzten Gliedes enthalten alle Glieder Integrale von der Form

$$\int_0^\infty \frac{t^{2k}\,dt}{e^{\frac{1}{2}\pi t}+e^{-\frac{1}{2}\pi t}} = \int_0^\infty t^{2k}\,dt\,[e^{-\frac{1}{2}\pi t} - e^{-\frac{3}{2}\pi t} + e^{-\frac{5}{2}\pi t} - \ldots]$$

$$= \frac{1.2\ldots(2k).2^{2k+1}}{\pi^{2k+1}}\left[\frac{1}{1^{2k+1}} - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \ldots\right]$$

wo sich die Reihe mit Hülfe der Sekantenkoeffizienten summiren lässt; man findet so

$$65)\qquad \int_0^\infty \frac{t^{2k}\,dt}{e^{\frac{1}{2}\pi t}+e^{-\frac{1}{2}\pi t}} = \tfrac{1}{2}B_{2k}.$$

Für das im letzten Gliede der Reihe 62) vorkommende Integral gelten noch folgende Bemerkungen. Wenn H_{2n+2} und K_{2n+2} das Minimum und Maximum bezeichnen, welches die Function

$$\tfrac{1}{2}\{f^{(2n+2)}(a+ti)+f^{(2n+2)}(a-ti)\}$$

annimmt, sobald man t das Integrationsintervall $t=0$ bis $t=\infty$ durchlaufen lässt, so erhellt unmittelbar, dass der numerische Betrag von

$$66)\qquad \int_0^\infty \frac{t^{2n+2}\,dt}{e^{\frac{1}{2}\pi t}+e^{-\frac{1}{2}\pi t}}\;\frac{f^{(2n+2)}(a+\lambda ti)+f^{(2n+1)}(a-\lambda ti)}{2}$$

mehr ausmacht als

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n+2}\,dt}{e^{\frac{1}{2}\pi t}+e^{-\frac{1}{2}\pi t}}H_{2n+2} = \tfrac{1}{2}B_{2n+2}H_{2n+2};$$

dagegen aber weniger als

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n+2}\,dt}{e^{\frac{1}{2}\pi t}+e^{-\frac{1}{2}\pi t}}K_{2n+2} = \tfrac{1}{2}B_{2n+2}K_{2n+2},$$

woraus sogleich hervorgeht, dass man berechtigt ist, das in 66) verzeichnete Integral $=\varrho\,\frac{1}{2}B_{2n+2}K_{2n+2}$ zu setzen, indem man unter ϱ einen positiven ächten Bruch versteht. Nach diesen Bemer-

kungen erhält die Reihe 64), d. h. das in 63) verzeichnete Integral, folgende Gestalt:

$$67)\qquad \int_0^\infty \frac{dt}{e^{\frac{1}{2}\pi t}+e^{-\frac{1}{2}\pi t}}\,\frac{f(a+ti)+f(a-ti)}{2}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} B_0 f(a)-\frac{B_2}{1.2}f''(a)+\frac{B_4}{1.2.3.4}f^{IV}(a)-\ldots\ldots \\ \ldots+\frac{(-1)^n B_{2n}}{1.2\ldots(2n)}f^{(2n)}(a)+\frac{(-1)^{n+1}B_{2n+2}}{1.2\ldots(2n+2)}\varrho K_{2n+2}. \end{array}\right\}$$

Die Transformationen, welche wir unter 56), 61), 62) und 67) erlangt haben, setzen uns nun in den Stand, auch den früheren Summenformeln eine andere Gestalt zu geben, und zwar auf folgende Weise.

Wir benutzen zunächst die Formel 56) für die Umwandlung der Gleichung 46); es ergiebt sich so, wenn noch A für K gesetzt wird,

$$68)\qquad \tfrac{1}{2}f(a)+f(a+1)+f(a+2)+f(a+3)+\ldots.$$

$$=\int_0^\infty f(a+t)\,dt-\frac{B_1}{1.2}f'(a)+\frac{B_3}{1.2.3.4}f'''(a)-\ldots\ldots$$

$$\ldots+\frac{(-1)^n B_{2n-1}}{1.2\ldots(2n)}f^{(2n-1)}(a)+\frac{(-1)^{n+1}B_{2n+1}}{1.2\ldots.(2n+2)}\varrho A_{2n+1}.$$

Wenden wir ferner die unter Nro. 61) verzeichnete Transformation auf die Gleichung 47) an, so wird

$$69)\qquad \tfrac{1}{2}f(a)-f(a+1)+f(a+2)-f(a+3)+\ldots.$$

$$=-\frac{(2^2-1)B_1}{1.2}f'(a)+\frac{(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}f'''(a)-\ldots.$$

$$\ldots+\frac{(-1)^n(2^{2n}-1)B_{2n-1}}{1.2\ldots(2n)}f^{(2n-1)}(a)+\frac{(-1)^{n+1}(2^{2n+2}-1)B_{2n+1}}{1.2\ldots(2n+2)}\varrho A_{2n+1}.$$

Die Summenformel 48) verwandelt sich mit Hülfe der unter 62) verzeichneten Relation in die folgende:

$$70)\qquad f(a+1)+f(a+3)+f(a+5)+f(a+7)+\ldots$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty f(a+t)\,dt+\frac{(2^1-1)B_1}{1.2}f'(a)-\frac{(2^3-1)B_3}{1.2.3.4}f'''(a)+\ldots.$$

$$\ldots+\frac{(-1)^n(2^{2n-1}-1)B_{2n-1}}{1.2\ldots(2n)}f^{(2n-1)}(a)+\frac{(-1)^{n+1}(2^{2n+1}-1)B_{2n+1}}{1.2\ldots(2n+2)}\varrho A_{2n+1}.$$

Endlich ergiebt sich durch Anwendung von Nro. 67) auf Nro. 49)

$$71)\quad f(a+1)-f(a+3)+f(a+5)-f(a+7)+\dots$$
$$=\tfrac{1}{2}\Big[B_0 f(a)-\frac{B_2}{1.2}f''(a)+\frac{B_4}{1.2.3.4}f^{IV}(a)-\dots$$
$$\dots+\frac{(-1)^n B_{2n}}{1.2..(2n)}f^{(2n)}(a)+\frac{(-1)^{n+1}B_{2n+2}}{1.2..(2n+2)}\varrho A_{2n+2}\Big].$$

Für alle diese Formeln gilt die Bemerkung, dass ϱ einen positiven ächten Bruch und

$$A_m \text{ das Maximum von } \frac{f^{(m)}(a+ti)+f^{(m)}(a-ti)}{2}$$

bedeutet, welches während des Intervalles $t=0$ bis $t=\infty$ eintritt

Nicht minder leicht ist es, die vier Formeln, welche zur Summirung endlicher Reihen dienten, auf gleiche Weise umzuwandeln. Schreiben wir zunächst in der Gleichung 56) p und P für a und K, so giebt jetzt die Benutzung derselben für die Umwandlung Nro. 50) folgendes Resultat:

$$72)\quad f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(p)$$
$$=C+\tfrac{1}{2}f(p)+\int f(p)\,dp+\frac{B_1}{1.2}f'(p)-\frac{B_3}{1.2.3.4}f'''(p)+\dots$$
$$\dots+\frac{(-1)^{n-1}B_{2n-1}}{1.2..(2n)}f^{(2n-1)}(p)+\frac{(-1)^n B_{2n+1}}{1.2..(2n+2)}\varrho P_{2n+1}.$$

Die Formel 61) auf Nro. 51) angewendet liefert eben so leicht die Gleichung

$$73)\quad f(1)-f(2)+f(3)-\dots+(-1)^{p-1}f(p)$$
$$=C+\tfrac{1}{2}(-1)^{p-1}f(p)$$
$$+(-1)^{p-1}\Big[\frac{(2^2-1)B_1}{1.2}f'(p)-\frac{(2^4-1)B_3}{1.2.3.4}f'''(p)+\dots$$
$$\dots+\frac{(-1)^{n-1}(2^{2n}-1)B_{2n-1}}{1.2..(2n)}f^{(2n-1)}(p)+\frac{(-1)^n(2^{2n+2}-1)B_{2n+1}}{1.2\dots(2n+2)}\varrho P_{2n+1}\Big].$$

Aus der Formel 52) wird unter Mitwirkung von Nro. 62) die folgende, worin p eine gerade Zahl bezeichnet:

$$74)\quad f(1)+f(3)+f(5)+\dots+f(p-1)$$
$$=C+\tfrac{1}{2}\int f(p)\,dp$$
$$-\Big[\frac{(2^1-1)B_1}{1.2}f'(p)-\frac{(2^3-1)B_3}{1.2.3.4}f'''(p)+\dots$$
$$\dots+\frac{(-1)^{n-1}(2^{2n-1}-1)B_{2n-1}}{1.2\dots(2n)}f^{(2n-1)}(p)+\frac{(-1)^n(2^{2n+1}-1)B_{2n+1}}{1.2..(2n+2)}\varrho P_{2n+1}\Big].$$

Die Formel 53) endlich geht unter Berücksichtigung von Nro. 67) in die folgende über, worin wieder p eine gerade Zahl ist:

$$75)\quad f(1)-f(3)+f(5)-\ldots+(-1)^{\frac{1}{2}p-1}f(p-1)$$
$$=C+\frac{1}{2}(-1)^{\frac{1}{2}p-1}\Big[B_0 f(p)-\frac{B_2}{1.2}f''(p)+\frac{B_4}{1.2.3.4}f^{IV}(p)-\ldots$$
$$\ldots+\frac{(-1)^n B_{2n}}{1.2..(2n)}f^{(2n)}(p)+\frac{(-1)^{n+1}B_{2n+2}}{1.2..(2n+2)}\varrho P_{2n+2}\Big].$$

Für alle diese Formeln gilt die Bemerkung, dass ϱ ein positiver ächter Bruch und

$$P_m \text{ das Maximum von } \frac{f^{(m)}(p+ti)+f^{(m)}(p-ti)}{2}$$

ist, welches eintritt, wenn t das Intervall $t=0$ bis $t=\infty$ durchläuft.

Von den acht Summenformeln, welche wir hier erhalten haben, sind einige bereits von Mac Laurin, Stirling, Euler entwickelt worden, deren ältere Darstellungen jedoch in sofern als unvollständig anzusehen sind, als ihnen die Restbestimmung gänzlich mangelt. Diese letztere ist aber gerade hier um so nöthiger, als die Reihen, welche rechter Hand in den obigen Formeln vorkommen, in die Klasse der sogenannten halbconvergenten Reihen gehören, über deren Natur bisher nur wenig bekannt war. Dieser sehr fühlbare Mangel hat in neuerer Zeit einige ergänzende Untersuchungen von Poisson, Jacobi und Malmsten hervorgerufen, welche sich jedoch nur auf die Formel 72) oder eine etwas allgemeinere beziehen und deren Resultate von den hier gefundenen formell verschieden sind. Dass aber die mitgetheilten Entwickelungen in der That die vollständige Aufklärung über das Wesen der halbconvergenten Reihen enthalten, wollen wir an einem Beispiele zeigen, dessen Behandlung als Norm für jeden anderen speziellen Fall gelten kann.

Es sei in Nro. 72) $f(p)=\frac{1}{p}$, so findet man auf der Stelle

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}$$
$$=C+\frac{1}{2p}+lp$$
$$-\frac{B_1}{2p^2}+\frac{B_3}{4p^4}-\frac{B_5}{6p^6}+\ldots+\frac{(-1)^n B_{2n-1}}{(2n)p^{2n}}$$
$$+\frac{(-1)^n B_{2n+1}}{1.2\ldots(2n+2)}\varrho P_{2n+1}.$$

Um hier P_{2n+1} zu bestimmen, brauchen wir bloss zu berücksichtigen, dass in unserem Falle

$$f^{(2n+1)}(p)=-\frac{1.2...(2n+1)}{p^{2n+2}},$$

mithin

$$\frac{f^{(2n+1)}(p+ti)+f^{(2n+1)}(p-ti)}{2}$$

$$=-\frac{1.2...(2n+1)}{2}\left[\frac{1}{(p+ti)^{2n+2}}+\frac{1}{(p-ti)^{2n+2}}\right].$$

Der zwischen den Klammern befindliche Ausdruck erhält, wie sehr leicht zu sehen ist, sein Maximum für $t=0$, und daher ist

$$P_{2n+1}=-1.2.3..(2n+1)\frac{1}{p^{2+n2}}.$$

Die obige Summenformel für die reziproken natürlichen Zahlen geht jetzt in die folgende über:

$$76)\qquad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{p}=C+\frac{1}{2p}+lp$$

$$-\frac{B_1}{2p^2}+\frac{B_3}{4p^4}-....+\frac{(-1)^n B_{2n-1}}{(2n)p^{2n}}+\frac{(-1)^{n+1}\varrho B_{2n+1}}{(2n+2)p^{2n+2}},$$

so dass hier der Rest einen Bruchtheil des zuletzt in Rechnung gebrachten Gliedes der Reihe beträgt, woraus der Grad der Genauigkeit unmittelbar hervorgeht, sobald p und n spezielle Zahlenwerthe erhalten. Um noch die Constante C zu bestimmen, hält man sich an den bekannten Satz, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{p}-lp$$

für unendlich wachsende p gegen eine feste Gränze, nämlich die Constante des Integrallogarithmus (0,5772156..) convergirt; subtrahirt man daher in Nro. 76) beiderseits lp und lässt darauf p unendlich werden, so ergiebt sich

$$0{,}57721566490..=C,$$

womit der Werth von C gefunden ist. — Es liegt nun der Gedanke nahe, die auf der rechten Seite von Nro. 76) vorkommende endliche Reihe dadurch zu einer unendlichen zu machen, dass man die Gliederanzahl n derselben unbegränzt wachsen lässt. Dabei erhebt sich aber eine Schwierigkeit; da nämlich die Bernoullischen Zahlen viel rascher wachsen als eine geometrische Progression, so giebt es eine Stelle — und sie würde leicht zu bestimmen sein — von welcher ab die Reihenglieder fortwährend zunehmen, also eine divergente Reihe bilden; man kann daher diese Verlängerung der endlichen Reihe zu einer unendlichen nicht vornehmen, sondern wird die Reihe nur bis zu derjenigen Stelle fortsetzen, wo die Abnahme der Reihenglieder aufhört und die Zunahme

anfängt, d. h. bis dahin, wo der Rest der Reihe seinen kleinsten Werth erhält. Da durch letzteren immer der Genauigkeitsgrad der Rechnung bedingt ist, so erkennt man hieraus, dass die halbconvergenten Reihen gewissermassen Näherungsformeln sind, mit deren Hülfe man die unbekannte Grösse nur mit einem ganz bestimmten (durch den Zahlenwerth von p gegebenen) Genauigkeitsgrade, der aber oft sehr gross ist, berechnen kann. Noch prägnanter treten diese Betrachtungen, die sich an das obige Beispiel anknüpfen, dann hervor, wenn man sich zur Summirung der reziproken natürlichen Zahlen der Integralformel 50) unmittelbar bedient. Es ist nämlich für $f(p)=\frac{1}{p}$

$$77)\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}=C+\frac{1}{2p}+lp-2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{t}{p^2+t^2}.$$

Dass es nun hier geradezu unmöglich ist, das Integral in eine unendliche nach Potenzen von $\frac{1}{p}$ fortschreitende Reihe zu verwandeln, erhellt leicht; denn man könnte nur

$$\frac{t}{p^2+t^2}=\frac{1}{p}\,\frac{\frac{t}{p}}{1+\left(\frac{t}{p}\right)^2}=\frac{t}{p^2}-\frac{t^3}{p^4}+\frac{t^5}{p^6}-\ldots$$

setzen und so das Integral auf die Reihe

$$\frac{1}{p^2}2\int_0^\infty \frac{t\,dt}{e^{2\pi t}-1}-\frac{1}{p^4}2\int_0^\infty \frac{t^3\,dt}{e^{2\pi t}-1}+\ldots$$

bringen. Die vorhergehende Beziehung setzt jedoch voraus, dass $\frac{t}{p}$ ein ächter Bruch, d. h. $t<p$ sei, denn ausserdem ist der Quotient $\frac{t}{p^2+t^2}$ der unendlichen Reihe nicht gleich; der Bedingung $t<p$ widersprechen aber die Integrationsgränzen $t=0$, $t=\infty$, vermöge deren t jedenfalls p einmal übersteigt; es würde daher jene Reihenverwandlung unter widersprechenden Bedingungen vorgenommen sein und mithin ist sie unzulässig. Dadurch sind wir gezwungen, uns mit einer Verwandlung des Integrales in eine endliche Reihe zu begnügen, indem wir

$$\frac{t}{p^2+t^2}=\frac{t}{p^2}-\frac{t^3}{p^4}+\frac{t^5}{p^6}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}t^{2n-1}}{p^{2n}}+\frac{(-1)^n}{p^{2n}}\,\frac{t^{2n+1}}{p^2+t^2}$$

setzen, was für alle t von $t=0$ bis $t=\infty$ gilt. Es wird dann

$$2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{t}{p^2+t^2}$$
$$=\frac{1}{p^2}2\int_0^\infty \frac{tdt}{e^{2\pi t}-1}-\frac{1}{p^4}2\int_0^\infty \frac{t^3dt}{e^{2\pi t}-1}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{(-1)^{2n-1}}{p^{2n}}2\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}dt}{e^{2\pi t}-1}+\frac{(-1)^n}{p^{2n}}2\int_0^\infty \frac{t^{2n+1}dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{1}{p^2+t^2};$$

d. i. wenn man die Integrationen rechts mit Ausnahme der letzten ausführt:

$$2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{t}{p^2+t^2}$$
$$=\frac{B_1}{2p^2}-\frac{B_3}{4p^4}+\frac{B_5}{6p^6}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}B_{2n-1}}{(2n)p^{2n}}$$
$$+\frac{(-1)^n}{p^{2n}}2\int_0^\infty \frac{t^{2n+1}dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{1}{p^2+t^2}$$

Hierdurch geht die Formel 77) in die folgende über:

$$78)\qquad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}$$
$$=C+\frac{1}{2p}+lp-\frac{B_1}{2p^2}+\frac{B_3}{4p^4}-\ldots+\frac{(-1)^n B_{2n-1}}{(2n)p^{2n}}$$
$$+\frac{(-1)^{n+1}}{p^{2n}}2\int_0^\infty \frac{t^{2n+1}dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{1}{p^2+t^2},$$

und dieses Resultat ist für jedes endliche n richtig, indem der Rest Alles compensirt. Da man aber die Integration auf der rechten Seite nicht durch die gewöhnlichen Mittel ausführen kann, so muss man wenigstens Gränzen anzugeben suchen, zwischen denen der Werth des Integrales enthalten ist. Diess hat keine Schwierigkeit, wenn man berücksichtigt, dass $\frac{1}{p^2+t^2}$ weniger als $\frac{1}{p^2}$ beträgt, mithin

$$2\int_0^\infty \frac{t^{2n+1}dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{1}{p^2+t^2}<\frac{1}{p^2}2\int_0^\infty \frac{t^{2n+1}dt}{e^{2\pi t}-1}$$

d. i.

$$2\int_0^\infty \frac{t^{2n+1}dt}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{1}{p^2+t^2}<\frac{1}{p^2}\,\frac{B_{2n+1}}{2n+2}$$

sein muss, und man folglich berechtigt ist, das Integral links

$$=\frac{\varrho}{p^2}\frac{B_{2n+1}}{2n+2}$$

zu setzen, wo ϱ einen ächten Bruch bezeichnet, der nur positiv sein kann, weil der Werth des fraglichen Integrales jederzeit positiv ist. Durch diese Substitution wird die Gleichung 78) mit der unter 76) verzeichneten völlig identisch, deren Bedeutung nun keinen Zweifel mehr zulässt.

Wir schliessen hiermit unsere Untersuchungen über die Summirung der Reihen, indem wir noch die Hoffnung aussprechen, dass durch sie die Unvollkommenheiten der Reihentheorie gehoben sein mögen, über welche sich Lagrange in den Worten beklagt: „La perfection des méthodes d'approximation, dans lesquelles on emploie les séries, dépend non-seulement de la convergence des séries, mais encore de ce qu'on puisse estimer l'erreur qui résulte des termes qu'on néglige; et à cet égard l'on peut dire que presque toutes les méthodes d'approximation dont on fait usage dans la solution des problèmes géométriques et mécaniques, sont encore très imparfaites.“ (Théorie des fonctions analytiques, 2e édition, page 69).

XII.

Ueber die Auflösung der Gleichungen des vierten Grades.

Von dem

Herausgeber

und dem

Schulamts-Kandidaten Herrn W. Schlesicke

zu Greifswald.

Was in der Einleitung zu dem Aufsatze über die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades in Thl. XI. Nro. XXXIII. gesagt worden ist, findet auch auf den vorliegenden Aufsatz über

die Auflösung der Gleichungen des vierten Grades Anwendung, und soll daher hier nicht wiederholt werden. Auch die der folgenden Auflösung der Gleichungen des vierten Grades hauptsächlich zum Grunde liegende Idee, nämlich die Summe des zweiten und vierten Gliedes der transformirten Gleichung 3) gleich Null zu setzen, gehört ganz Herrn Schlesicke an. G.

Die gegebene Gleichung des vierten Grades, in welcher das zweite Glied fehlt, sei

$$1)\quad x^4+ax^2+bx+c=0.$$

Um diese Gleichung aufzulösen, setze man

$$2)\quad x=u+v,$$

so wird die aufzulösende Gleichung:

$$(u+v)^4+a(u+v)^2+b(u+v)+c=0,$$

d. i., wie man nach leichter Rechnung findet:

$$3)\quad \left.\begin{array}{l} u^4+4vu^3+(6v^2+a)u^2 \\ \qquad +(4v^3+2av+b)u \\ \qquad +v^4+av^2+bv+c \end{array}\right\}=0.$$

Die beiden willkührlichen Grössen u und v wollen wir nun so zu bestimmen suchen, dass in vorstehender Gleichung die Summe des zweiten und vierten Gliedes verschwindet, welches uns die Gleichung

$$4vu^3+(4v^3+2av+b)u=0,$$

d. i. die Gleichung

$$4)\quad u(4vu^2+4v^3+2av+b)=0$$

giebt. Diese Gleichung wird erfüllt für

$$u=0 \text{ und } 4vu^2+4v^3+2av+b=0.$$

Wollte man aber die Auflösung $u=0$ wählen, also nach 2) die unbekannte Grösse $x=v$ setzen, so hiesse dies für x nur das neue Symbol v in die gegebene Gleichung 1) einführen, wodurch natürlich die Gestalt der gegebenen Gleichung eine wesentliche Veränderung gar nicht erleidet, sondern nur auf einen anderen symbolischen Ausdruck gebracht wird. Man wird also versuchen müssen, ob nicht vielleicht die Auflösung

$$5)\quad 4vu^2+4v^3+2av+b=0$$

der Gleichung 4) zu einer wesentlichen Vereinfachung der gege-

benen Gleichung 1) oder 3) führt. Aus der vorstehenden Gleichung 5) folgt aber auf der Stelle

$$6)\quad u^2 = -\frac{4v^3+2av+b}{4v},$$

welches, in die Gleichung 3) eingeführt, die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{4v^3+2av+b}{4v}\right)^2-(6v^2+a)\frac{4v^3+2av+b}{4v}\\ +v^4+av^2+bv+c\end{array}\right\}=0,$$

oder die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}\frac{4v^3+2av+b}{4v}\left\{\frac{4v^3+2av+b}{4v}-(6v^2+a)\right\}\\ +v^4+av^2+bv+c\end{array}\right\}=0,$$

oder die Gleichung

$$\left.\begin{array}{r}-(4v^3+2av+b)(20v^3+2av-b)\\ +16v^2(v^4+av^2+bv+c)\end{array}\right\}=0$$

giebt. Entwickelt man aber diese Gleichung gehörig, so erhält man die Gleichung

$$7)\quad 64v^6+32av^4+4(a^2-4c)v^2-b^2=0,$$

d. i., wenn man

$$8)\quad 4v^2=w$$

setzt, die Gleichung

$$9)\quad w^3+2aw^2+(a^2-4c)w-b^2=0,$$

so dass also auf diese Weise die Auflösung unserer gegebenen Gleichung des vierten Grades auf die Auflösung einer Gleichung des dritten Grades*) zurückgeführt ist.

Wenn nun nicht $b=0$ ist, so ist das letzte Glied der cubischen Hülfsgleichung 9) eine (nicht verschwindende) negative Grösse, und diese Gleichung hat daher nach einem bekannten Satze jederzeit eine reelle positive Wurzel, welche auch nicht verschwindet, weil unter der gemachten Voraussetzung, dass nicht $b=0$ sei, die Gleichung 9) natürlich überhaupt keine verschwin-

*) Die Gleichung 9) ist die bekannte cubische Hülfsgleichung zur Auflösung der Gleichungen des vierten Grades, welche sich bekanntlich auch auf anderem Wege gewinnen lässt. Das vorhergehende Verfahren, zu dieser Hülfsgleichung zu gelangen, scheint mir aber neu und besonders einfach zu sein, weshalb sich dasselbe namentlich auch für die Zwecke des Unterrichts empfehlen dürfte.

dende Wurzel haben kann. Diese nicht verschwindende reelle positive Wurzel, welche unter der gemachten Voraussetzung die Gleichung 9) nothwendig haben muss, wollen wir durch $4\overline{\omega}^2$ bezeichnen. Weil dann $4\overline{\omega}^2$ ein nicht verschwindender reeller positiver Werth von w ist, so kann man nach 8)

$$10)\quad v=\pm\overline{\omega}$$

setzen, wo $\overline{\omega}$ eine nicht verschwindende reelle Grösse ist. Führt man die beiden vorhergehenden Werthe von v in die Gleichung 6) ein, so erhält man

$$11)\quad u^2=-\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}\pm b}{4\overline{\omega}},$$

also

$$12)\quad u=\begin{cases}+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}\pm b}{\overline{\omega}}},\\ -\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}\pm b}{\overline{\omega}}};\end{cases}$$

und folglich nach 2), 10), 12):

$$13)\quad x=\begin{cases}\pm\overline{\omega}+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}\pm b}{\overline{\omega}}},\\ \pm\overline{\omega}-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}\pm b}{\overline{\omega}}};\end{cases}$$

welches unter der gemachten Voraussetzung im Allgemeinen vier unter einander verschiedene völlig bestimmte endliche Werthe von x, also die vier Wurzeln sind, welche die gegebene Gleichung 1) des vierten Grades überhaupt haben kann.

Wenn

$$-\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}+b}{\overline{\omega}}>0,$$

$$-\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}-b}{\overline{\omega}}>0$$

ist, so hat die Gleichung 1) die vier folgenden Wurzeln, welche sämmtlich reell sind:

$$14)\quad x=\begin{cases}+\overline{\omega}+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}+b}{\overline{\omega}}},\\ +\overline{\omega}-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}+b}{\overline{\omega}}},\\ -\overline{\omega}+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}-b}{\overline{\omega}}},\\ -\overline{\omega}-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}-b}{\overline{\omega}}}.\end{cases}$$

Wenn

$$-\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}+b}{\overline{\omega}}<0,$$

$$-\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}-b}{\overline{\omega}}<0$$

ist, so hat die Gleichung 1) die vier folgenden Wurzeln, welche sämmtlich imaginär sind:

$$15)\quad x=\begin{cases}+\overline{\omega}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}+b}{\overline{\omega}}}.\sqrt{-1},\\ +\overline{\omega}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}+b}{\overline{\omega}}}.\sqrt{-1},\\ -\overline{\omega}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}-b}{\overline{\omega}}}.\sqrt{-1},\\ -\overline{\omega}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}-b}{\overline{\omega}}}.\sqrt{-1}.\end{cases}$$

Wenn

$$-\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}+b}{\overline{\omega}}>0,$$

$$-\frac{4\overline{\omega}^3+2a\overline{\omega}-b}{\overline{\omega}}<0$$

ist, so hat die Gleichung 1) die vier folgenden Wurzeln, von denen zwei reell und zwei imaginär sind:

$$16)\quad x=\begin{cases}+\bar\omega+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega+b}{\bar\omega}},\\ +\bar\omega-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega+b}{\bar\omega}},\\ -\bar\omega+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega-b}{\bar\omega}}.\sqrt{-1},\\ -\bar\omega-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega-b}{\bar\omega}}.\sqrt{-1}.\end{cases}$$

Wenn

$$-\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega+b}{\bar\omega}<0,$$

$$-\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega-b}{\bar\omega}>0$$

ist, so hat die Gleichung 1) die vier folgenden Wurzeln, von denen wieder zwei reell und zwei imaginär sind:

$$17)\quad x=\begin{cases}+\bar\omega+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega+b}{\bar\omega}}.\sqrt{-1},\\ +\bar\omega-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega+b}{\bar\omega}}.\sqrt{-1},\\ -\bar\omega+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega-b}{\bar\omega}},\\ -\bar\omega-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega-b}{\bar\omega}}.\end{cases}$$

Wenn

$$-\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega+b}{\bar\omega}=0,$$

$$-\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega-b}{\bar\omega}>0$$

ist, so hat die Gleichung 1) die vier folgenden Wurzeln, von denen zwei reell und gleich, die beiden andern reell und ungleich sind:

$$18)\quad x=\begin{cases}+\bar\omega,\\ +\bar\omega,\\ -\bar\omega+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega-b}{\bar\omega}},\\ -\bar\omega-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega-b}{\bar\omega}}.\end{cases}$$

Wenn

$$-\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega+b}{\bar\omega}=0,$$

$$-\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega-b}{\bar\omega}<0$$

ist, so hat die Gleichung 1) die vier folgenden Wurzeln, von denen zwei reell und einander gleich, die beiden anderen imaginär sind:

$$19)\quad x=\begin{cases}+\bar\omega\\ +\bar\omega\\ -\bar\omega+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega-b}{\bar\omega}}\cdot\sqrt{-1},\\ -\bar\omega-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega-b}{\bar\omega}}\cdot\sqrt{-1}.\end{cases}$$

Wenn

$$-\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega+b}{\bar\omega}>0,$$

$$-\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega-b}{\bar\omega}=0$$

ist, so hat die Gleichung 1) die vier folgenden Wurzeln, von denen zwei reell und ungleich, die beiden anderen reell und einander gleich sind:

$$20)\quad x=\begin{cases}+\bar\omega+\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega+b}{\bar\omega}},\\ +\bar\omega-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4\bar\omega^3+2a\bar\omega+b}{\bar\omega}},\\ -\bar\omega,\\ -\bar\omega.\end{cases}$$

Wenn

$$-\frac{4\varpi^3+2a\varpi+b}{\varpi}<0,$$

$$-\frac{4\varpi^3+2a\varpi-b}{\varpi}=0$$

ist, so hat die Gleichung 1) die vier folgenden Wurzeln, von denen zwei imaginär, die beiden anderen reell und einander gleich sind:

$$21)\quad x=\begin{cases}+\varpi+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\varpi^3+2a\varpi+b}{\varpi}}\cdot\sqrt{-1},\\ +\varpi-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\varpi^3+2a\varpi+b}{\varpi}}\cdot\sqrt{-1},\\ -\varpi,\\ -\varpi.\end{cases}$$

Dass nicht zugleich

$$-\frac{4\varpi^3+2a\varpi+b}{\varpi}=0,$$

$$-\frac{4\varpi^3+2a\varpi-b}{\varpi}=0$$

sein kann, erhellet auf der Stelle, weil sonst auch

$$\left(-\frac{4\varpi^3+2a\varpi+b}{\varpi}\right)-\left(-\frac{4\varpi^3+2a\varpi-b}{\varpi}\right)=0,$$

d. i.

$$-\frac{2b}{\varpi}=0,$$

also, weil bekanntlich nicht $\varpi=0$ ist, $b=0$ sein müsste, was gegen die Voraussetzung streitet.

Damit man versichert sei, dass man durch das Vorhergehende immer alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung 1) erhalte, ist nun noch zu untersuchen, ob, wenn

$$-\frac{4\varpi^3+2a\varpi+b}{\varpi}=0 \text{ oder } -\frac{4\varpi^3+2a\varpi-b}{\varpi}=0,$$

d. i., weil nicht $\varpi=0$ ist, wenn

$$4\varpi^3+2a\varpi+b=0 \text{ oder } 4\varpi^3+2a\varpi-b=0$$

ist, wo nach dem Vorhergehenden respective $+\varpi$ oder $-\varpi$ eine Wurzel der Gleichung 1) ist, diese Gleichung wirklich respective

die Wurzel $+\varpi$ oder $-\varpi$ zwei Mal enthält. Diese Untersuchung kann auf folgende Art angestellt werden.

Erstens sei

$$4\varpi^3+2a\varpi+b=0,$$

so ist nach dem Vorhergehenden $+\varpi$ eine Wurzel der Gleichung

$$x^4+ax^2+bx+c=0,$$

also

$$\varpi^4+a\varpi^2+b\varpi+c=0,$$

und folglich

$$x^4+ax^2+bx+c=x^4-\varpi^4+a(x^2-\varpi^2)+b(x-\varpi),$$

also, wie man leicht findet:

$$x^4+ax^2+bx+c$$
$$=(x-\varpi)\{x^3+\varpi x^2+(\varpi^2+a)x+\varpi^3+a\varpi+b\}.$$

Dividirt man nun mit $x-\varpi$ in den Factor

$$x^3+\varpi x^2+(\varpi^2+a)x+\varpi^3+a\varpi+b$$

hinein, so erhält man als Quotient

$$x^2+2\varpi x+3\varpi^2+a,$$

und als Rest

$$4\varpi^3+2a\varpi+b.$$

Weil aber nach der Voraussetzung

$$4\varpi^3+2a\varpi+b=0$$

ist, so geht $x-\varpi$ in

$$x^3+\varpi x^2+(\varpi^2+a)x+\varpi^3+a\varpi+b$$

auf, oder es ist

$$x^3+\varpi x^2+(\varpi^2+a)x+\varpi^3+a\varpi+b$$
$$=(x-\varpi)(x^2+2\varpi x+3\varpi^2+a),$$

und folglich nach dem Obigen

$$x^4+ax^2+bx+c=(x-\varpi)^2(x^2+2\varpi x+3\varpi^2+a),$$

woraus sich also ergiebt, dass die Gleichung

$$x^4+ax^2+bx+c=0$$

wirklich die Wurzel $+\varpi$ zwei Mal enthält.



Zweitens sei

$$4\varpi^3+2a\varpi-b=0,$$

so ist nach dem Vorhergehenden $-\varpi$ eine Wurzel der Gleichung

$$x^4+ax^2+bx+c=0,$$

also

$$\varpi^4+a\varpi^2-b\varpi+c=0,$$

und folglich

$$x^4+ax^2+bx+c=x^4-\varpi^4+a(x^2-\varpi^2)+b(x+\varpi),$$

also, wie man leicht findet:

$$x^4+ax^2+bx+c$$
$$=(x+\varpi)\{x^3-\varpi x^2+(\varpi^2+a)x-\varpi^3-a\varpi+b\}.$$

Dividirt man nun mit $x+\varpi$ in den Factor

$$x^3-\varpi x^2+(\varpi^2+a)x-\varpi^3-a\varpi+b$$

hinein, so erhält man als Quotient

$$x^2-2\varpi x+3\varpi^2+a,$$

und als Rest

$$-4\varpi^3-2a\varpi+b.$$

Weil aber nach der Voraussetzung

$$4\varpi^3+2a\varpi-b=0 \text{ oder } -4\varpi^3-2a\varpi+b=0$$

ist, so geht $x+\varpi$ in

$$x^3-\varpi x^2+(\varpi^2+a)x-\varpi^3-a\varpi+b$$

auf, oder es ist

$$x^3-\varpi x^2+(\varpi^2+a)x-\varpi^3-a\varpi+b$$
$$=(x+\varpi)(x^2-2\varpi x+3\varpi^2+a),$$

und folglich nach dem Obigen

$$x^4+ax^2+bx+c=(x+\varpi)^2(x^2-2\varpi x+3\varpi^2+a),$$

woraus sich also ergiebt, dass die Gleichung

$$x^4+ax^2+bx+c=0$$

wirklich die Wurzel $-\varpi$ zwei Mal enthält.*)

Hiernach ist man also versichert, durch die obigen Formeln immer alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x^4+ax^2+bx+c=0$$

vollständig zu erhalten.

Wenn $b=0$ ist, so hat die gegebene Gleichung 1) die Form

$$x^4+ax^2+c=0,$$

und kann also wie eine quadratische Gleichung aufgelöst werden, was hier nicht weiter betrachtet zu werden braucht.

Wenn die gegebene Gleichung des vierten Grades

$$22)\quad x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$$

ist, so muss man zuerst das zweite Glied auf bekannte Weise wegschaffen. Zu dem Ende setzt man

$$23)\quad x=X-\frac{1}{4}\alpha,$$

und erhält dann die Gleichung

$$24)\quad \left.\begin{array}{l} X^4+\left(\beta-\frac{3}{8}\alpha^2\right)X^2+\left(\frac{1}{8}\alpha^3-\frac{1}{2}\alpha\beta+\gamma\right)X \\ -\frac{3}{256}\alpha^4+\frac{1}{16}\alpha^2\beta-\frac{1}{4}\alpha\gamma+\delta \end{array}\right\}=0,$$

so dass man also im Vorhergehenden

$$25)\quad \left\{\begin{array}{l} a=\beta-\frac{3}{8}\alpha^2, \\ b=\frac{1}{8}\alpha^3-\frac{1}{2}\alpha\beta+\gamma, \\ c=-\frac{3}{256}\alpha^4+\frac{1}{16}\alpha^2\beta-\frac{1}{4}\alpha\gamma+\delta \end{array}\right.$$

setzen muss.

---

*) Man hätte auch leicht die vorhergehende Betrachtung dadurch abkürzen können, dass man gleich beide Fälle, wenn

$$4\varpi^2+2a\varpi\pm b=0$$

und die Wurzel der gegebenen Gleichung $\pm\varpi$ ist, in eine Betrachtung mit doppelten Zeichen zusammengezogen hätte.

Die cubische Hülfsgleichung, auf welche man in dem Falle, wenn nicht $b=0$ ist, geführt wird, kann man mit Hülfe der in dem Aufsatze Thl. XI. Nr. XXXIII. entwickelten Formeln zur allgemeinen Auflösung der Gleichungen des dritten Grades, ohne erst deren zweites Glied wegschaffen zu müssen, auflösen, so dass also in so fern der gegenwärtige Aufsatz über die Auflösung der Gleichungen des vierten Grades mit jenem Aufsatze über die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades in enger Verbindung steht.

Um die leichte Anwendbarkeit der in dem Aufsatze Thl. XI. Nr. XXXIII. und in dem vorhergehenden Aufsatze entwickelten Formeln zur Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades zu zeigen, hat Herr Schlesicke auf meine Veranlassung ein Paar Beispiele nach diesen Formeln gerechnet, welche ich im Nachstehenden noch mittheilen will. Die Beispiele sind so gewählt, dass die beiden bei den cubischen Gleichungen hervortretenden Hauptfälle bei denselben vorkommen.

I. Es sei die Gleichung des dritten Grades

$$x^3-15x^2+63x-50=0$$

gegeben, so ist

$$a=-15,\quad b=+63,\quad c=-50;$$

folglich

$$A=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c=15,\quad B=-\frac{4}{27}\left(b-\frac{1}{3}a^2\right)=256;$$

also

$$A^2-B=-31.$$

Weil nun $A^2-B<0$ ist, so setzen wir

$$D=\sqrt{B-A^2}=\sqrt{31},$$

und folglich nach Thl. XI. Nr. XXXIII. S. 360.

$$\operatorname{tang}\varphi=-\frac{\sqrt{31}}{15}.$$

Nehmen wir nun $\sqrt{31}$ mit positivem Zeichen, was indess gerade nicht unbedingt erforderlich und in dem angeführten Aufsatze auch absichtlich nicht zur Bedingung gemacht ist, so muss man, weil A positiv und D positiv ist, den Winkel φ so nehmen, dass

$$90^\circ < \varphi < 180^\circ$$

ist. Nun ist

$$\begin{aligned} \log 31 &= 1,4913617 \\ \log \sqrt{31} &= 0,7456809 \\ \log 15 &= 1,1760913 \\ \hline \log(-\operatorname{tang}\varphi) &= 9,5695896-10 \end{aligned}$$

folglich nach den Tafeln, mit Rücksicht auf die obige Bestimmung der Gränzen, zwischen denen φ genommen werden muss:

$$\varphi = 159^\circ.\,38'.\,9'',1.$$

Die positive Grösse ϱ kann nun auf die folgende zweifache Weise berechnet werden:

$$\begin{aligned} \log A &= 1,1760913 \\ \log 2 &= 0,3010300 \\ \log(-\cos\varphi) &= \begin{cases} 9,9720110-10 \\ \quad -397 \end{cases} \\ \hline \log\varrho &= 0,9030900 \end{aligned}$$

$$\text{oder}\quad \begin{aligned} \log D &= 0,7456809 \\ \log 2 &= 0,3010300 \\ \log\sin\varphi &= \begin{cases} 9,5412721-10 \\ \quad +2888 \end{cases} \\ \hline \log\varrho &= 0,9030900 \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} \log.\varrho^{\frac{1}{3}} &= 0,3010300 \\ \log\cos\frac{1}{3}\varphi &= \begin{cases} 9,7774439-10 \\ \quad -1210 \end{cases} \\ \hline \log m &= 0,0783529 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\varrho^{\frac{1}{3}} &= 0,3010300 \\ \log\sin\frac{1}{3}\varphi &= \begin{cases} 0,9034868-10 \\ \quad +677 \end{cases} \\ \log\sqrt{3} &= 0,2385607 \\ \hline \log.n\sqrt{3} &= 0,4431452 \end{aligned}$$

und hieraus

$$m = 1,1977135;\quad n\sqrt{3} = 2,7742474.$$

Also sind nach den Formeln in Thl. XI. Nr. XXXIII. S. 360. die drei Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung:

$$x = \begin{cases} 7,3954270 \\ 1,0280391 \\ 6,5765339 \end{cases}$$

Die Summe dieser drei mit negativen Vorzeichen genommenen Wurzeln ist genau -15, wie es sein muss.

II. Es sei ferner die Gleichung des vierten Grades

$$x^4 + 8x^2 + 16x - 440 = 0,$$

in welcher, wie es erforderlich ist, das zweite Glied fehlt, gegeben.

Bildet man sich nach der Formel Nro. 9) des vorhergehenden Aufsatzes die zur Auflösung dieser Gleichung des vierten Grades erforderliche cubische Hülfsgleichung, so erhält man

$$w^3+16w^2+1824w-256=0.$$

Mit Rücksicht auf die in Thl. XI. Nr. XXXIII. angewandten Bezeichnungen ist daher jetzt

$$a=+16,\ b=+1824,\ c=-256;$$

also

$$A=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c=-\frac{256}{27}.1021,$$

$$B=-\frac{4}{27}\left(b-\frac{1}{3}a^2\right)^3=-\left(\frac{256}{27}\right)^2.8661494;$$

folglich

$$A^2-B=\left(\frac{256}{27}\right)^2.9703935.$$

Weil jetzt $A^2-B>0$ ist, so müssen wir

$$C=\sqrt{A^2-B}=\frac{256}{27}\sqrt{9703935},$$

also, wenn wir diese Quadratwurzel positiv nehmen, was verstattet ist,

$$C=\frac{256}{27}.3115{,}113962602^{*})$$

setzen. Hieraus ergiebt sich ferner

$$-\frac{1}{2}(A-C)=\left(\frac{4}{3}\right)^3.8272{,}227925204;$$

$$-\frac{1}{2}(A+C)=-\left(\frac{4}{3}\right)^3.4188{,}227925204;$$

folglich

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}(A-C)}=\frac{4}{3}.20{,}224331;$$

*) Weil in diesem Falle trigonometrische Rechnung nicht vorkommt, so ist die ganze Rechnung absichtlich ohne Logarithmen geführt worden; wenn dies auch weitläufiger ist, so ist es doch mehr elementar.

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)}=-\tfrac{4}{3}.16{,}119198.$$

Daher sind nach Thl. XI. Nr. XXXIII. S. 359. die drei Wurzeln der cubischen Hülfsgleichung:

$$w=\begin{cases}+0{,}140177\\-8{,}070089+13{,}977803.\sqrt{-1}\\-8{,}070089-13{,}977803.\sqrt{-1}.\end{cases}$$

Weil die erste dieser drei Wurzeln reell und positiv ist, so setzen wir nach den im vorhergehenden Aufsatze gegebenen Regeln

$$4\varpi^2=0,\ 140177,$$

woraus sich

$$\varpi=\sqrt{0{,}035044}=0{,}1872$$

ergiebt. Also ist, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$-\frac{4\varpi^3+2a\varpi+b}{\varpi}=-4.\frac{4{,}7554}{0{,}1872}=-4.25{,}4028;$$

$$-\frac{4\varpi^3+2a\varpi-b}{\varpi}=+4.\frac{3{,}2446}{0{,}1872}=+4.17{,}3323.$$

Da hiernach

$$-\frac{4\varpi^3+2a\varpi+b}{\varpi}<0,\ -\frac{4\varpi^3+2a\varpi-b}{\varpi}>0$$

ist, so hat nach dem vorhergehenden Aufsatze die gegebene Gleichung des vierten Grades zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln, und die vier Wurzeln sind nach dem vorhergehenden Aufsatze:

$$x=\begin{cases}+0{,}1872+\sqrt{25{,}4028}.\sqrt{-1},\\+0{,}1872-\sqrt{25{,}4028}.\sqrt{-1},\\-0{,}1872+\sqrt{17{,}3323},\\-0{,}1872-\sqrt{17{,}3323};\end{cases}$$

oder

$$x = \begin{cases} +3{,}9760 \\ -4{,}3504 \\ +0{,}1872 + 5{,}0401 \,.\, \sqrt{-1} \\ +0{,}1872 - 5{,}0401 \,.\, \sqrt{-1}. \end{cases}$$

Eine angestellte Probe hat die Richtigkeit dieser vier Wurzeln bewiesen. G.

XIII.

Beweis einer Formel für π.

Von dem
Herrn Doctor E. W. Grebe,
Gymnasiallehrer zu Cassel.

Es ist mir nicht bekannt, ob die Formel

$$\pi = 2\sec\frac{1}{4}\pi.\sec\frac{1}{8}\pi.\sec\frac{1}{16}\pi.\sec\frac{1}{32}\pi\ldots\ldots,$$

bei welcher das Product unendlich vieler Factoren auf der rechten Seite offenbar convergent ist, schon von Jemandem beachtet worden ist; wäre es indessen auch der Fall, so ist doch wohl der nachstehende Beweis dieser Formel neu. Taf. III. Fig. 1. sei S der Schwerpunkt der halben Kreisperipherie ADB, ebenso seien s, s', s^0 die Schwerpunkte der Bogen DB, FB, DF. Nach einem bekannten Satze verhält sich nun aber bei einem Kreisbogen der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte zum Halbmesser wie die Sehne zum Bogen. Daher ist also $CS:1 = 2:\pi$, oder es ist

$$\pi.CS = 2.$$

Ferner ergiebt sich

$$Cs = CS.\sec\tfrac{1}{4}\pi,$$
$$Cs' = Cs\,.\,\sec\tfrac{1}{8}\pi$$

und durch unbegrenzte Fortsetzung dieser Formeln, Multiplication

derselben und gehöriges Aufheben auf beiden Seiten endlich das zu Beweisende.

Durch eine leichte Verallgemeinerung erhält man für jeden beliebigen Bogen

$$\varphi = 2\sin\frac{1}{2}\varphi.\sec\frac{1}{4}\varphi.\sec\frac{1}{8}\varphi.\sec\frac{1}{16}\varphi.\sec\frac{1}{32}\varphi\ldots\ldots$$

Nachschrift des Herausgebers.

Indem ich bemerke, dass die von Herrn Doctor Grebe im Vorhergehenden mitgetheilte Formel u. A. schon von Euler, der sie aber wohl auch nicht zuerst gefunden hat, gegeben worden ist (M. s. Leonhardi Euleri Opuscula analytica. Tomus primus. Petropoli 1783. den Aufsatz: Variae observationes circa angulos in progressione geometrica progredientes. p. 345.), erlaube ich mir derselben noch die folgenden Bemerkungen hinzuzufügen.

Wenn φ einen beliebigen Kreisbogen und n eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet, so hat man bekanntlich die folgenden allgemein gültigen Gleichungen:

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi,$$

$$\sin\frac{1}{2}\varphi = 2\sin\frac{1}{2^2}\varphi\cos\frac{1}{2^2}\varphi,$$

$$\sin\frac{1}{2^2}\varphi = 2\sin\frac{1}{2^3}\varphi\cos\frac{1}{2^3}\varphi,$$

$$\sin\frac{1}{2^3}\varphi = 2\sin\frac{1}{2^4}\varphi\cos\frac{1}{2^4}\varphi,$$

u. s. w.

$$\sin\frac{1}{2^{n-1}}\varphi = 2\sin\frac{1}{2^n}\varphi\cos\frac{1}{2^n}\varphi.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen in einander und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man die Gleichung

$$1)\quad \sin\varphi = 2^n\sin\frac{1}{2^n}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2^2}\varphi\cos\frac{1}{2^3}\varphi\ldots\cos\frac{1}{2^n}\varphi,$$

aus welcher man leicht die beiden folgenden Gleichungen ableitet:

$$2)\quad\begin{cases}\varphi\,\dfrac{\sin\frac{1}{2^n}\varphi}{\frac{1}{2^n}\varphi}=\sin\varphi\sec\frac{1}{2}\varphi\sec\frac{1}{2^2}\varphi\sec\frac{1}{2^3}\varphi\,..\,\sec\frac{1}{2^n}\varphi,\\[2ex]\varphi\,\dfrac{\tang\frac{1}{2^n}\varphi}{\frac{1}{2^n}\varphi}=\sin\varphi\sec\frac{1}{2}\varphi\sec\frac{1}{2^2}\varphi\sec\frac{1}{2^3}\varphi\ldots\sec\frac{1}{2^n}\varphi\sec\frac{1}{2^n}\varphi.\end{cases}$$

Nach einem allgemein bekannten, leicht ganz elementar zu beweisenden Satze nähert sich der Bruch

$$\frac{\sin\frac{1}{2^n}\varphi}{\frac{1}{2^n}\varphi}$$

der Einheit als seiner Gränze bis zu jedem beliebigen Grade, wenn n ins Unendliche wächst; und weil nun

$$\frac{\tang\frac{1}{2^n}\varphi}{\frac{1}{2^n}\varphi}=\frac{\sin\frac{1}{2^n}\varphi}{\frac{1}{2^n}\varphi}\cdot\frac{1}{\cos\frac{1}{2^n}\varphi},$$

die Gränze von $\cos\frac{1}{2^n}\varphi$ aber, wenn n ins Unendliche wächst, die Einheit ist, so nähert sich auch der Bruch

$$\frac{\tang\frac{1}{2^n}\varphi}{\frac{1}{2^n}\varphi}$$

der Einheit als seiner Gränze bis zu jedem beliebigen Grade, wenn n ins Unendliche wächst.

Hieraus und aus den Gleichungen 2) ergiebt sich unmittelbar, dass die Producte

$$\sin\varphi\sec\frac{1}{2}\varphi\sec\frac{1}{2^2}\varphi\sec\frac{1}{2^3}\varphi\ldots\sec\frac{1}{2^n}\varphi$$

und

$$\sin\varphi\sec\frac{1}{2}\varphi\sec\frac{1}{2^2}\varphi\sec\frac{1}{2^3}\varphi\ldots\sec\frac{1}{2^n}\varphi\sec\frac{1}{2^n}\varphi$$

sich beide dem Bogen φ als ihrer gemeinschaftlichen Gränze bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn n ins Unendliche wächst, welches wir durch

$$3)\quad \begin{cases} \varphi = \sin\varphi \sec\frac{1}{2}\varphi \sec\frac{1}{2^2}\varphi \sec\frac{1}{2^3}\varphi \ldots \sec\frac{1}{2^\infty}\varphi, \\ \varphi = \sin\varphi \sec\frac{1}{2}\varphi \sec\frac{1}{2^2}\varphi \sec\frac{1}{2^3}\varphi \ldots \sec\frac{1}{2^\infty}\varphi \sec\frac{1}{2^\infty}\varphi \end{cases}$$

ausdrücken wollen. Auch ist, wie sogleich erhellet:

$$4)\quad \begin{cases} \varphi = 2\sin\frac{1}{2}\varphi \sec\frac{1}{2^2}\varphi \sec\frac{1}{2^3}\varphi \ldots \sec\frac{1}{2^\infty}\varphi, \\ \varphi = 2\sin\frac{1}{2}\varphi \sec\frac{1}{2^2}\varphi \sec\frac{1}{2^3}\varphi \ldots \sec\frac{1}{2^\infty}\varphi \sec\frac{1}{2^\infty}\varphi. \end{cases}$$

Weil nach 2)

$$5)\quad \begin{cases} \varphi\dfrac{\sin\frac{1}{2^n}\varphi}{\frac{1}{2^n}\varphi} = 2\sin\frac{1}{2}\varphi \sec\frac{1}{2^2}\varphi \sec\frac{1}{2^3}\varphi \ldots \sec\frac{1}{2^n}\varphi, \\ \varphi\dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2^n}\varphi}{\frac{1}{2^n}\varphi} = 2\sin\frac{1}{2}\varphi \sec\frac{1}{2^2}\varphi \sec\frac{1}{2^3}\varphi \ldots \sec\frac{1}{2^n}\varphi \sec\frac{1}{2^n}\varphi \end{cases}$$

und unter der Voraussetzung, dass φ ein positiver, die halbe Peripherie nicht übersteigender Bogen, und, wie sich nach dem Obigen von selbst versteht, n nicht kleiner als die Einheit ist,

$$\frac{\sin\frac{1}{2^n}\varphi}{\frac{1}{2^n}\varphi} < 1,\quad \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2^n}\varphi}{\frac{1}{2^n}\varphi} > 1$$

ist; so ist

$$\varphi > 2\sin\frac{1}{2}\varphi \sec\frac{1}{2^2}\varphi \sec\frac{1}{2^3}\varphi \ldots \sec\frac{1}{2^n}\varphi,$$

$$\varphi < 2\sin\frac{1}{2}\varphi \sec\frac{1}{2^2}\varphi \sec\frac{1}{2^3}\varphi \ldots \sec\frac{1}{2^n}\varphi \sec\frac{1}{2^n}\varphi$$

oder

$$2\sin\frac{1}{2}\varphi\sec\frac{1}{2^2}\varphi\sec\frac{1}{2^3}\varphi\ldots\sec\frac{1}{2^n}\varphi$$

$$<\varphi<$$

$$2\sin\frac{1}{2}\varphi\sec\frac{1}{2^2}\varphi\sec\frac{1}{2^3}\varphi\ldots\sec\frac{1}{2^n}\varphi\sec\frac{1}{2^n}\varphi,$$

und die Producte

$$2\sin\frac{1}{2}\varphi\sec\frac{1}{2^2}\varphi\sec\frac{1}{2^3}\varphi\ldots\sec\frac{1}{2^n}\varphi,$$

$$2\sin\frac{1}{2}\varphi\sec\frac{1}{2^2}\varphi\sec\frac{1}{2^3}\varphi\ldots\sec\frac{1}{2^n}\varphi\sec\frac{1}{2^n}\varphi$$

sind also zwei den Bogen φ zwischen sich einschliessende Gränzen, können folglich zur näherungsweisen Berechnung des Bogens φ gebraucht werden. Dass diese beiden Gränzen sich selbst nähern, wenn n wächst, und einander auch beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur n gross genug annimmt, folglich mittelst des Vorhergehenden der Bogen φ auch zwischen beliebig engen Gränzen eingeschlossen werden kann, ist eine unmittelbare Folge aus den beiden Gleichungen 4).

Wenn man $\cos\varphi$ als bekannt annimmt, so kann man

$$\cos\frac{1}{2}\varphi,\quad \cos\frac{1}{2^2}\varphi,\quad \cos\frac{1}{2^3}\varphi,\quad \ldots\cos\frac{1}{2^n}\varphi$$

mittelst der Formeln

$$\cos\frac{1}{2}\varphi=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}},$$

$$\cos\frac{1}{2^2}\varphi=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{1}{2}\varphi}{2}},$$

$$\cos\frac{1}{2^3}\varphi=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{1}{2^2}\varphi}{2}},$$

u. s. w.

$$\cos\frac{1}{2^n}\varphi=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{1}{2^{n-1}}\varphi}{2}}$$

nach und nach durch blosses Ausziehen von Quadratwurzeln, also

mittelst einer ganz elementaren Methode berechnen. Dann kennt man natürlich auch $\sin\frac{1}{2}\varphi$ und

$$\sec\frac{1}{2^2}\varphi,\ \sec\frac{1}{2^3}\varphi,\ \sec\frac{1}{2^4}\varphi,\ \ldots\ \sec\frac{1}{2^n}\varphi.$$

Für $\varphi=\pi$ ist z. B., wenn man die Bogen in Graden, Minuten und Secunden ausdrückt:

$$\begin{aligned}
\varphi &= 180^{0}.\ 0'.\ 0'',00\\
\frac{1}{2}\varphi &= 90.\ 0.\ 0,00\\
\frac{1}{2^2}\varphi &= 45.\ 0.\ 0,00\\
\frac{1}{2^3}\varphi &= 22.30.\ 0,00\\
\frac{1}{2^4}\varphi &= 11.15.\ 0,00\\
\frac{1}{2^5}\varphi &= 5.37.30,00\\
\frac{1}{2^6}\varphi &= 2.48.45,00\\
\frac{1}{2^7}\varphi &= 1.24.22,50\\
\frac{1}{2^8}\varphi &= 0.42.11,25
\end{aligned}$$

also nach Sherwin's Tafeln (Ausgabe 1742), welche die Sekanten und deren Logarithmen enthalten:

$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$\log \sin \frac{1}{2}\varphi = 0{,}0000000$$

$$\log \sec \frac{1}{2^2}\varphi = 0{,}1505150$$

$$\log \sec \frac{1}{2^3}\varphi = 0{,}0343847$$

$$\log \sec \frac{1}{2^4}\varphi = 0{,}0084261$$

$$\log \sec \frac{1}{2^5}\varphi = 0{,}0020901$$

$$\log \sec \frac{1}{2^6}\varphi = 0{,}0005235$$

$$\log \sec \frac{1}{2^7}\varphi = 0{,}0001308$$

$$\log \sec \frac{1}{2^8}\varphi = 0{,}0000327$$

$$\overline{\quad 0{,}4971329}$$

$$\log \sec \frac{1}{2^8}\varphi = 0{,}0000327$$

$$\overline{\quad 0{,}4971656}$$

Also sind nach dem Obigen

$$0{,}4971329 \text{ und } 0{,}4971656$$

zwei Gränzen, zwischen denen $\log\varphi$, d. h. $\log\pi$, liegt, und es ist also, weil diese beiden Gränzen in den vier ersten Decimalen mit einander übereinstimmen, bis mit zur vierten Decimalstelle genau

$$\log\pi = 0{,}4971$$

was bekanntlich völlig richtig ist.

Man könnte die vorhergehende Rechnung leicht noch weiter fortführen.

XIV.

Geometrische Beweise zweier bekannten Sätze über die elliptischen Functionen der ersten Art.

Von
Herrn L. Schläfli,
Privatdocenten der Mathematik zu Bern.

So wie der Begriff des Schwerpunkts mit Nutzen aus der Mechanik in die Geometrie eingeführt worden ist, so dürfte auch der von Gauss geschaffene Begriff des Potentials bisweilen bei rein geometrischen Betrachtungen auf kurzem Wege zum Ziele führen. Vorliegender Aufsatz soll dieses an zweien bekannten Sätzen über elliptische Functionen erster Art zeigen, von denen der eine sich auf die Addition zweier Functionen von gleichem Modul, der andere auf die Verwandlung einer Function vom Modul k in eine andere, deren Modul $\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}$ ist, bezieht.

Potential eines Kreisbogens in Beziehung auf irgend einen in seiner Ebene liegenden Punkt heisst die Summe seiner durch ihre Abstände von diesem letztern dividirten Elemente; der Werth eines solchen Potentials stellt sich als elliptische Function erster Art dar. Demnach ist jeder Satz über Potentiale von Kreisbogen von selbst schon einer über elliptische Functionen der ersten Art.

1.

Satz. Man denke sich um die Mittelpunkte A und B zwei Kreise beschrieben, die einander nicht wirklich schneiden, so liegen bekanntlich auf ihrer Centrallinie AB zwei feste Punkte E, F, welche die Eigenschaft haben, dass alle durchgehenden Kreise jene zwei festen Kreise A und B rechtwinklig schneiden. Bewegt sich nun eine Sehne des Kreises A so, dass sie stets den Kreis B berührt, so durchlaufen ihre Endpunkte zwei Bogen, deren



Potentiale in Beziehung auf irgend einen der zwei Punkte E, F stets einander gleich sind. — Wenn insbesondere der erste Kreis A den andern B umschliesst und es dreht sich um diesen eine Tangente, so ist das Potential des Bogens, welchen sie von der Peripherie des Kreises A abschneidet, in Beziehung auf den Punkt E oder F constant.

Beweis. Man ziehe eine Gerade HL (Taf. III. Fig. 2.), deren einzelne Punkte von E und F gleich weit entfernt sind, so ist diese bekanntlich die Radicalaxe*) der zwei festen Kreise A und B. Nun sei MN eine Sehne des Kreises A, welche den Kreis B in K berührt und die Radicalaxe in L schneidet, so ist bekanntlich L der Mittelpunkt des durch K, E, F gehenden Kreises, und $LK^2 = LM.LN$. Aus dieser letzten Relation folgt aber, dass für jeden Punkt der Kreislinie KEF das Verhältniss seiner Abstände von M und N constant ist; also ist

$$MK:NK = ME:NE = MF:NF.$$

Wenn nun die Tangente MN durch eine unendlich kleine Drehung in die successive Lage $M'N'$ übergeht, so ist leicht einzusehen, dass sich die Bogenelemente MM', NN' wie ihre Entfernungen vom Berührungspunkte K verhalten werden, d. h. es ist

$$MM':NN' = MK:NK.$$

Folglich ist auch

$$\frac{MM'}{ME} = \frac{NN'}{NE}, \quad \text{oder} \quad \frac{MM'}{MF} = \frac{NN'}{NF}.$$

Wird diese Differentialgleichung zwischen beliebigen Gränzen integrirt, so ergiebt sich der ausgesprochene Satz.

Folgerung. Die Centrallinie schneide den Kreis A in C und D; C, E, D, F bezeichne die Ordnung, in welcher die Punkte in der Centrallinie auf einander folgen. Man ziehe die Sehnen CM und DM, welche auf einander senkrecht stehen, und setze den Peripheriewinkel $CDM = \varphi$. Dann ist die Projection von ME auf die Sehne MD derjenigen von CE gleich, also $= CE.\cos\varphi$; und die Projection von ME auf die Sehne MC ist derjenigen von ED gleich, also $= ED.\sin\varphi$; folglich ist

$$ME = CE.\sqrt{\cos^2\varphi + \left(\frac{ED}{CE}\right)^2 \sin^2\varphi}\;,$$

und, wenn man $\frac{ED}{CE} = \frac{DF}{CF} = \sqrt{1-k^2} = k'$ setzt,

---

*) Supplemente zu Klügels Wörterbuch der reinen Mathematik, Art. Anwendung der Analysis. § 8. S. 13.

$$ME = CE \, . \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\,.$$

Ferner ist das Bogenelement $MM' = CD . d\varphi$; folglich ist

$$\frac{MM'}{ME} = (1 + k') \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \frac{MM'}{MF} = (1 - k') \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

und, wenn man von C bis M integrirt, so ist das Potential des Kreisbogens CM in Beziehung auf E oder F gleich

$$(1 + k') F(k, \varphi) \text{ oder } (1 - k') F(k, \varphi).$$

Setzt man den Peripheriewinkel $CDN = \psi$, so ist eben so das Potential des Bogens CN in Beziehung auf den Punkt E gleich $(1 + k') F(k, \psi)$.

Nun sei CR eine Sehne des Kreises A, welche den Kreis B in G berührt, und $\angle CDR = \mu$. Aus dem vorigen Satze folgt aber, dass die Potentiale der Bogen CM und CN zusammengenommen dem Potentiale des Bogens CR gleich sind, d. h. es ist

$$F(k, \varphi) + F(k, \psi) = F(k, \mu),$$

und es handelt sich jetzt nur noch darum, die durch die Figur zwischen den Winkeln φ, ψ, μ gesetzte Relation auch trigonometrisch auszudrücken.

Da AM und AB unter den Winkeln $\varphi + \psi$ und $\varphi - \psi$ gegen BK geneigt sind, so ist

$$\begin{aligned} BK &= AM . \cos(\varphi + \psi) + AB . \cos(\varphi - \psi) \\ &= CB . \cos\varphi \cos\psi - BD . \sin\varphi \sin\psi; \end{aligned}$$

also, da $BK = BG = CB . \cos\mu$ ist,

$$\cos\mu = \cos\varphi \cos\psi - \frac{BD}{CB} \sin\varphi \sin\psi.$$

So wie wir vorhin

$$MK : KN = ME : EN \text{ und } ME = CE . \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

gefunden haben, so haben wir jetzt auch

$$RG : CG = RE : CE = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mu} : 1.$$

Da aber BG und DR mit einander parallel sind, so folgt

$$\frac{BD}{CB} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mu},$$

$$\cos\mu = \cos\varphi \cos\psi - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mu} . \sin\varphi \sin\psi,$$

welche Formel das bekannte, zuerst von Euler*) gefundene algebraische Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}=0$$

darstellt.

Anmerkung. Die hier angewandte Figur dient übrigens dazu, wenn die Amplituden $-\psi$ und μ gegeben sind, eine dritte Amplitude φ zu finden, welche durch die Gleichung

$$F(\varphi)=F(-\psi)+F(\mu)$$

bestimmt ist; sie dient daher auch, wenn die Kreise A und B fest bleiben, zur wiederholten Addition der Function $F(\mu)$ und somit zur geometrischen Auflösung der Aufgabe der Multiplication der elliptischen Functionen. Ich habe dieselbe aus den Supplementen zu Klügel's Wörterbuch der reinen Mathematik, Art. Elliptische Functionen. §21., entlehnt. Dort wird sie Herrn Prof. Jacobi zugeschrieben, aber das Werk nicht genannt, worin er sie mitgetheilt hat; dagegen wird auf das dritte Supplement, S. 174, zu Legendre's Abhandlung über die elliptischen Functionen verwiesen. Da nun die Originalschriften über die erwähnte geometrische Construction mir nicht zu Gebot standen, so konnte ich nicht wissen, ob dieselben die hier gezeigte Anwendung jener Construction auf den geometrischen Beweis des bekannten Additionstheorems auch schon enthalten.**)

II.

Wir wollen jetzt die Umwandlungsformel, mittelst welcher der Modul einer elliptischen Function der Null oder der Einheit so nahe gebracht werden kann, als man nur will, geometrisch beweisen. Der Modul und die Amplitudo der zu verwandelnden elliptischen Function seien k, φ, das Complement des Moduls sei $k'=\sqrt{1-k^2}$. Man beschreibe um den Mittelpunkt A (Taf. III. Fig. 3.) einen Kreis, und bestimme auf der Verlängerung seines Durchmessers CD einen Punkt F so, dass $CF:DF=1:k'$ sei, und mache den Peripheriewinkel $CDM=\varphi$. Dann ist nach dem Vorigen das Potential des Kreisbogens CM in Beziehung auf den Punkt F gleich $\frac{CD}{CF}.F(k,\varphi)$. Dasselbe Potential kann aber noch auf andere Weise ausgedrückt werden. Man ziehe die durch F gehende Sehne MN, halbire sie in O und errichte DT

*) Klügel's Wörterbuch, Art. Integralgleichung. § 47—50. Supplemente dazu, Art. Elliptische Functionen. § 14.

**) Leider ist es mir in diesem Augenblicke nicht möglich, die eigentliche Quelle, aus der obige Construction entlehnt ist, nachzuweisen. Legendre sagt a. a. O. p. 177. nur: „la construction géométrique, que nous avons donee d'après M. Jacobi, qui en est l'inventeur" und verweis't früher (p. 169.) auf Schumacher's astronomische Nachrichten. Nr. 127., deren betreffender Band mir aber jetzt gerade nicht zu Gebote steht. G.

senkrecht darauf, so wird DT mit der Sehne CM parallel sein. Dann drehe man die Sehne MN unendlich wenig um den Punkt F, so dass sie in die successive Lage $M'N'$ übergeht, und bezeichne den Winkel AMF durch φ_1, so ist $\angle MAN - \angle M'AN' = 2\,d\varphi_1$, folglich $MM' + NN' = CD \,.\, d\varphi_1$. Nun ist offenbar $\frac{MM'}{MF} = \frac{NN'}{NF}$, und daher

$$\frac{MM'}{MF} = \frac{MM' + NN'}{MF + NF} = \frac{AD}{OF} d\varphi_1 .$$

Es ist aber

$$OF^2 = AF^2 - AO^2 = AF^2 - AD^2 . \sin^2\varphi_1 .$$

Da nun

$$\frac{AD}{AF} = \frac{CF - DF}{CF + DF} = \frac{1-k'}{1+k'} = k_1$$

ist, so folgt

$$OF = AF . \sqrt{1 - k_1{}^2 \sin^2\varphi_1} ,$$

$$\frac{MM'}{MF} = \frac{AD}{AF} . \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - k_1{}^2 \sin^2\varphi_1}} ,$$

Potential des Bogens $CM = \frac{AD}{AF} \cdot F(k_1, \varphi_1)$.

Vergleicht man die beiden Ausdrücke für dasselbe Potential, so ergiebt sich

$$F(k, \varphi) = \frac{CF}{2AF} F(k_1, \varphi_1) = \frac{1}{1+k'} F(k_1, \varphi_1) .$$

Die beiden Relationen, welche dazu dienen, die eine der Amplituden φ und φ_1 aus der andern zu berechnen, gehen auch unmittelbar aus der Figur hervor. Da im $\triangle MAF$ der Winkel F gleich $2\varphi - \varphi_1$ und $AF : AM = 1 : k_1$ ist, so folgt aus der Proportionalität der Seiten dieses Dreiecks mit den Sinussen der gegenüberliegenden Winkel die Gleichung

$$\sin(2\varphi - \varphi_1) = k_1 \sin\varphi_1 .$$

Ferner ist $\angle DMF = \varphi_1 - \varphi$, also $DT = MD . \mathrm{tang}(\varphi_1 - \varphi)$. Da nun $MC = MD . \mathrm{tang}\,\varphi$, und $CM : DT = CF : DF = 1 : k'$ ist, so folgt

$$\mathrm{tang}(\varphi_1 - \varphi) = k' \mathrm{tang}\,\varphi .$$

Man vergleiche Klügel's Wörterbuch Art. Rectification. § 32. 33., und Supplemente, Art. Elliptische Functionen. § 29.

XV.

Ueber eine Fläche vierten Grades.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Bezeichnen wir mit a eine constante Gerade, welche der Parameter unserer Fläche heissen möge, so ist die Gleichung

$$1)\qquad a^3z=x^2y^2$$

der Repräsentant einer Fläche vierten Grades, die eine nicht uninterressante Discussion zulässt. Um zunächst die Gestalt derselben beurtheilen zu können, legen wir drei Ebenen durch sie, welche den Coordinatenebenen xy, xz, yz in den Entfernungen $z=\gamma$, $y=\beta$, $x=\alpha$ parallel laufen. Von diesen Ebenen schneidet die erste unsere Fläche in einer Curve, deren Gleichung

$$x^2y^2=a^3\gamma \text{ oder } xy=\sqrt{a^3\gamma}$$

ist und welche demnach eine gleichseitige Hyperbel darstellt, deren Asymptoten die Achsen der x und y sind. Schneiden wir ferner unsere Fläche durch eine Ebene, welche in der Entfernung β der Coordinatenebene xz parallel ist, so hat die entstehende Durchschnittsfigur die Gleichung

$$a^3z=x^2\beta^2 \text{ oder } z=\frac{\beta^2}{a^3}x^2,$$

und sie bildet folglich eine Parabel, deren Achse in der Richtung der z liegt und deren Parameter

$$=\sqrt{\frac{a^3}{\beta^2}}$$

ist. Schneidet man endlich die Fläche durch eine in der Entfernung $x=\alpha$ zur Ebene yz parallel gelegte Ebene, so wird

$$a^3 z = \alpha^2 y^2 \text{ oder } z = \frac{\alpha^2}{a^3} y^2 \,,$$

und der Schnitt ist demnach wieder eine Parabel, deren Achse in der Richtung der z liegt und deren Parameter

$$= \sqrt{\frac{a^3}{\alpha^2}}$$

ist. Diese Betrachtungen reichen hin, um sich von der Fläche eine deutliche Vorstellung zu machen; Taf. III. Fig. 4. giebt eine Abbildung des Theiles von ihr, welcher zwischen den positiven Theilen der Coordinatenachsen enthalten und worin $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$ ist.

Beschreibt man aus O mit einem willkührlichen Halbmesser $OE = b$ einen Viertelkreis in der Ebene xy und lässt von jedem Punkte auf der Peripherie desselben, wie z. B. P, eine Gerade $\parallel OC$ aufsteigen, so schneidet dieselbe die Fläche in einem Punkte Q, und diese Punkte bilden in ihrer Continuität eine Curve doppelter Krümmung EQF, welche man auch als Durchschnitt unserer Fläche und eines gewöhnlichen Cylinders ansehen kann. Bemerkenswerth ist nun, dass sich die Grösse der Fläche $OEQFO$ auf einen sehr einfachen Ausdruck bringen lässt. Nach der allgemeinen Complanationsformel haben wir nämlich für $OEQFO = \Omega$

$$\Omega = \int\!\!\int dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \,,$$

d. i. in unserem Falle, wo z aus Nro. 1) bestimmt wird,

$$\Omega = \int\!\!\int dx\, dy \sqrt{1 + \frac{4x^2y^4}{a^6} + \frac{4x^4y^2}{a^6}} \,.$$

Hier müssen sich die Integrationen auf alle die Punkte der Ebene xy beziehen, welche innerhalb oder wenigstens nicht ausserhalb des Quadranten $OEPF$ liegen, und daher sind x und y an die Bedingung

$$x^2 + y^2 \leqq b^2$$

geknüpft. Giebt man x den Spielraum $x = 0$ bis $x = b = OE$, so folgt daraus, dass y zwischen den Gränzen

$$y = 0 \,,\; y = \sqrt{b^2 - x^2}$$

enthalten sein muss und daher ist jetzt:

$$2)\qquad \Omega=\int_0^b dx\int_0^{\sqrt{(b^2-x^2)}} dy\sqrt{1+\frac{4x^2y^4}{a^6}+\frac{4x^4y^2}{a^6}}\,.$$

Das Integral vereinfacht sich etwas, wenn man $x=b\xi$ und $y=b\eta$ setzt; die erste Substitution giebt nämlich $dx=bd\xi$ und statt der Gränzen $x=0$, $x=b$ treten jetzt die neuen $\xi=0$, $\xi=1$ ein; folglich wird

$$\Omega=b\int_0^1 d\xi\int_0^{b\sqrt{\ \ -\xi^2}} dy\sqrt{1+\frac{4b^2\xi^2y^4}{a^6}+\frac{4b^4\xi^2y^2}{a^6}}\,,$$

und daraus findet man eben so leicht für $y=b\eta$

$$\Omega=b^2\int_0^1 d\xi\int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} d\eta\sqrt{1+\frac{4b^6}{a^6}\xi^2\eta^4+\frac{4b^6}{a^6}\xi^4\eta^2}\,.$$

Da es in einem bestimmten Integrale einerlei ist, welche Buchstaben man für die Variabeln der Integration wählt, so können wir auch x und y für ξ und η schreiben. Setzen wir ausserdem noch

$$3)\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^2=\varkappa,$$

so wird jetzt

$$4)\qquad \Omega=b^2\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\sqrt{1+4\varkappa^3(x^2y^4+x^4y^2)}\,.$$

Auf gewöhnlichem Wege ist nun an eine Ausführung dieser Integrationen gar nicht zu denken, denn schon die erste Integration in Beziehung auf y steht unter der Form

$$\int dy\sqrt{1+py^2+qy^4},$$

und würde also auf elliptische Functionen führen. Wir benutzen daher die Transformationsformel:

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\, f(x,y)$$

$$=\int_0^1 rdr\int_0^1 f(rt, r\sqrt{1-t^2})\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\,,$$

über deren Beweis man des Verfassers Handbuch der Integralrechnung S. 155. Formel (9) nachsehen kann. Für

$$f(x,y)=\sqrt{1+4\varkappa^3(x^2y^4+x^4y^2)}$$

findet man nun sogleich

$$f(rt,\ r\sqrt{1-t^2})$$
$$=\sqrt{1+4\varkappa^3[r^2t^2.r^4(1-t^2)^2+r^4t^4.r^2(1-t^2)]}$$
$$=\sqrt{1+4\varkappa^3r^6t^2(1-t^2)},$$

und mithin ist

$$\Omega=b^2\int_0^1 rdr\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\sqrt{1+4\varkappa^3r^6t^2(1-t^2)},$$

oder für $r^2=z$, wodurch $rdr=\frac{1}{2}dz$ wird,

$$\Omega=\frac{1}{2}b^2\int_0^1 dz\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\sqrt{1+4\varkappa^3z^3t^2(1-t^2)}.$$

Wir setzen ferner $t=\sin\varphi$; dann wird

$$\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=d\varphi,$$

und wenn $t=0$ und $t=1$ geworden ist, hat φ die entsprechenden Werthe $\varphi=0,\ \varphi=\frac{1}{2}\pi$ angenommen. Mithin wird

$$\Omega=\frac{1}{2}b^2\int_0^1 dz\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\varphi\sqrt{1+4\varkappa^3z^3\sin^2\varphi\cos^2\varphi}$$
$$=\frac{1}{2}b^2\int_0^1 dz\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\varphi\sqrt{1+\varkappa^3z^3\sin^2 2\varphi}.$$

Sei ferner $2\varphi=\psi$, so ist $d\varphi=\frac{1}{2}d\psi$, und wenn $\varphi=0$, $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ geworden, ist ψ in 0 und π übergegangen. Diess giebt

$$5)\qquad \Omega=\frac{1}{4}b^2\int_0^1 dz\int_0^{\pi}d\psi\sqrt{1+\varkappa^3z^3\sin^2\psi}.$$

Das nach ψ genommene Integral lässt sich aber wie folgt zerlegen:

$$\int_0^{\pi}d\psi\sqrt{1+\varkappa^3z^3\sin^2\psi}$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\psi\sqrt{1+\varkappa^3z^3\sin^2\psi}+\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}d\psi\sqrt{1+\varkappa^3z^3\sin^2\psi},$$

und wenn wir im zweiten Integrale rechts $\psi = \frac{1}{2}\pi - \psi'$ substituiren, so geht dasselbe in

$$-\int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} d\psi' \sqrt{1+\varkappa^3 z^3 \sin^2\psi'} = +\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi' \sqrt{1+\varkappa^3 z^3 \sin^2\psi'}$$

über, wo man die Accente wieder weglassen kann. Es folgt dann nach dem Vorhergehenden

$$\int_0^{\pi} d\psi \sqrt{1+\varkappa^3 z^3 \sin^2\psi} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi \sqrt{1+\varkappa^3 z^3 \sin^2\psi},$$

und mithin erhalten wir nach Nro. 5) für Ω den einfachen Ausdruck

$$6)\qquad \Omega = \frac{1}{2} b^2 \int_0^1 dz \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi \sqrt{1+\varkappa^3 z^3 \sin^2\psi}.$$

In dem Falle, wo $a > b$, also $\varkappa < 1$ ist, lässt sich für Ω hieraus eine rasch convergirende Reihe ableiten, wenn man die Formel

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} u - \frac{1}{3} \cdot \frac{1.3}{2.4} u^2 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} u^3 - \ldots.$$

in Anwendung bringt; man hat nämlich zunächst

$$\Omega = \frac{1}{2} b^2 \int_0^1 dz \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi \left[1 + \frac{\varkappa^3}{1}\frac{1}{2} z^3 \sin^2\psi - \frac{\varkappa^6}{3}\frac{1.3}{2.4} z^6 \sin^4\psi - \ldots\right],$$

wo die einzelnen Integrale, welche hieraus entspringen, unter der Form

$$\int_0^1 dz \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi\, z^{3n} \sin^{2n}\psi = \left(\int_0^1 z^{3n} dz\right)\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\psi\, d\psi\right)$$

stehen; der Werth hiervon ist

$$\frac{1}{3n+1} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} \frac{\pi}{2},$$

und durch Substitution hiervon ergiebt sich nun sogleich

$$\Omega = \frac{1}{4}\pi b^2 \left[1 + \frac{\varkappa^3}{1.4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\varkappa^6}{3.7}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \frac{\varkappa^9}{5.10}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 - \ldots\right].$$

Da diese Reihe noch für $\varkappa = 1$ also $b = a$ convergirt, so ist für

$$\lambda = 1 + \frac{1}{1.4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3.7}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \frac{1}{5.10}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 - \ldots.$$

$$\Omega = \frac{1}{4}\pi a^2 \lambda.$$

Der Factor $\frac{1}{4}\pi a^2$ hat eine geometrische Bedeutung: er ist die Fläche des Quadranten OEF, (wenn OE = dem Parameter a), d. h. die Fläche der Projection von Ω auf die Ebene xy. Nennen wir ω die Projection von Ω, so findet dann die einfache Beziehung $\Omega = \lambda\omega$ statt, worin λ eine zwischen 1,055 und 1,06 enthaltene Zahl bezeichnet.

XVI.

Ueber das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^\mu dx}{r^2 + 2rx\cos u + x^2}.$$

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Der Werth des vorstehenden bestimmten Integrales, welches zwei von Hrn. Dr. Dienger auf S. 109. und S. 341. des 10ten Theiles angegebene Formeln als spezielle Fälle in sich enthält, lässt sich auf folgende elementare Weise entwickeln.

Wir betrachten zunächst das einfachere Integral

$$S = \int_0^\infty \frac{y^\mu dy}{1 + 2y\cos u + y^2}.$$

und zerlegen hier den Nenner in $(1+y)^2 - y(2\sin\frac{1}{2}u)^2$, so ist offenbar identisch

$$S=\int_0^\infty \frac{y^\mu dy}{(1+y)^2}\,\frac{1}{1-\frac{y}{(1+y)^2}\left(2\sin\frac{1}{2}u\right)^2}.$$

Berücksichtigt man nun, dass $1+y^2$ jederzeit $>2y$, also $(1+y)^2>4y$, folglich um so mehr

$$(1+y)^2>4y\sin^2\frac{1}{2}u$$

ist, so erkennt man auf der Stelle, dass

$$\frac{y\left(2\sin\frac{1}{2}u\right)^2}{(1+y)^2}<1$$

ist, und man folglich unter dem Integralzeichen die für ein ächt gebrochenes z geltende Formel

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots$$

in Anwendung bringen darf. Diess giebt

$$S=\int_0^\infty \frac{y^\mu dy}{(1+y)^2}\left[1+\frac{y\left(2\sin\frac{1}{2}u\right)^2}{(1+y)^2}+\frac{y^2\left(2\sin\frac{1}{2}u\right)^4}{(1+y)^4}+\ldots\right].$$

oder wenn man jedes einzelne Glied integrirt

$$2)\qquad S=\Sigma\int_0^\infty \frac{y^{\mu+n}dy}{(1+y)^{2n+2}}\left(2\sin\frac{1}{2}u\right)^{2n},$$

wobei das Summenzeichen die Addition aller für $n=0, 1, 2, 3,\ldots$ zum Vorschein kommenden Glieder vorschreibt. Durch unbestimmte Integration ist nun

$$\int\frac{y^{\mu+n}dy}{(1+y)^{2n+2}}$$

$$=y^{\mu+n}\int\frac{dy}{(1+y)^{2n+2}}-(\mu+n)\int y^{\mu+n-1}dy\int\frac{dy}{(1+y)^{2n+2}}$$

$$=-\frac{1}{2n+1}\,\frac{y^{\mu+n}}{(1+y)^{2n+1}}+\frac{\mu+n}{2n+1}\int\frac{y^{\mu+n-1}dy}{(1+y)^{2n+1}}.$$

Führen wir die Gränzen $y=\infty$, $y=0$ ein und setzen voraus, dass $2n+1>\mu+n$ d. h. $n+1>\mu$ sei, so verschwindet

$$\frac{y^{\mu+n}}{(1+y)^{2n+1}}$$

sowohl für $y=\infty$ als $y=0$, so dass die Reductionsformel

$$\int_0^\infty \frac{y^{\mu+n}dy}{(1+y)^{2n+2}} = \frac{\mu+n}{2n+1}\int_0^\infty \frac{y^{\mu+n-1}dy}{(1+y)^{2n+1}}$$

übrig bleibt. Wendet man sie selbst wieder auf das Integral rechts an, so wird

$$\int_0^\infty \frac{y^{\mu+n}dy}{(1+y)^{2n+2}}$$

$$= \frac{\mu+n}{2n+1}\cdot\frac{\mu+n-1}{2n}\cdot\int_0^\infty \frac{y^{\mu+n-2}dy}{(1+y)^{2n}}$$

$$= \frac{\mu+n}{2n+1}\cdot\frac{\mu+n-1}{2n}\cdot\frac{\mu+n-2}{2n-1}\cdot\int_0^\infty \frac{y^{\mu+n-3}dy}{(1+y)^{2n-1}}$$

u. s. f.

und nach $n$maliger Anwendung

3) $$\int_0^\infty \frac{y^{\mu+n}dy}{(1+y)^{2n+2}}$$

$$= \frac{\mu+n}{2n+1}\cdot\frac{\mu+n-1}{2n}\cdots\frac{\mu+n-n}{n+1}\int_0^\infty \frac{y^{\mu+n-n-1}dy}{(1+y)^{n+1}}$$

$$= \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n)}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)}\int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}dy}{(1+y)^{n+1}}.$$

Das Integral rechts findet sich so. In der bekannten für ein positives ächt gebrochenes μ geltenden Formel*)

$$\int_0^\infty \frac{z^{\mu-1}dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin\mu\pi}$$

setzen wir $z=\frac{y}{r}$; es wird dann

$$\int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}dy}{r+y} = \frac{\pi}{\sin\mu\pi}r^{\mu-1},$$

und durch $n$malige Differenziation in Beziehung auf r

$$\int_0^\infty y^{\mu-1}dy\,.\,\frac{(-1)^n 1.2.3\ldots n}{(r+y)^{n+1}}$$

$$= \frac{\pi}{\sin\mu\pi}(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\ldots(\mu-n)r^{\mu-n-1}.$$

---

*) Archiv Theil II. S. 299.

Für $r=1$ erhalten wir das Integral, welches wir brauchen, nämlich

$$\int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}dy}{(1+y)^{n+1}} = \frac{(-1)^n \pi}{\sin\mu\pi} \cdot \frac{(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n)}{1.2.3\dots n}.$$

Substituiren wir diess in die unter 3) entwickelte Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{y^{\mu+n}dy}{(1+y)^{2n+2}} = \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+n)}{(n+1)(n+2)\dots(2n+1)} \int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}dy}{(1+y)^{n+1}},$$

so ergiebt sich auf der Stelle

$$\int_0^\infty \frac{y^{\mu+n}dy}{(1+y)^{2n+2}}$$
$$= \frac{\pi(-1)^n}{\sin\mu\pi} \cdot \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-2^2)\dots(\mu^2-n^2)}{1.2.3\dots(2n+1)}.$$

Vermöge dieses Werthes verwandelt sich die Gleichung 2) in die folgende:

$$S = \Sigma \frac{\pi(-1)^n}{\sin\mu\pi} \frac{\mu(\mu^2-1^2)\dots(\mu^2-n^2)}{1.2\dots(2n+1)} \left(2\sin\frac{1}{2}u\right)^{2n},$$

oder wenn man das Summenzeichen auflöst und alle für $n=0,1,2,\dots$ entstehenden Glieder hinschreibt:

$$4)\quad S = \frac{\pi}{\sin\mu\pi}\Big[\frac{\mu}{1} - \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1.2.3}\left(2\sin\frac{1}{2}u\right)^2$$
$$+ \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4.5}\left(2\sin\frac{1}{2}u\right)^4 - \dots\Big].$$

Die eingeklammerte Reihe ist leicht zu summiren, wenn man sich erinnert, dass für ein beliebiges λ und ein zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegendes v die Formel

$$\cos\lambda v = 1 - \frac{\lambda^2}{1.2}\sin^2 v + \frac{\lambda^2(\lambda^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 v$$
$$- \frac{\lambda^2(\lambda^2-2^2)(\lambda^2-4^2)}{1.2.3..6}\sin^6 v + \dots.$$

gilt*); man erhält aus ihr durch Differenziation nach v

---

*) M. s. mein Handbuch der algebraischen Analysis S. 231. Formel (8).

$$\sin\lambda v = \cos v \left[\frac{\lambda}{1}\sin v - \frac{\lambda(\lambda^2-2^2)}{1.2.3}\sin^3 v + \frac{\lambda(\lambda^2-2^2)(\lambda^2-4^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 v - \ldots\right]$$

oder durch Division mit $2\sin v\cos v = \sin 2v$,

$$\frac{\sin\lambda v}{\sin 2v} = \frac{\frac{1}{2}\lambda}{1} - \frac{\frac{1}{2}\lambda(\lambda^2-2^2)}{1.2.3}\sin^2 v + \frac{\frac{1}{2}\lambda(\lambda^2-2^2)(\lambda^2-4^2)}{1.2.3.4.5}\sin^4 v - \ldots$$

Nehmen wir $\lambda = 2\mu$, $v = \frac{1}{2}u$, wo nun $-\frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}u < \frac{1}{2}\pi$, also $-\pi < u < +\pi$ sein muss, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$\frac{\sin\mu u}{\sin u} = \frac{\mu}{1} - \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1.2.3}\left(2\sin\frac{1}{2}u\right)^2 + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4.5}\left(2\sin\frac{1}{2}u\right)^4 - \ldots$$

und damit ist die Reihe in Nro. 3) summirt. Substituiren wir die gefundene Summe und stellen den ersten und letzten Werth von S in eine Gleichung, so erhalten wir die Integralformel

$$5)\qquad \int_0^\infty \frac{y^\mu dy}{1+2y\cos u+y^2} = \frac{\pi}{\sin\mu\pi}\,\frac{\sin\mu u}{\sin u},$$

deren Gültigkeit an die Bedingungen $1 > \mu > 0$ und $\pi > u > -\pi$ geknüpft ist. Die erste dieser Bedingungen lässt sich noch etwas erweitern; die rechte Seite besitzt nämlich die Eigenschaft, für negative μ nichts Anderes zu geben als für gleichgrosse positive μ, und wenn man daher zeigen kann, dass dem Integrale links dieselbe Eigenschaft zukommt, so folgt, dass die obige Gleichung auch für negative μ, also unter der erweiterten Bedingung $1 > \mu > -1$ gilt. Nun ist aber

$$\int_0^\infty \frac{y^{-\mu} dy}{1+2y\cos u+y^2} = \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^\mu}{\frac{1}{y^2}+\frac{2}{y}\cos u+1}\cdot\frac{dy}{y^2},$$

also für $\frac{1}{y} = z$:

$$\int_0^\infty \frac{y^{-\mu}\,dy}{1+2y\cos u+y^2} = -\int_\infty^0 \frac{z^\mu\,dz}{z^2+2z\cos u+1}$$

$$= +\int_0^\infty \frac{y^\mu\,dy}{1+2y\cos u+y^2},$$

wenn man nämlich rechter Hand die Integrationsgränzen vertauscht und y für z schreibt. Man sieht hieraus, dass auch das Integral für negative und positive μ dasselbe bleibt und mithin die genannte Erweiterung der Bedingung erlaubt ist.

Setzt man in Nro 5) $y=\frac{x}{r}$, so ergiebt sich, immer unter den Bedingungen $1>\mu>-1$ und $\pi>u>-\pi$,

$$6) \qquad \int_0^\infty \frac{x^\mu\,dx}{r^2+2rx\cos u+x^2} = \frac{\pi r^{\mu-1}}{\sin\mu\pi}\,\frac{\sin\mu u}{\sin u}.$$

Die Formel hat auch Moigno in seinen Leçons de calcul intégral; der Beweis ist ein anderer.

XVII.

Ueber die Integration der Function

$$\varphi(X_0\psi+X_1\psi'+\ldots.+X_n\psi^{(n)})$$
$$-\psi\left(X_0\varphi-\frac{\partial}{\partial x}(X_1\varphi)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(X_2\varphi)-\ldots..+(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}(X_n\varphi)\right).$$

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

In der vorgelegten Grösse bedeuten X_0, X_1, ... X_n gewisse Functionen von x, die man als gegeben ansehen kann, während φ, ψ beliebige, unbestimmte Functionen von x sind. Die oben beigefügten Indexe bedeuten die Ordnung der Differentiation.

Es ist

$$\varphi X_0 \psi - \psi X_0 \varphi = 0,$$

$$\varphi X_1 \psi' + \psi \frac{\partial}{\partial x}(X_1 \varphi) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi X_1 \psi),$$

$$\varphi X_2 \psi'' - \psi \frac{\partial^2}{\partial x^2}(X_2 \varphi) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi X_2 \psi') - \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi \frac{\partial}{\partial x}(X_2 \varphi)\right),$$

$$\vdots$$

$$\varphi X_r \psi^{(r)} - (-1)^r \psi \frac{\partial^r}{\partial x^r}(X_r \varphi) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi X_r \psi^{(r-1)}) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^{(r-2)} \frac{\partial}{\partial x}(X_r \varphi)\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^{(r-3)} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(X_r \varphi)\right) - \ldots + (-1)^{r+1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}}(X_r \varphi)\right).$$

$$\vdots$$

Hieraus folgt:

$$\int \Big[\varphi (X_0 \psi + X_1 \psi' + \ldots + X_n \psi^{(n)})$$

$$- \psi \left(X_0 \varphi - \frac{\partial}{\partial x}(X_1 \varphi) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(X_2 \varphi) - \ldots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}(X_n \varphi)\right)\Big] \partial x$$

$$= \varphi X_1 \psi$$

$$+ \varphi X_2 \psi' - \psi \frac{\partial}{\partial x}(X_2 \varphi)$$

$$+ \ldots$$

$$\vdots$$

$$+ \varphi X_r \psi^{(r-1)} - \psi^{(r-2)} \frac{\partial}{\partial x}(X_r \varphi) + \ldots + (-1)^{r-1} \psi \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}}(X_r \varphi) -$$

$$+ \ldots$$

$$\vdots \qquad\qquad + C$$

$$= \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^{s+1} \sum_{r=0}^{r=n-s} \left[\psi^{(r)} \frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s-1}}(X_{r+s} \varphi) \right] + C,$$

wenn $\psi^{(0)} = \psi$, $\frac{\partial^0}{\partial x^0}(X_r \varphi) = X_r \varphi$ ist.

Wird φ so gewählt, dass

$$X_0 \varphi - \frac{\partial}{\partial x}(X_1 \varphi) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(X_2 \varphi) - \ldots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}(X_n \varphi) = 0,$$

so ist

$$\int \varphi(X_0\psi + X_1\psi' + X_2\psi'' + \dots + X_n\psi^{(n)})\partial x$$
$$= \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^{s+1} \sum_{r=0}^{r=n-s} \left[\psi^{(r)} \frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s-1}}(X_{r+s}\varphi)\right] + C.$$

Wird dagegen ψ so gewählt, dass

$$X_0\psi + X_1\psi' + X_2\psi'' + \dots + X_n\psi^{(n)} = 0,$$

so wäre:

$$\int \psi\left(X_0\varphi - \frac{\partial}{\partial x}(X_1\varphi) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(X_2\varphi) - \dots + (-1)^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}(X_n\varphi)\right)\partial x$$
$$= \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^s \sum_{r=0}^{r=n-s} \left[\psi^{(r)} \frac{\partial^{s-1}}{\partial x^{s-1}}(X_{r+s}\varphi)\right] + C.$$

Zugleich mag noch bemerkt werden, dass also, wenn $\varphi = 1$ und

$$X_0 - \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} - \dots + (-1)^n \frac{\partial^n X_n}{\partial x^n} = 0,$$

man hat

$$\int (X_0\psi + X_1\psi' + X_2\psi'' + \dots + X_n\psi^{(n)})\partial x$$
$$= \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^{s+1} \sum_{r=0}^{r=n-s} \left[\psi^{(r)} \frac{\partial^{s-1} X_{r+s}}{\partial x^{s-1}}\right] + C.$$

Setzte man

$$X_0\varphi - \frac{\partial}{\partial x}(X_1\varphi) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(X_2\varphi) - \dots + (-1)^n\frac{\partial_n}{\partial x^n}(X_n\varphi)$$
$$= U_0\varphi + U_1\varphi' + U_2\varphi'' + \dots + U_n\varphi^{(n)},$$

so fände man:

$$U_r = (-1)^r\left[X_r - (r+1)\frac{\partial X_{r+1}}{\partial x} + \frac{(r+2)(r+1)}{1.2}\frac{\partial^2 X_{r+2}}{\partial x^2} - \dots \right.$$
$$\left. \dots + (-1)^{n-r}\frac{n.(n-1)\dots(r+1)}{1.2\dots\dots(n-r)}\frac{\partial^{n-r} X_n}{\partial x^{n-r}}\right],$$

woraus sich umgekehrt auch ergiebt:

$$X_r = (-1)^r\left[U_r - (r+1)\frac{\partial U_{r+1}}{\partial x} + \frac{(r+2)(r+1)}{1.2}\frac{\partial^2 U_{r+2}}{\partial x^2} - \dots \right.$$
$$\left. \dots + (-1)^{n-r}\frac{n(n-1)\dots(r+1)}{1.2\dots(n-r)}\frac{\partial^{n-r} U_n}{\partial x^{n-r}}\right].$$

Die beiden Differentialgleichungen:

$$X_0\psi + X_1\psi' + X_2\psi'' + \dots + X_n\psi^{(n)} = 0,$$

$$X_0\varphi - \frac{\partial}{\partial x}(X_1\varphi) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(X_2\varphi) - \dots + (-1)^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}(X_n\varphi) = 0$$

sind also so beschaffen, dass eine jede Lösung der einen ein Factor ist, der die andere integrabel macht.

(Man sehe die Abhandlung des Herrn Prof. Dr. C. G. J. Jacobi in Crelles Journal. 32. Band. S. 185 ff.).

XVIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Aufgaben aus der engl. Zeitschrift „The Mathematician."

Mitgetheilt von dem Herrn Doctor August Wiegand, Oberlehrer an der Realschule zu Halle.

---

1) In jedem spitzwinkligen Dreieck ist das Rechteck aus der Summe seiner Seiten und der Summe der Seiten des Dreiecks, welches durch die Höhenfusspunkte bestimmt wird, gleich der doppelten Summe der Rechtecke aus je zwei Höhen des Urdreiecks.

2) In jedem stumpfwinkligen Dreiecke ist das Rechteck aus der Summe seiner Seiten und dem Ueberschusse zweier Seiten des Höhendreiecks über diejenige dritte Seite, welche dem stumpfen Winkel des Urdreiecks gegenüberliegt, gleich der doppelten Summe der Rechtecke aus je zwei Höhen des Urdreiecks.

3) Wenn man von einem beliebigen Punkte in der Ebene eines Dreiecks Δ Lothe auf die Seiten fällt, so ist, wenn Δ' das von den Fusspunkten der letzteren bestimmte Dreieck, R den Ra-

dius des umschriebenen Kreises und R' den Abstand des Mittelpunkts des letzteren vom angenommenen Punkte bezeichnet,

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \pm \frac{R^2 - R'^2}{R^2},$$

jenachdem der Punkt innerhalb oder ausserhalb des umschriebenen Kreises angenommen wurde.

4) Wenn von einem Punkte der Peripherie des um ein Dreieck beschriebenen Kreises Lothe auf die Dreiecksseiten gefällt werden, dann fallen die Fusspunkte dieser Lothe in eine einzige gerade Linie.

5) Wenn man von den Winkelspitzen A, B, C eines Dreiecks durch einen Punkt P in der Ebene des Dreiecks Linien zieht, welche die Seiten bezüglich in D, E, F treffen, DE, EF, FD zieht, welche CF, AD, BE bezüglich in f, d, e schneiden. ferner nach Verbindung der Punkte f, d, e sowohl von A, B, C als auch von D, E, F Linien zieht, welche bezüglich EF, DF, DE und ef, df, de halbiren, so liegen, wenn die ersteren drei Linien sich in M, die letzteren sich in N schneiden, die drei Punkte M, N und P in einer und derselben geraden Linie.

6) Wenn die Peripherie eines Kreises in sechs gleiche Theile getheilt wird in den Punkten A_1, A_2, ... A_6, und die Verbindungslinie A_1A_3 den Radius OA_2 in B_1; B_1A_4 den Radius OA_3 in B_2; B_2A_5 den Radius OA_4 in B_3 u. s. f. schneidet, so sind OB_1, OB_2, OB_3, etc. bezüglich die Hälfte, der 3te der 4te u. s. w. Theil des Radius.

7) Zieht man von einem Punkte P ausserhalb eines Kreises die Tangenten PA und PB auch die beliebige Gerade PC an die concave Seite der Peripherie, dann geht die Tangente an C, das in der Mitte von BC errichtete Loth und die Verbindungslinie der Mittelpunkte von AP und BP durch einen und denselben Punkt.

8) Wenn man einen Punkt in der Ebene eines Vierecks $ABCD$ mit den vier Winkelspitzen verbindet und die Diagonalen des Vierecks zieht, so findet folgende Relation statt:

$$ABC.PBD = ABD.BPC \pm BDC.PAB,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem der Punkt P ausserhalb oder innerhalb des Vierecks liegt.

---

9) Es seien A, B, C drei Punkte in einer geraden Linie und aus C ein beliebiger Kreis beschrieben, ferner sei durch B eine Secante BE an den Kreis gezogen; es soll die Lage derselben bestimmt werden, bei welcher ein Beobachter in A die Sehne DE, welche die Secante bildet, am grössten sieht.

10) Einen Kreis zu construiren, der zwei Seiten eines Dreiecks und die Peripherie des umschriebenen Kreises berührt.

11) Von einem rechtwinkligen Dreiecke kennt man das Verhältniss der Radien der beiden Kreise, welche sich in die durch Halbirung des rechten Winkels entstehenden Dreiecke beschreiben lassen, und ausserdem noch den Abstand der Mittelpunkte genannter Kreise. Das Dreieck soll construirt werden.

12) Von dem bei B rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ABC ist die Summe der beiden Seiten a und c gleich dem Quadranten und das Maass des Winkels C gleich dem doppelten Maasse einer der genannten Seiten. Das Dreieck soll berechnet werden.

(Fortsetzung folgt.)

Aufgaben aus der Integralrechnung.

Von dem Herrn Professor Dr. Schlömilch an der Universität zu Jena.

---

1) Bezeichnet μ einen negativen ächten Bruch, so gilt die Formel

$$\int_0^\infty \frac{1-x^\mu}{1-x^2} lx\, dx = \left(\frac{\pi}{2}\tan\frac{\mu\pi}{2}\right)^2.$$

Für $\mu=-\frac{1}{n}$ und $x=y^n$, wo n eine ganze positive Zahl >1 bedeutet, erhält man hieraus beispielweis:

$$\int_0^\infty \frac{y^{n-2}}{1+y+y^2+\ldots+y^{2n-1}} l\left(\frac{1}{y}\right) dy = \left(\frac{\pi}{2n}\tan\frac{\pi}{2n}\right)^2;$$

ferner für $\mu=-\frac{2}{n}$, wo $n>2$ sein muss, und $x=y^n$:

$$\int_0^\infty \frac{y^{n-3}}{1+y^2+y^4+\ldots+y^{2n-2}} l\left(\frac{1}{y}\right) dy = \left(\frac{\pi}{2n}\tan\frac{\pi}{n}\right)^2.$$

Man verlangt einen Beweis von der obigen, wie es scheint, bemerkenswerthen Formel.

2) Man soll zeigen, dass die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{lx \sin rx}{1+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{ly}{1-y^2} e^{-ry}\,dy + \frac{\pi^2}{4} e^{-r}$$

für alle positiven r statt findet, und untersuchen, ob sich das Integral rechter Hand durch bekannte Functionen ausdrücken lässt.

3) Ganz ebenso soll man in Bezug auf nachstehende Gleichung verfahren:

$$\int_0^\infty \frac{lx\, e^{-rx}}{1+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{ly}{1-y^2} \cos ry\, dy.$$

4) Man soll nachweisen, dass die transscendente Gleichung $\Gamma(\mu)=0$ oder

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x}\,dx = 0$$

keine anderen Auflösungen hat als solche, die in der Form $\mu = \pm \infty \sqrt{-1}$ enthalten sind.

Aufgabe.

Von Demselben.

Man soll die bemerkenswerthe Reihenentwickelungsformel

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{(x-1)^0}{1} f'(1) + \frac{(x-2)^1}{1.2} f''(2) + \frac{(x-3)^2}{1.2.3} f'''(3) + \ldots\ldots$$

beweisen und die Bedingungen ihrer Gültigkeit aufsuchen.

Aufgaben.

Von dem Herrn Doctor J. Dienger zu Sinsheim bei Heidelberg.

Es sei MNR in Taf. III. Fig. 5. ein Kreis, dessen Halbmesser r sei; A ein Punkt ausserhalb desselben, dessen Entfernung vom Mittelpunkte $=a$; man ziehe von A aus die Linien AN, AM, welche mit OA den gleichen Winkel α machen, so werden diese Linien den Kreis schneiden, wenn $\sin\alpha < \frac{r}{a}$, für $\sin\alpha = \frac{r}{a}$ werden sie den Kreis berühren. Die Linien RS, MN, welche die Durchschnittspunkte verbinden, werden parallel sein.

Zieht man die Linien MS, RN, so werden sich diese in einem Punkte der Linie OA schneiden, der zwischen O und A liegt und von O um die Grösse $\frac{r^2}{a}$ entfernt ist. Dieser Punkt ist der nämliche, was auch immer α sei. Lässt man also α zunehmen, bis $\sin\alpha = \frac{r}{a}$, so wird die Linie RS mit MN zusammenfallen und somit ist jener Punkt die Mitte der Berührungssehne, die zu den von A ausgehenden Tangenten gehört. Zieht man in den Punkten M und S, R und N (die selbst veränderlich sind) Tangenten an den Kreis, so schneiden sich je zwei solche (z. B. die von M und S, von N und R u. s. f.) in einem Punkte, und alle diese Punkte liegen in einer durch A gehenden mit RS parallelen geraden Linie.

Bewegt sich der Punkt A in einem Kreise, dessen Halbmesser OA und dessen Mittelpunkt O ist, so bewegt sich der Durchschnittspunkt der Sehnen RN, MS in einem Kreise, dessen Mittelpunkt O und dessen Halbmesser $\frac{r^2}{a}$ ist.

Bewegt sich A in einer durch A gehenden, auf OA senkrechten Geraden, so bewegt sich dieser Durchschnittspunkt auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt auf OA zwischen O und A liegt, welcher durch den Punkt O geht und dessen Halbmesser $\frac{r^2}{2a}$ ist. Ist also P der ursprüngliche Durchschnittspunkt, so ist OP der Durchmesser dieses Kreises.

Das bestimmte Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(zx).\sin(cx)\sin(bx)}{x}\,\partial x$$

ist, wenn $c > b$ und beide positiv sind, für

$$\begin{array}{rll}
-\infty \leqq z < -(b+c) & \text{gleich} & 0, \\
z = -(b+c) & \text{„} & -\frac{\pi}{8}, \\
-(b+c) < z < -(c-b) & \text{„} & -\frac{\pi}{4}, \\
z = -(c-b) & \text{„} & -\frac{\pi}{8}, \\
-(c-b) < z < c-b & \text{„} & 0, \\
z = c-b & \text{„} & +\frac{\pi}{8}, \\
c-b < z < c+b & \text{„} & +\frac{\pi}{4}, \\
z = b+c & \text{„} & +\frac{\pi}{8}, \\
b+c < z \leqq +\infty & \text{„} & +0.
\end{array}$$

XIX.

Untersuchungen über einige unbestimmte Gleichungen zweiten Grades, und über die Verwandlung der Quadratwurzel aus einem Bruche in einen Kettenbruch.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Ein Haupttheil der folgenden Untersuchungen bezieht sich auf die Auflösung der unbestimmten Gleichungen $ft^2-hu^2=\pm 1$, $ft^2-hu^2=\pm 2$ in ganzen Zahlen t und u, während f und h gegebene ganze positive Zahlen, prim zu einander, bedeuten.

Die Theorie dieser Gleichungen scheint nur in so fern als abgeschlossen zu betrachten, als bekanntlich alle Auflösungen derselben durch Verwandlung von $\sqrt{\frac{h}{f}}$ in einen Kettenbruch gefunden werden können; eine genauere Untersuchung hat mich aber gelehrt, dass man diese Verwandlung ganz umgehen, und die kleinsten Werthe der in Rede stehenden Gleichungen aus den kleinsten Werthen der Gleichung $x^2-fh.y^2=1$ durch einen höchst einfachen Calcul herleiten kann. Der Nutzen dieser Reduction ist von zweierlei Art. Erstens besitzen wir von Legendre (Théorie des nombres. Tome I. Table X.) eine Tafel der kleinsten Werthe der Gleichung $x^2-Ay^2=\pm 1$ für jede nicht quadratische Zahl A von 2 bis 1003, zweitens kann man die Gleichungen $ft^2-hu^2=\pm 1$, $ft^2-hu^2=\pm 2$ nach den auf einander folgenden ganzen Zahlen klassificiren, da in der Folge gezeigt wird, dass jede solche Zahl A entweder gar nicht, oder nur auf eine Art so in zwei Factoren, prim zu einander, zerlegt werden kann, dass die eine oder andere dieser Gleichungen auflösbar ist.

Die genaue Erforschung derjenigen Eigenthümlichkeiten, welche die Verwandlung der Quadratwurzel aus einem unächten Bruche

$\left(\sqrt{\frac{h}{f}}\right)$ in einen Kettenbruch darbietet, bildet die Grundlage der Resultate, welche in den folgenden Blättern mitgetheilt werden. Von Einfluss sind in dieser Beziehung die zwei Haupteigenschaften, dass die Periode dieses Kettenbruchs mit dem zweiten Quotienten beginnt, und symmetrisch ist; Legendre scheint dies nicht beachtet zu haben, denn nur an dem Kettenbruche, der aus der Verwandlung der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl entsteht, erweist er jene Eigenschaften, und geht dann sogleich zur Verwandlung einer Wurzel der Gleichung $fx^2+gx+h=0$ über, wo sich dieselben im Allgemeinen nicht wiederfinden. Ueberhaupt zeigt die Entwickelung von $\sqrt{\frac{h}{f}}$ eine solche Regelmässigkeit, dass man mit ihr beginnen, und die Resultate unmittelbar auf den Fall, in welchem $\frac{h}{f}$ eine ganze Zahl ist, übertragen kann. Ich werde sie also von vorne anfangen, und dabei einen solchen Weg einschlagen, dass damit auch der Elementarlehre einiger Nutzen gebracht sein dürfte.

1.

Ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, werden wir die ganzen Zahlen f und h prim zu einander, und $h > f$ nehmen. Um nun $x = \sqrt{\frac{h}{f}}$ in einen gewöhnlichen Kettenbruch zu verwandeln, hat man bekanntlich $x=a+\frac{1}{x_1}$, $x_1=a_1+\frac{1}{x_2}$, $x_2=a_2+\frac{1}{x_3}$,.. zu setzen, so dass überhaupt a_n die grösste in x_n enthaltene ganze Zahl ist. $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sollen, wie gewöhnlich, vollständige Quotienten, $a, a_1, a_2, \ldots$ schlechthin Quotienten genannt werden. Setzt man $\frac{\sqrt{fh}}{f}$ statt $\sqrt{\frac{h}{f}}$, so ist $x_1=\frac{1}{x-a}=\frac{f}{\sqrt{fh}-af}$ $=\frac{\sqrt{fh}+af}{h-a^2f}$, also von der Form $\frac{\sqrt{A}+J_1}{D_1}$, wo $J_1=af$, $D_1=h-a^2f$, $A=fh$.

Diese nämliche Form nimmt jeder andere vollständige Quotient an; denn wenn man überhaupt $x_1=\frac{\sqrt{A}+J_n}{D_n}$ setzt, so kommt

$$x_{n+1}=\frac{1}{x_n-a_n}=\frac{D_n}{\sqrt{A}-(a_nD_n-J_n)}=\frac{\sqrt{A}+(a_nD_n-J_n)}{[A-(a_nD_n-J_n)^2]:D_n},$$

und dieser vollständige Quotient hat mithin wieder die nämliche Form $\frac{\sqrt{A}+J_{n+1}}{D_{n+1}}$, wo

$$J_{n+1} = a_n D_n - J_n,$$

$$D_n D_{n+1} = A - (a_n D_n - J_n)^2 = A - J^2_{n+1}$$

ist.

Die letzte Gleichung wird auf eine für die Rechnung bequemere Form gebracht, wenn man den Ausdruck $A-(a_n D_n - J_n)^2$ entwickelt, und auf ähnliche Art, wie $D_n D_{n+1} = A - J^2_{n+1}$ war, $D_{n-1} D_n = A - J_n^2$ setzt; man erhält hiedurch

$$D_{n+1} = D_{n-1} + a_n(2J_n - a_n D_n) = D_{n-1} + a_n(J_n - J_{n+1}).$$

Von den Anfangswerthen $J_0 = 0$, $D_0 = f$, $J_1 = af$, $D_1 = h - a^2 f$, entsprechend der Hauptgrösse x und dem ersten vollständigen Quotienten x_1, ausgehend, wird man also die Elemente der vollständigen Quotienten am leichtesten nach den Formeln

$$J_{n+1} = a_n D_n - J_n,$$

$$D_{n+1} = D_{n-1} + a_n(J_n - J_{n+1})$$

berechnen können.

2.

Man hat es bei dieser Berechnung immer nur mit ganzen Zahlen zu thun, wie aus dem Bildungsgesetz der Elemente J_n, D_n nach den letzten Formeln des vor. Paragr. unmittelbar hervor geht. Auch sind diese Elemente, welche wir im Folgenden resp. Zähler und Nenner des entsprechenden vollständigen Quotienten nennen werden, von Anfang an positiv.

Um dies auf die leichteste Art zu erweisen, werde angenommen, dass J_n, D_n positiv, und $J_n < \sqrt{A}$ sei. Dann ist zunächst J_{n+1} positiv, denn sonst wäre $J_n \overline{\gtrless} a_n D_n$, $\sqrt{A} + J_n > 2\, a_n D_n$, $\frac{\sqrt{A}+J_n}{D_n} > 2a_n$, welches gegen die Voraussetzung, dass dieser vollständige Quotient zwischen a_n und a_n+1 liegt, streitet.

Ferner ist $\frac{\sqrt{A}+J_n}{D_n} > a_n$, $\sqrt{A} > a_n D_n - J_n$, d. i. $\sqrt{A} > J_{n+1}$, folglich $D_n D_{n+1} = A - J^2_{n+1}$ positiv, also D_{n+1} positiv.

Wenn demnach J_n, D_n positiv, $J_n < \sqrt{A}$, so ist auch J_{n+1}, D_{n+1} positiv, $J_{n+1} < \sqrt{A}$. Nun sind J_1, D_1 wirklich positiv, und $J_1 < \sqrt{A}$ (wie leicht erhellt), folglich sind die Elemente jedes vollständigen Quotienten positiv, und der Zähler jedesmal $< \sqrt{A}$.

3.

Für den Nenner D_n lassen sich Grenzen finden, welche er nicht überschreitet; die Feststellung derselben wird die folgende Untersuchung sehr erleichtern, und zur Bestimmung des Anfangs der Periode wird man die Betrachtung der Näherungsbrüche, welche Legendre in der Théorie des nombres. Tome I. § V. 31., wo er von der Verwandlung der Quadratwurzel einer ganzen Zahl handelt, zu Hülfe nimmt, ganz umgehen können.

Es ist $D_n D_{n+1} = (\sqrt{A} + J_{n+1})(\sqrt{A} - J_{n+1})$, wo beide Factoren rechter Hand positiv sind, ferner $\frac{\sqrt{A} + J_{n+1}}{D_{n+1}} > 1$, oder $\sqrt{A} + J_{n+1} > D_{n+1}$, folglich $D_n > \sqrt{A} - J_{n+1}$.

Es ist ferner $\sqrt{A} + J_{n+1} = \sqrt{A} + a_n D_n - J_n$, $\sqrt{A} - J_n > 0$, folglich $\sqrt{A} + J_{n+1} > D_n$. Wegen der Gleichung $D_n D_{n+1} = (\sqrt{A} + J_{n+1})(\sqrt{A} - J_{n+1})$ ist also auch $\sqrt{A} - J_{n+1} < D_{n+1}$, oder $\sqrt{A} - J_n < D_n$, wobei aber zu bemerken, dass in der letztern Ungleichung der Fall $n = 0$ ausgeschlossen werden muss, wie leicht erhellt. Dies giebt nun folgende Grenzen:

$$D_n > \sqrt{A} - J_n \ (n = 0 \text{ ausgenommen})$$
$$< \sqrt{A} + J_n,$$
$$D_n > \sqrt{A} - J_{n+1}$$
$$< \sqrt{A} + J_{n+1}.$$

Noch ist zu bemerken, dass, wenn α die grösste in $\sqrt{fh} = \sqrt{A}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet, α der grösste Werth sowohl für J_n, als für J_{n+1} ist, wie aus J_n oder $J_{n+1} < \sqrt{A}$ unmittelbar folgt; der grösste Werth der Summe $J_n + J_{n+1} = a_n D_n$ ist folglich 2α, also kann weder a_n noch D_n die Grenze 2α überschreiten.

Daraus nun, dass J nicht $> \alpha$, D nicht grösser als 2α werden kann. und beide Zahlen ganz und positiv sind, folgt leicht, dass die Reihe der vollständigen Quotienten, also auch die Reihe der Quotienten des Kettenbruchs, periodisch sein wird.

4.

Um den Anfang der Periode zu bestimmen, sei $\frac{\sqrt{A} + J_n}{D_n}$ ein vollständiger Quotient, welcher einem folgenden $\frac{\sqrt{A} + J_{n+k}}{D_{n+k}}$ gleich werde, so dass also $J_{n+k} = J_n$, $D_{n+k} = D_n$. $a_{n+k} = a_n$ ist.

Aus den beiden Gleichungen

$$D_{n-1} = \frac{A - J_n^2}{D_n}, \ D_{n+k-1} = \frac{A - J^2_{n+k}}{D_{n+k}}$$

folgt dann augenblicklich, dass auch $D_{n+k-1} = D_{n-1}$ sein muss.

Wir haben ferner

a) $J_{n+k-1}-J_{n-1}=(a_{n+k-1}-a_{n-1})D_{n-1}$

oder

b) $J_{n-1}-J_{n+k-1}=(a_{n-1}-a_{n+k-1})D_{n+k-1}$.

Gesetzt nun die Zahlen J_{n-1}, J_{n+k-1} wären nicht gleich, sondern 1°. $J_{n+k-1}>J_{n-1}$, so wäre nach a) $a_{n+k-1}-a_{n-1}$ positiv, und mindestens $=1$, folglich $J_{n+k-1}-J_{n-1}\overset{=}{>}D_{n-1}$. Es lässt sich aber mit Hülfe der im vor. Paragr. entwickelten Grenzen leicht zeigen, dass das Letztere nicht der Fall sein kann; denn $\sqrt{A}-J_{n-1}<D_{n-1}$ ($n=1$ ausgenommen), und $J_{n+k-1}<\sqrt{A}$, also auch $J_{n+k-1}-J_{n-1}<D_{n-1}$. Zieht man die Gleichung b) in Betracht, so zeigt man auf dieselbe Weise, dass 2°. die Ungleichung $J_{n+k-1}<J_{n-1}$ unmöglich ist. Daher ist $J_{n+k-1}=J_{n-1}$, und in Folge dessen auch nach a) oder b) $a_{n+k-1}=a_{n-1}$, d. h. die Gleichheit der beiden vollständigen Quotienten $\frac{\sqrt{A}+J_n}{D_n}$, $\frac{\sqrt{A}+J_{n+k}}{D_{n+k}}$ bedingt die Gleichheit der ihnen unmittelbar vorhergeh. $\frac{\sqrt{A}+J_{n-1}}{D_{n-1}}$, $\frac{\sqrt{A}+J_{n+k-1}}{D_{n+k-1}}$, ausgenommen den Fall $n=1$. Die Fortsetzung dieser Schlüsse führt also zu dem Resultat $\frac{\sqrt{A}+J_1}{D_1}=\frac{\sqrt{A}+J_{1+k}}{D_{1+k}}$. Demnach muss der erste vollständige Quotient sich wiederholen. Die entwickelte Grösse selbst $\frac{\sqrt{fh}}{f}$ wiederholt sich nicht, vielmehr wird $J_k=af$, $D_k=f$, wie auf folgende Art gezeigt wird.

Aus $D_k=\frac{A-J^2_{1+k}}{D_{1+k}}$, $f=\frac{A-J_1^2}{D_1}$, und aus $J_{1+k}=J_1$, $D_{1+k}=D_1$ folgt $D_k=f$. Ferner ist $J_k+J_{1+k}=a_kD_k$, d. i. $J_k+af=fa_k$, $J_k=f(a_k-a)$. Nun ist $J_k>\sqrt{fh}-f$ (3.), $\frac{J_k}{f}=a_k-a>\frac{\sqrt{fh}}{f}-1$ und $<\frac{\sqrt{fh}}{f}$, folglich $\frac{J_k}{f}=a_k-a=a$, also $J_k=af$, $a_k=2a$. Folgendes ist somit erwiesen:

Der erste vollständige Quotient $\frac{\sqrt{A}+J_1}{D_1}=\frac{\sqrt{A}+af}{h-a^2f}$ kehrt in der Periode **zuerst** wieder, letztere schliesst mit dem vollständigen Quotienten $\frac{\sqrt{A}+J_k}{D_k}=\frac{\sqrt{A}+af}{f}$, und der letzte Quotient (a_k) der Periode ist doppelt so gross als die grösste in $\sqrt{\frac{h}{f}}$ enthaltene ganze Zahl a.

5.

Als Beispiel für den vorherg. Paragraphen werde $\sqrt{\frac{20}{3}}$ in einen Kettenbruch verwandelt. Es ist also $f=3$, $h=20$, $A=60$, $a=2$. Nach 1. findet man ohne Mühe folgende zusammengehörige Werthe:

J_n	D_n	a_n
0	3	2
6	8	1
2	7	1
5	5	2
5	7	1
2	8	1
6	3	4

Die Periode ist hier zu Ende, der nächste vollständige Quotient ist wieder der erste $\frac{\sqrt{60}+6}{8}$, der letzte Quotient $=2a$. Man sieht aus diesem Beispiel noch Folgendes: 1°. Die Zähler einer Periode, 6, 2, 5, 5, 2, 6 bilden eine Reihe, in welcher die von den Enden gleich weit abstehenden Glieder (so wie die Endglieder selbst) einander gleich sind. 2°. Dasselbe gilt von den Nennern 8, 7, 5, 7, 8, und von den Quotienten des Kettenbruchs 1, 1, 2, 1, 1, wenn man die letzten Elemente der Periode nicht in Betracht zieht. Diese Bemerkung findet Anwendung in allen übrigen Fällen, was jetzt bewiesen werden soll.

Es sei innerhalb einer Periode $J_m=J_n$, $D_{m-1}=D_n$, $m<n$; dann ist wegen $D_m=\frac{A-J_m^2}{D_{m-1}}$, $D_{n-1}=\frac{A-J_n^2}{D_m}$, auch $D_m=D_{n-1}$. Ferner ist $J_{m+1}=a_m D_m-J_m$, $J_{n-1}=a_{n-1}D_{n-1}-J_n$, folglich nach der Annahme, und nach dem schon Bewiesenen:

$$\text{a)}\quad J_{m+1}-J_{n-1}=(a_m-a_{n-1})\,D_{n-1}$$

oder

$$\text{b)}\quad J_{n-1}-J_{m+1}=(a_{n-1}-a_m)\,D_m.$$

Wäre nun 1°. $J_{m+1}>J_{n-1}$, so wäre nach a) a_m-a_{n-1} positiv, und also mindestens $=1$, folglich $J_{m+1}-J_{n-1}\overset{=}{>}D_{n-1}$. Dies ist aber unmöglich, da (nach 3.) $\sqrt{A}-J_{n-1}<D_{n-1}$, also wegen $J_{m+1}<\sqrt{A}$, auch $J_{m+1}-J_{n-1}<D_{n-1}$ ist. Wäre 2°. $J_{m+1}<J_{n-1}$, so wäre nach b) $a_{n-1}-a_m$ positiv, und also mindestens $=1$, folglich $J_{n-1}-J_{m+1}\overset{=}{>}D_m$. Dies ist wieder unmöglich, da (nach 3.) $\sqrt{A}-J_{m+1}<D_m$, also wegen $J_{n-1}<\sqrt{A}$, auch $J_{n-1}-J_{m+1}<D_m$ ist. Es ist also $J_{m+1}=J_{n-1}$, folglich nach

a) oder b) auch $a_m = a_{n-1}$, d. h. aus $J_m = J_n$, $D_{m-1} = D_n$ folgt $J_{m+1} = J_{n-1}$, $D_m = D_{n-1}$, $a_n = a_{n-1}$. Nun ist wirklich $J_1 = J_k$ $(=af)$, $D_0 = D_k (=f)$, folglich nach und nach

$$J_2 = J_{k-1},\ D_1 = D_{k-1},\ a_1 = a_{k-1}$$
$$J_3 = J_{k-2},\ D_2 = D_{k-2},\ a_2 = a_{k-2}$$
$$J_4 = J_{k-3},\ D_3 = D_{k-3},\ a_3 = a_{k-3}$$

u. s. w. u. s. w.

Die Elemente haben hiernach in jeder Periode folgenden Fortgang:

Die Zähler $J_1\ J_2\ J_3 \ldots\ldots J_3\ J_2\ J_1$
Die Nenner $D_1\ D_2 \ldots\ldots D_2\ D_1\ f$
Die Quotienten $a_1\ a_2 \ldots\ldots a_2\ a_1\ 2a$.

Diese Anordnung der Elemente nennt Legendre **Symmetrie der Periode**.

6.

Von jetzt an werden wir das Hauptaugenmerk auf die Fälle wenden, wo der Nenner eines vollständigen Quotienten eine der Zahlen 1, 2, f, $2f$ wird. Ich bemerke dabei, dass im Fall einer geraden Gliederzahl der Periode (k) der Nenner $D_{\frac{1}{2}k}$ **Mittelnenner**, und der Quotient $a_{\frac{1}{2}k}$ **Mittelquotient** genannt werden soll.

Bei vielen Entwickelungen, z. B. bei denen von $\sqrt{\frac{7}{4}}$, $\sqrt{\frac{26}{3}}$, $\sqrt{\frac{9}{5}}$, $\sqrt{\frac{7}{2}}$, $\sqrt{\frac{9}{8}}$ kommt der Nenner 1 vor, überall nur **einmal** in der Periode, und stets als Mittelnenner. Untersuchen wir, ob diese Beobachtung sich in allen ähnlichen Fällen bestätigen wird.

Es sei also $D_n = 1$. Aus $\sqrt{A} - D_n < J_n < \sqrt{A}$ folgt dann leicht $J_n = J_{n+1} = \alpha$, $a_n = J_n + J_{n+1} = 2\alpha$, wo α die grösste in $\sqrt{fh} = \sqrt{A}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet.

Da also zu dem Nenner $D_n = 1$ nur ein bestimmter Zähler $J_n = \alpha$ gehören kann, und in **einer** Periode nicht zwei gleiche vollständige Quotienten vorkommen können, so wird sich der Nenner 1 in keinem Falle öfter als einmal vorfinden. Für $f = 1$, oder wenn es sich um die Entwickelung der Quadratwurzel aus einer **ganzen** Zahl handelt, wird seine Stelle am **Ende** der Periode sein (4.); ist aber f nicht gleich 1, so folgt aus der **Symmetrie** der periodischen Elemente (5.), dass der Nenner 1 nur bei **gerader** Gliederzahl der Periode (k), und zwar als Mittelnenner vorkommen kann.



Kommt nun der Mittelnenner 1 in der That vor, so ist der mittlere vollständige Quotient $= \frac{\sqrt{A}+\alpha}{1}$, der auf ihn folgende $= \frac{\sqrt{A}+\alpha}{A-\alpha^2}$ oder gleich dem ersten vollständigen Quotienten in der Entwickelung von $\sqrt{fh} = \sqrt{A}$. Kennt man also die Periode der Nenner für $\sqrt{\frac{h}{f}}$, so kann man daraus unmittelbar die entsprechende Periode für $\sqrt{fh}$ herleiten, indem man die auf den Nenner 1 in der ersten Entwickelung folgenden Nenner der Reihe nach hinschreibt, und mit dem Nenner 1 abschliesst. Es sei z. B.

$$(\beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ 1\ \varepsilon\ \delta\ \gamma\ \beta\ f)\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ 1\ \varepsilon\ \delta\ \gamma\ \beta\ f \ldots\ldots$$

die Reihenfolge der Nenner für $\sqrt{\frac{h}{f}}$, wo die eingeklammerten Glieder die Periode bilden, so wird die Reihenfolge der Nenner für $\sqrt{fh}$ diese sein:

$$(\varepsilon\ \delta\ \gamma\ \beta\ f\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ 1)\ \varepsilon\ \delta\ \gamma\ \beta\ f\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ 1 \ldots\ldots,$$

und zwar müssen die eingeklammerten Glieder die Periode bilden, denn in der Entwickelung von $\sqrt{fh}$ ist der letzte Nenner immer $=1$, und innerhalb einer Periode kann nur ein Nenner den Werth 1 haben.

Die in diesem Paragraphen entwickelten Resultate mögen nun ihrer Bedeutung für das Folgende wegen zusammengestellt werden:

(1) Verwandelt man $\sqrt{\frac{h}{f}}$ in einen Kettenbruch, so kann der Nenner 1 in jeder Periode nicht öfter als einmal zum Vorschein kommen.

(2) Für $f=1$ kommt er am Ende der Periode stets vor. Für $f>1$ und für eine ungerade Gliederzahl wird er niemals angetroffen; bei gerader Gliederzahl **kann** er vorkommen, und zwar als Mittelnenner.

(3) Ist der Mittelnenner 1 vorhanden, so kann man aus der Periode der Nenner für $\sqrt{\frac{h}{f}}$ die Periode für $\sqrt{fh}$, wie oben gezeigt worden, ohne Rechnung herleiten; die letztere enthält dieselbe Anzahl von Gliedern, ihr Mittelnenner ist immer $=f$.

Es versteht sich, dass eine ähnliche Bemerkung auch für die Zähler, und für die Quotienten gilt; z. B. für $\sqrt{\frac{9}{5}}$ ist die Reihe der Quotienten 1 (2 1 12 1 2 2) 2 1 12....., die Periode durch ( ) angedeutet, der Mittelnenner 1 vorhanden; die Reihe der Quotienten für $\sqrt{45}$ wird sein 6 (1 2 2 2 1 12) 1 2 2....

Ferner verdient Folgendes bemerkt zu werden. Es ist oben bewiesen, dass kein Quotient die Grenze 2α überschreiten kann.

Es lässt sich zeigen, dass der Quotient 2α selbst nur einmal in der Periode, und zwar als Endnenner, oder als Mittelnenner vorkommen kann, jenachdem $\frac{h}{f}$ eine ganze Zahl, oder keine ganze Zahl ist.

Ist nämlich $a_n = 2\alpha$, also $J_n + J_{n+1} = 2\alpha D_n$, so muss wegen $J_n + J_{n+1} \overset{=}{<} 2\alpha$, $D_n = 1$ sein, und daraus folgt die Richtigkeit der Behauptung.

(4) Es sei $A = fh = f'h'$, wo f und h, sowie f' und h' prim zu einander sein sollen, auch $f > 1$, $f' > 1$, $h > f$, $h' > f'$ angenommen wird. Ich behaupte, dass der Mittelnenner 1 in den beiden Entwickelungen von $\sqrt{\frac{h}{f}}$, $\sqrt{\frac{h'}{f'}}$ nie zu derselben Zeit vorkommen kann.

Dies zu beweisen, sei $(\beta\ \gamma\ \delta\ 1\ \varepsilon\ \zeta\ \eta\ f)\ \beta\ \gamma\ \delta\ 1\ \varepsilon\ \zeta\ \eta\ f \ldots$ die Reihe der Nenner für $\sqrt{\frac{h}{f}}$, wo die Periode durch ( ) angedeutet worden. Bemerkt wird, dass kein Buchstabe den Werth 1 haben kann (1). Fände sich nun in der Entwickelung von $\sqrt{\frac{h'}{f'}}$ der Mittelnenner 1 ebenfalls, so wäre der mittlere vollständige Quotient $= \frac{\sqrt{f'h'} + \alpha'}{1}$ (α' die grösste in $\sqrt{f'h'}$ enthaltene ganze Zahl); nun ist $f'h' = fh$, also $\alpha' = \alpha$, folglich wären die beiden mittleren vollständigen Quotienten für $\sqrt{\frac{h}{f}}$ und $\sqrt{\frac{h'}{f'}}$ einander gleich, und die Reihenfolge der Nenner für die letztere Wurzel vom Nenner 1 an würde somit diese sein: $1\ \varepsilon\ \zeta\ \eta\ f\ \beta\ \gamma\ \delta\ 1\ \varepsilon\ \zeta\ \eta\ f, \ldots$, wobei das erste 1 die Mitte der ersten, das zweite die Mitte der zweiten Periode bilden wird; beide Perioden bestehen aber aus gleich viel Gliedern, daher würde die erste Periode offenbar mit dem Nenner f abschliessen. Nun ist nach dem Vorhergehenden der letzte Nenner $= f'$, also wäre $f' = f$, gegen die Voraussetzung.

7.

Zu dem Nenner $D_n = 2$ kann ebenfalls nur ein bestimmter Zähler J_n gehören. Denn es ist (3) $\sqrt{A} - 2 < J_n < \sqrt{A}$, $\sqrt{A} - 2 < J_{n+1} < \sqrt{A}$, daher J_n oder J_{n+1} entweder $= \alpha$ oder $= \alpha - 1$ (α hat immer die obige Bedeutung). Es ist ferner $2D_{n-1} = A - J_n^2$, $2D_{n+1} = A - J^2_{n+1}$, also J_n oder J_{n+1} stets so beschaffen, dass $A - J_n^2$ oder $A - J^2_{n+1}$ gerade ist, oder diese Zahlen sind mit A zugleich gerade oder ungerade. In keinem Falle wird es also zweifelhaft bleiben, ob J_n oder $J_{n+1} = \alpha$ oder $= \alpha - 1$ ist. Z. B. für $\sqrt{\frac{25}{3}}$, wo $A = 75$, $\alpha = 8$, ist $D_2 = 2$, J_2 ungerade, folglich

$J_2 = J_3 = 7$ $(=\alpha-1)$. Für $\sqrt{\frac{5}{3}}$ dagegen, wo $A=15$, $\alpha=3$, ist $D_1=2$, J_1 ungerade, folglich $J_1=J_2=3\,(=\alpha)$.

Uebrigens ist auch a_n bestimmt; denn $J_n+J_{n+1}=a_n D_n=2a_n$, $J_n=J_{n+1}$, also $a_n=J_n$. Nur findet hier die Umkehrung, dass zu dem Quotienten $\alpha-1$ oder α der Nenner 2 gehören muss, im Allgemeinen nicht statt, weshalb ein solcher Quotient in der Periode auch öfter als einmal vorkommen kann.

Durch Schlüsse, welche denen in 6. ganz ähnlich sind, gelangt man nun zu folgenden Resultaten:

(1) Der Nenner 2 kann in der Periode für $\sqrt{\frac{h}{f}}$ nicht öfter als einmal zum Vorschein kommen.

(2) Für $f=2$ kommt er am Ende der Periode stets vor. Für f nicht $=2$ und für eine ungerade Gliederzahl wird er niemals angetroffen; bei gerader Gliederzahl **kann** er vorkommen, und zwar als Mittelnenner.

(3) Wenn $A=fh=f'h'$, f und h sowohl, als f' und h' prim zu einander sind, und weder f noch $f'=2$, auch $h>f$, $h'>f'$, so wird der Mittelnenner 2 in den beiden Entwickelungen von $\sqrt{\frac{h}{f}}$, $\sqrt{\frac{h'}{f'}}$ nie zu derselben Zeit vorkommen.

(4) Ist f weder $=1$ noch $=2$, so werden in der Entwickelung von $\sqrt{\frac{h}{f}}$ die beiden Nenner 1 und 2 deshalb nicht zu derselben Zeit vorkommen, weil der Mittelnenner nicht zugleich 1 und 2 sein kann.

8.

Ist $D_n=f$, so hat man $\sqrt{A}-f<J_n<\sqrt{A}$, $\frac{\sqrt{A}}{f}-1<\frac{J_n}{f}<\frac{\sqrt{A}}{f}$. Wenn nun $\frac{J_n}{f}$ eine ganze Zahl, so wird $\frac{J_n}{f}=a$ (a die grösste in $\sqrt{\frac{h}{f}}$ enthaltene ganze Zahl), $J_n=af$. Daraus folgt, dass zu dem Nenner f nur ein bestimmter durch f theilbarer Zähler J_n gehören kann. Wenn die Zahl f alle ihre Primfactoren nur in der ersten Potenz enthält, d. h. durch kein Quadrat theilbar ist, so folgt aus $fD_{n-1}=fh-J_n^2$, dass nicht bloss J_n^2, sondern auch J_n selbst, durch f theilbar ist, und in diesem Falle wird folglich $J_n=af$ sein. Enthält aber f einen quadratischen Factor, so ist nicht nöthig, dass J_n durch f theilbar ist, wenn es auch J_n^2 ist, und zu dem Nenner f wird also auch ein anderer Zähler als af gehören dürfen. Hieraus folgt:

Ist der Nenner f durch kein Quadrat theilbar, so kommt er in der Periode nur einmal, nämlich am Ende derselben vor; im entgegengesetzten Falle kann er aber öfter vorkommen, jedoch nur mit einem solchen Zähler zusammentreffen, dessen Quadrat ein Vielfaches von f ist.

Dabei ist zu bemerken, dass in der Entwickelung von $\sqrt{fh}$ der Nenner f in der Mitte der Periode vorkommen wird.

Beispiel. Für $\sqrt{\frac{17}{9}} = \frac{\sqrt{153}}{9}$ erhält man folgende Elemente:

J_n	D_n	a_n
0	9	1
9	8	2
7	13	1
6	9	2
12	1	24
12	9	2
6	13	1
7	8	2
9	9	2

Der Nenner 9 kommt nicht bloss am Ende der Periode vor, sondern ausserdem noch zweimal, an beiden Stellen J_n^2 durch 9 theilbar, nämlich $J_n^2 = 36$ und $J_n^2 = 144$, aber nicht J_n selbst.

9.

Es sei endlich $D_n = 2f$. Es ist dann $2fD_{n-1} = A - J_n^2 = fh - J_n^2$, J_n^2 theilbar durch f. Ist f durch kein Quadrat theilbar, so wird es folglich ein Theiler von J_n sein. Nun ist aber $\sqrt{A} - 2f < J_n < \sqrt{A}$, $\frac{\sqrt{A}}{f} - 2 < \frac{J_n}{f} < \frac{\sqrt{A}}{f}$, folglich, wenn $\frac{J_n}{f}$ eine ganze Zahl ist, $\frac{J_n}{f}$ entweder $= a$ oder $= a - 1$; in jedem Falle ist aber der Werth von $\frac{J_n}{f}$ bestimmt; denn für $J_n = f'J_n$ wird $2D_{n-1} = h - f'J_n^2$, folglich J'_n so zu nehmen, dass die Differenz $h - fJ'^2_n$ eine gerade Zahl ist. Daraus fliesst:

Wenn die Zahl f durch kein Quadrat theilbar ist, und die Gliederzahl der Periode ungerade, so wird der Nenner $2f$ nirgends angetroffen werden; bei gerader Gliederzahl kann er sich vorfinden, und zwar als Mittelnenner.

Beispiel. Für $\sqrt{\frac{23}{17}} = \frac{\sqrt{391}}{17}$ erhält man folgende Werthe, von denen der Mittelnenner $= 34$ ist:

J_n	D_n	a_n
0	17	1
17	6	6
19	5	7
16	27	1
11	10	3
19	3	12
17	34	1
17	3	12
19	10	3
11	27	1
16	5	7
19	6	6
17	17	2

10.

Wir ziehen jetzt die Näherungsbrüche mit in Betracht. Zwei auf einander folgende Näherungsbrüche für $\sqrt{\frac{h}{f}}$ seien $\frac{p_0}{q_0}$, $\frac{p}{q}$, der auf den letztern folgende vollständige Quotient $\frac{\sqrt{A}+J}{D}$; dann ist nach dem Bildungsgesetz dreier benachbarter Näherungsbrüche:

$$\frac{A}{f} = \frac{p\left(\frac{\sqrt{A}+J}{D}\right) + p_0}{q\left(\frac{\sqrt{A}+J}{D}\right) + q_0}.$$

Bringt man diese Irrationalgleichung auf die Form $m+n\sqrt{A}=0$, und setzt dann, wie es nicht anders sein kann, $m=0$, $n=0$, so kommt

$$\text{daraus}\left\{\begin{array}{l} qJ+q_0D-fp=0, \\ pJ+p_0D-hq=0; \\ \\ -(pq_0-p_0q)J=fpp_0-hqq_0, \\ (pq_0-p_0q)D=fp^2-hq^2, \\ \quad \text{wo } pq_0-p_0q=\pm 1 \text{ ist.} \end{array}\right.$$

Man kann also der unbestimmten Gleichung $ft^2-hu^2=\pm D$ durch ganze Zahlen $t=p$, $u=q$ genügen, wenn in der Entwickelung von $\sqrt{\frac{h}{f}}$ der Nenner D vorkommt, und der Näherungsbruch $\frac{p}{q}$ so beschaffen ist, dass das Vorzeichen von fp^2-hq^2 mit dem in obiger Gleichung übereinkommt. p und q sind bekanntlich relative Primzahlen.

Umgekehrt, wenn der Gleichung $ft^2 - hu^2 = \pm D$ durch zwei ganze Zahlen $t=p$, $u=q$, welche prim zu einander sind, genügt werden kann, und ausserdem $D < \sqrt{A}$ ist, so muss $\frac{p}{q}$ einer der convergirenden Brüche von $\sqrt{\frac{h}{f}}$ sein. Wegen des Beweises dieses wichtigen Theorems sei es erlaubt zu verweisen auf Legendre Théorie des nombres. Tome I. §. XII. und auf Mindings Anfangsgründe der höhern Arithmetik. 9. Abschnitt. Lehrsatz 6.

11.

Lehrsatz. Die Gliederzahlen der Perioden für $\sqrt{\frac{h}{f}}$ und $\sqrt{fh}$ sind zugleich gerade oder ungerade.

Beweis. Bezeichnet man den vorletzten Näherungsbruch von $\sqrt{\frac{h}{f}}$ in der ersten Periode durch $\frac{p}{q}$, so hat man

$fp^2 - hq^2 = +f$ für eine gerade Gliederzahl,
$fp^2 - hq^2 = -f$ für eine ungerade Gliederzahl.

Nach 10. ist nun ferner, da $J = af$, $D = f$ ist, $paf + p_0 f - hq = 0$, also hq durch f theilbar, und da h und f relative Primzahlen sind, q ebenfalls. Statt der beiden vorhergehenden Gleichungen kann man also die beiden folgenden setzen:

$$p^2 - fh\left(\frac{q}{f}\right)^2 = +1, \quad p^2 - fh\left(\frac{q}{f}\right)^2 = -1.$$

(1) Ist nun die Gliederzahl der Periode für $\sqrt{\frac{h}{f}}$ ungerade, so existirt die letzte der beiden Gleichungen, d. h. die unbestimmte Gleichung $x^2 - fhy^2 = -1$ ist durch die ganzen Zahlen $x = p$, $y = \frac{q}{f}$ lösbar, und daraus folgt mit Beachtung von 6. (1) und (2) und von (10) leicht, dass die Gliederzahl der Periode für $\sqrt{fh}$ ebenfalls ungerade ist.

(2) Umgekehrt, wenn die Gliederzahl für $\sqrt{fh}$ ungerade ist, so muss sie für $\sqrt{\frac{h}{f}}$ ebenfalls ungerade sein. Bezeichnet man nämlich den vorletzten Näherungsbruch in der ersten Periode für $\sqrt{fh}$ durch $\frac{x}{y}$, so ist $x^2 - fh.y^2 = -1$, folglich $fx^2 - h.(fy)^2 = -f$; aber $f < \sqrt{fh}$, daher (10) $\frac{x}{fy}$ ein Näherungsbruch von $\sqrt{\frac{h}{f}}$, auf welchen der vollständige Quotient $\frac{\sqrt{A}+J}{f}$ folgen mag. (Der Nen-

ner ist nämlich immer $=f$). Setzt man nun in 10. $D=f$, $p=x$, $q=fy$, so kommt $-J=fxp_0-fhyq_0$, folglich J durch f theilbar, also nach 8. $J=af$, der vollständige Quotient $\frac{\sqrt{A}+J}{f}=\frac{\sqrt{A}+af}{f}$ steht somit am Ende der Periode, oder der Bruch $\frac{x}{fy}$ ist der vorletzte Näherungsbruch in irgend einer Periode für $\sqrt{\frac{h}{f}}$. Daraus folgt, dass die Gliederzahl für diese Wurzel ungerade ist; denn wäre sie gerade, so würde für jeden solchen Bruch $\frac{p}{q}$ die Gleichung $fp^2-hq^2=+f$ statt haben.

12.

Es seien $\frac{x}{y}$, $\frac{x'}{y'}$, $\frac{x''}{y''}$,..... die vorletzten Näherungsbrüche resp. in der 1ten, 2ten, 3ten... Periode von $\sqrt{fh}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$,.... die entsprechenden Näherungsbrüche von $\sqrt{\frac{h}{f}}$, deren Nenner nach 11. sämmtlich durch f theilbar sind. Setzt man nun $q=rf$, $q'=r'f$, $q''=r''f$...., so werden je zwei übereinanderstehende Glieder der beiden folgenden Reihen

$$(a)\quad \frac{x}{y},\ \frac{x'}{y'},\ \frac{x''}{y''},\ \frac{x'''}{y'''},\ldots\ldots$$

$$(b)\quad \frac{p}{r},\ \frac{p'}{r'},\ \frac{p''}{r''},\ \frac{p'''}{r'''},\ldots\ldots$$

vollkommen identisch sein.

Dies zu erweisen, sei $\frac{P}{R}$ irgend ein Bruch der zweiten Reihe, $\Theta=Rf$; dann ist $fP^2-h\Theta^2=\pm f$, oder $P^2-fh.R^2=\pm 1$, folglich $\frac{P}{R}$ irgend einem Gliede der ersten Reihe gleich.

Ist umgekehrt $\frac{X}{Y}$ irgend ein Glied der Reihe (a), so ist $X^2-fh.Y^2=\pm 1$, oder $fX^2-h.(fY)^2=\pm f$, daher nach 11. $\frac{X}{fY}$ dem vorletzten Näherungsbruch irgend einer der Perioden für $\sqrt{\frac{h}{f}}$ gleich, d. h. $X=P$, $fY=\Theta$, oder $X=P$, $Y=R$.

Da also jedes Glied einer der beiden Reihen (a), (b) irgend einem Gliede der andern Reihe gleich ist, und umgekehrt, da

ferner aus der Art, wie die Näherungsbrüche gebildet werden, erhellt, dass Zähler und Nenner in den beiden Reihen (a) und (b) fortwährend wachsen, so folgt, dass nur die übereinanderstehenden Glieder gleich sein können.

Will man also die Brüche $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}, \ldots$ berechnen, so berechnet man nur $\frac{x}{y}, \frac{x'}{y'}, \frac{x''}{y''}$, und multiplicirt, die Zähler beibehaltend, jeden Nenner mit f.

Z. B. Es seien die Näherungsbrüche $\frac{p}{q}$ für $\sqrt{\frac{5}{2}}$ zu bestimmen. Verwandelt man $\sqrt{10}$ in einen Kettenbruch, so kommt

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{1}, \frac{19}{6}, \frac{117}{37}, \frac{721}{228}, \frac{4443}{1405}, \ldots ^{*)}$$

folglich

$$\frac{p}{q} = \frac{3}{2}, \frac{19}{12}, \frac{117}{74}, \frac{721}{456}, \frac{4443}{2810}, \ldots.$$

Zu denselben Werthen von $\frac{p}{q}$ gelangt man direct durch Entwickelung von $\sqrt{\frac{5}{2}}$ in einen Kettenbruch.

13.

Auflösung der Gleichungen

$$\text{(a)} \quad fp^2 - hq^2 = +f,$$
$$\text{(b)} \quad fp^2 - hq^2 = -f.$$

(1) Ist f durch kein Quadrat theilbar, so muss es offenbar in q aufgehen; setzen wir also $q = fr$, so verwandelt sich die aufzulösende Gleichung in $p^2 - fh.r^2 = \pm 1$, d. h. p und $\frac{q}{f}$ müssen der Gleichung $x^2 - fh.y^2 = \pm 1$ genügen. Umgekehrt, wenn p und r Werthe der letztern Gleichung sind, so sind p und $fr = q$ Werthe der vorgelegten Gleichung. Hieraus ergiebt sich mit Beachtung der in 11. und 12. erhaltenen Resultate (die Gliederzahl der Periode für $\sqrt{\frac{h}{f}}$ soll durch k, die für $\sqrt{fh}$ durch K bezeichnet werden):

*) Dass man aus dem Näherungsbruch der ersten Periode die in den andern Perioden auf eine einfache Art herleiten kann, bedarf wohl kaum der Erinnerung.

α) Ist k gerade, so ist die Gleichung (b) eben so wie $x^2-fh.y^2=-1$ unmöglich; dagegen erhält man alle Auflösungen der Gleichung (a) durch die Formeln $p=x$, $q=fy$, wo x und y zwei beliebige Werthe der Gleichung $x^2-fh.y^2=+1$ bedeuten.

β) Ist K ungerade, so sind die Gleichungen (a) und (b) beide möglich, und wenn die Brüche $\frac{x}{y}$, $\frac{x'}{y'}$, $\frac{x''}{y''}$,... die im vorig. Paragr. angegebene Bedeutung haben, so werden in der Reihe $\frac{x}{fy}$, $\frac{x'}{fy'}$, $\frac{x''}{fy''}$,..... die Brüche ungeraden Ranges alle Auflösungen der Gleichung (b), die Brüche geraden Ranges alle Auflösungen der Gleichung (a) liefern.

Anmerkung. Man kann die vorgelegten Gleichungen auch durch Verwandlung von $\sqrt{\frac{h}{f}}$ in einen Kettenbruch auflösen. Nach 8. wird der Nenner f in jeder Periode nur einmal, nämlich am Ende, vorkommen, und wenn man also die Brüche $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$,.. (vergl. den vor. Paragr.) berechnet, so werden alle der Gleichung (a) genügen, wenn k gerade; dagegen die von ungeradem Range der Gleichung (b), die von geradem der Gleichung (a), wenn k ungerade ist.

(2). Es sei f durch ein Quadrat theilbar. Man setze $f=\vartheta^2 f'$, so dass f' durch kein Quadrat mehr theilbar, ϑ^2 also das grösste in f enthaltene Quadrat ist, welches man durch Zerlegung von f in seine Primfactoren leicht bestimmt; dann kommt $f'p^2-h\left(\frac{q}{\vartheta}\right)^2=\pm f'$, wobei zu bemerken, dass $\frac{q}{\vartheta}$ eine ganze Zahl ist. Lösen nun x und y die Gleichung $x^2-f'h.y^2=\pm 1$ auf, so ist nach (1) $p=x$, $\frac{q}{\vartheta}=f'y$, folglich

$$p=x,\ q=\vartheta f'y=\frac{fy}{\vartheta}.$$

Es verdient bemerkt zu werden, dass in diesen Formeln alle Auflösungen der Gleichung (a) oder (b) enthalten sind, nicht bloss die, bei welchen p und q relative Primzahlen sind. Das grösste gemeinschaftliche Maass von p und q wird immer das von x und ϑ sein, wie leicht erhellt.

Anmerkung. Verwandelt man $\sqrt{\frac{h}{f}}$ in einen Kettenbruch, und berechnet wieder die Näherungsbrüche $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$,.., so werden sie alle der Gleichung (a) oder (b) genügen; man muss aber nicht glauben, dass dadurch alle Auflösungen der Gleichungen erhalten würden; denn der Nenner f kann, wenn er durch ein

Quadrat theilbar ist, an mehreren Stellen der Periode vorkommen. Ueberdies liefern die Näherungsbrüche von $\sqrt{\frac{h}{f'}}$, wenn man auch alle dem Nenner f entsprechende in Betracht zieht, nur solche Zahlen, welche prim zu einander sind.

Erstes Beispiel. Es sei die Gleichung $9p^2 - 17q^2 = \pm 9$ vorgelegt, wo $f=9$, $h=17$, $\vartheta=3$, $f'=1$. Die aufzulösende Gleichung ist also $x^2 - 17y^2 = \pm 1$, K ungerade, die Näherungsbrüche:

$$\overset{-}{\frac{4}{1}},\ \overset{+}{\frac{33}{8}},\ \overset{-}{\frac{268}{65}},\ \overset{+}{\frac{2177}{528}},\ldots,$$

wo die Zeichen über den Brüchen andeuten, ob diese dem obern oder untern Zeichen der Gleichung $x^2 - 17y^2 = \pm 1$ entsprechen. Multiplicirt man, die Zähler beibehaltend, alle Nenner mit $\vartheta f' = 3$, so erhält man die Brüche, welche den vorgelegten Gleichungen genügen, nämlich

$$\overset{-}{\frac{4}{3}},\ \overset{+}{\frac{33}{24}},\ \overset{-}{\frac{268}{195}},\ \overset{+}{\frac{2177}{1584}},\ldots\ldots$$

Die Zahlen 33 und 24 genügen wirklich der Gleichung $9p^2 - 17q^2 = +9$, aber sie sind nicht prim zu einander.

Zweites Beispiel. Gleichung $72p^2 - 95q^2 = \pm 72$, $f=72 = 6^2.2$, $f'=2$, $\vartheta=6$, $\vartheta f'=12$. Die aufzulösende Gleichung $x^2 - 190y^2 = \pm 1$ ist nur für das obere Zeichen lösbar, die kleinsten ihr genügenden Zahlen sind $x=52021$, $y=3774$ (Legendre Théorie des nombers. Table X.), folglich die vorgelegte Gleichung ebenfalls nur für das obere Zeichen lösbar, und die kleinsten Werthe $p=x=52021$, $q=12y=45288$.

In der That erhält man diese Auflösung durch directe Verwandlung von $\sqrt{\frac{95}{72}} = \frac{\sqrt{6840}}{72} = \frac{82+\ldots}{72}$ in einen Kettenbruch.

J_n	D_n	a_n	Näherungsbrüche
0	72	1	1 : 1
72	23	6	7 : 6
66	108	1	8 : 7
42	47	2	23 : 20
52	88	1	31 : 27
36	63	1	54 : 47
27	97	1	85 : 74
70	20	7	649 : 565
70	97	1	734 : 639
		1	1383 : 1204
		1	2117 : 1843
		2	5617 : 4890
		1	7734 : 6733
		6	52021 : 45288

14.

Auflösung der Gleichungen

(a) $fp^2 - hq^2 = +1,$

(b) $fp^2 - hq^2 = -1.$

Mit gehöriger Beachtung alles dessen, was in 6. gesagt worden, und sich an den in 11. bewiesenen Lehrsatz erinnernd, erhält man sogleich folgende Resultate:

(1) Ist die Gleichung $x^2 - fk . y^2 = -1$ möglich, so ist weder die Gleichung (a) noch die Gleichung (b) möglich.

(2) Ist diese Gleichung aber unmöglich, so kann eine der Gleichungen (a) oder (b) möglich sein, aber nie beide zugleich, jene nämlich, wenn k (oder K) von der Form $4m$, diese, wenn k von der Form $4m+2$ ist. Um in dieser Hinsicht die etwanigen Auflösungen zu finden, wird man $\sqrt{\frac{h}{f}}$ in einen Kettenbruch verwandeln, und auf den Mittelnenner Acht haben; ist dieser nicht $=1$, so giebt es keine Auflösung, ist er wirklich $=1$, so berechnet man die unmittelbar vorhergehenden Convergenzbrüche in den verschiedenen Perioden, und erhält dadurch eben so viele Auflösungen der einen oder andern Gleichung.

(3) Es ist entweder gar nicht, oder nur auf eine Art möglich, die Zahl A in zwei Factoren f und h, prim zu einander, so zu zerlegen, dass eine der Gleichungen (a), (b) möglich ist.

Ich werde nun aber zeigen, wie sämmtliche Auflösungen der Gleichung (a) oder (b) sich aus denen der Gleichung $x^2 - fh . y^2 = 1$ durch eine höchst einfache Rechnung herleiten lassen.

Da es nur bei gerader Gliederzahl Auflösungen giebt, so sei $\alpha\ \beta\ \gamma \ldots\ \lambda\ \omega\ \lambda \ldots\ \gamma\ \beta\ 2\alpha$ die erste Periode des Kettenbruchs für $\sqrt{\frac{h}{f}}$, ω also der Mittelquotient, ferner sei $\frac{\sqrt{A}+J}{D}$ der mitt-

lere vollständige Quotient, $\frac{\sqrt{A}+J'}{D'}$ der nächst folgende, der dem Quotienten ω vorhergehende Näherungsbruch $=\frac{p}{q}$, der diesem vorhergehende $=\frac{p_0}{q_0}$, endlich der dem letzten Quotienten $2a$ vorhergehende Näherungsbruch $=\frac{P}{Q}$. Nun ist bekanntlich

$$\frac{q_0}{q}=\frac{1}{\lambda+}\cdots+\frac{1}{\gamma+\frac{1}{\beta}},$$

also

$$\frac{q_0+q\omega}{q}=\omega+\frac{1}{\lambda+}\cdots+\frac{1}{\gamma+\frac{1}{\beta}},$$

also

$$\frac{P}{Q}=\frac{p(q\omega+q_0)+p_0q}{q(q\omega+q_0)+q_0q}=\frac{p(q\omega+2q_0)+p_0q-pq_0}{q(q\omega+2q_0)}.$$

Ferner (nach 10.) $qJ+q_0D-fp=0$; substituirt man den sich hieraus ergebenden Werth von q_0 in $q\omega+2q_0$, und beachtet, dass $D\omega-2J=J'-J$ und $J'=J$ ist, so kommt

$$q\omega+2q_0=\frac{2fp}{D}.$$

Mit Hülfe dieses Werthes wird nun

$$P=\frac{2fp^2}{D}\mp 1,\ \Theta=\frac{2fpq}{D},\ \mp 1=p_0q-pq_0.$$

Bedeutet jetzt $\frac{x}{y}$ den dem letzten Quotienten der ersten Periode von $\sqrt{fh}$ vorhergehenden Näherungsbruch, so ist (nach 12.) $P=x$, $\Theta=fy$; folglich hat man statt der vorhergehenden Gleichungen die folgenden:

$$x=\frac{2fp^2}{D}\mp 1,\ y=\frac{2pq}{D}.$$

Setzt man nun $D=1$, so genügen die Zahlen p und q der Gleichung $fp^2-hq^2=\pm 1$, wo das obere und untere Zeichen resp. mit dem obern und untern in dem vorhergehenden Werthe von x congruirt, und zu ihrer Bestimmung führen die Gleichungen:

$$x=2fp^2\mp 1,\ y=2pq.$$

Aus der ersten derselben ergiebt sich $\frac{x\pm1}{2}=fp^2$, ferner $hq^2 =fp^2\mp1=\frac{x\pm1\mp2}{2}=\frac{x\mp1}{2}$, also

$$p=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(x\pm1)}{f}},\quad q=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(x\mp1)}{h}}.$$

Man sieht, dass weder die Gleichung (a) noch (b) möglich, wofern nicht x ungerade, y gerade ist.

Beispiel. Gleichung $2p^2-15q^2=\pm1$. Die kleinsten Werthe der Gleichung $x^2-30y^2=1$ sind $x=11$, $y=2$, während die Gleichung $x^2-30y^2=-1$ unmöglich ist (Théorie d. nombres Table X), $\frac{1}{2}(x+1)=6$, $\frac{1}{2}(x-1)=5$, $f=2$, $h=15$, $\frac{\frac{1}{2}(x\pm1)}{h}$ keine ganze Zahl, daher die vorgelegte Gleichung unmöglich.

15.

Aus Nro. (3) des vor. Paragr. wissen wir, dass es nur ein Paar Factoren von A giebt, für welches die Gleichung (a) oder (b) möglich ist. Diese Factoren f, h lassen sich aus den bekannten Werthen von x, y unmittelbar herleiten. Da nämlich $\frac{1}{2}(x\pm1) =fp^2$, $\frac{1}{2}y=pq$, $\frac{1}{2}(x\mp1)=hq^2$, so ist offenbar für das obere Zeichen p dass grösste gem. Maass zwischen $\frac{1}{2}(x+1)$ und $\frac{1}{2}y$, q das grösste gem. Maass zwischen $\frac{1}{2}(x-1)$ und $\frac{1}{2}y$, für das untere Zeichen verhält es sich umgekehrt. Aus den so bestimmten Werthen von p und q ergeben sich dann ferner f und h.

Beispiel. Es soll untersucht werden, ob $A=124$ sich so in zwei Factoren (dass sie prim zu einander sein sollen, braucht nicht immer wieder gesagt zu werden) zerlegen lässt, dass Gleichung (a) oder (b) möglich sei. — Die Gleichung $x^2-124y^2=-1$ ist unmöglich, für $x^2-124y^2=1$ aber kommt (Legendre Table X.) $x=4620799$, $y=414960$, $\frac{1}{2}(x+1)=2310400$, $\frac{1}{2}(x-1)=2310399$, $\frac{1}{2}y =207480$, das gr. gem. Maass zwischen $\frac{1}{2}(x+1)$ und $\frac{1}{2}y=\vartheta=760$, das zwischen $\frac{1}{2}(x-1)$ und $\frac{1}{2}y=\vartheta'=273$, daher $\frac{\frac{1}{2}(x+1)}{\vartheta^2}=4$, $\frac{\frac{1}{2}(x-1)}{\vartheta'^2}=31$, folglich $f=4$, $h=31$. Die Gleichung

$$4p^2-31q^2=+1$$

ist also möglich und wird befriedigt durch die kleinsten Zahlen $p=760$, $q=273$.

16.

Auflösung der Gleichungen

$$\text{(a)}\quad fp^2 - hq^2 = +2,$$
$$\text{(b)}\quad fp^2 - hq^2 = -2.$$

Wir können hier sogleich den Fall ausschliessen, in welchem eine der Zahlen f, h gerade ist. Hat sie den Theiler 4, so sind die Gleichungen offenbar nicht lösbar; ist sie das Doppelte einer ungeraden Zahl, so reduciren sich die Gleichungen auf die im vor. Paragr. behandelten. Wenn z. B. $f = 2f'$ (f' ungerade), so kommt $f'p^2 - 2h.\left(\frac{q}{2}\right)^2 = \pm 1$. Man nehme also an, dass f und h beide ungerade sind. Aus 7 und 11 fliessen folgende Resultate:

(1) Wenn die Gleichung $x^2 - fh.y^2 = -1$ möglich, so ist weder (a) noch (b) möglich.

(2) Ist diese Gleichung aber unmöglich, so kann eine der beiden Gleichungen möglich sein, aber nie beide zugleich. Um in dieser Hinsicht die etwanigen Auflösungen zu finden, wird man $\sqrt{\frac{h}{f}}$ in einen Kettenbruch verwandeln, und auf den Mittelnenner Acht haben; ist dieser nicht $= 2$, so giebt es keine Auflösung; ist er wirklich $= 2$, so berechnet man die unmittelbar vorhergehenden Convergenzbrüche in den verschiedenen Perioden, und erhält dadurch eben so viele Auflösungen der einen oder andern Gleichung.

(3) Es ist entweder gar nicht, oder nur auf eine Art möglich, die Zahl A so in zwei Factoren, f und h, zu zerlegen, dass eine der beiden Gleichungen (a), (b) möglich ist.

(4) Sind Auflösungen vorhanden, so lassen sie sich aus denen der Gleichung $x^2 - fh.y^2 = 1$ auf folgende Art herleiten.

Setzt man in 14. $D = 2$, so kommt

$$x = fp^2 \mp 1, \quad y = pq;$$
$$p = \sqrt{\frac{x \pm 1}{f}}, \; q = \sqrt{\frac{x \mp 1}{h}}.$$

Da f und h beide ungerade sind, so müssen, soll die Gleichung $fp^2 - hq^2 = \pm 2$ möglich sein, p und q beide ungerade sein; man sieht also, dass diese Gleichung nicht möglich, wofern nicht x gerade, y ungerade ist.

Zur Bestimmung der Factoren f und h gelangt man durch die Bemerkung, dass für das obere Zeichen p das grösste gem. Maass zwischen $x+1$ und y, q das grösste gem. Maass zwischen $x-1$ und y ist, während es sich für das untere Zeichen umgekehrt verhält.

(5) Lässt sich A so in 2 Factoren, f und h, zerlegen, dass eine der Gleichungen $fp^2-hq^2=\pm1$, $fp^2-hq^2=\pm2$ möglich ist, so kann es nicht noch in zwei andere Factoren, f' und h', so zerlegt werden, dass die andere Gleichung möglich ist.

Dieses letztere gilt aber, was wohl zu beachten, nur unter der Voraussetzung, dass A ungerade ist. Dagegen ist z. B. für $A=30$, $5p^2-6q^2=-1$ für $p=1$, $q=1$, und auch $3p^2-10q^2=+2$ für $p=2$, $q=1$.

Beispiel. Die Gleichung sei $5p^2-63q^2=\pm2$. Die Gliederzahl für $\sqrt{315}$ gerade, $x=71$, $y=4$, die Gleichung also für beide Zeichen unmöglich. Die Gleichung $5p^2-63q^2=\pm1$ ist ebenfalls unmöglich, da $\frac{1}{2}(x+1)$ weder durch f noch durch h theilbar. Die einzige Art, der Gleichung $fp^2-hq^2=+1$ für $fh=315$ zu genügen, ist $f=9$, $h=35$, nämlich durch $p=2$, $q=1$.

17.

Die vorhergehenden Untersuchungen lassen es noch zweifelhaft, ob es vielleicht immer ein Paar Factoren der Zahl A giebt, für welche eine der Gleichungen $fp^2-hq^2=\pm1$, $fp^2-hq^2=\pm2$ möglich ist, oder ob dies in manchen Fällen nicht der Fall ist. Die folgenden Betrachtungen werden jede Ungewissheit in dieser Beziehung heben.

In Bezug auf die kleinsten Werthe der Gleichung $x^2-Ay^2=1$ sind nur drei Fälle möglich: entweder x ist ungerade, y gerade; oder x ist gerade, y ungerade; oder x und y sind beide ungerade. In Betreff des ersten Falles gilt folgendes

Theorem. Sind x und y die kleinsten Werthe der Gleichung $x^2-Ay^2=-1$, und x ungerade, y gerade, (wobei A gerade oder ungerade sein kann), so lässt sich die Zahl A so in zwei Factoren, f und h, prim zu einander zerlegen, dass von den beiden Gleichungen

$$fp^2-hq^2=+1\ldots.(a),\quad fp^2-hq^2=-1\ldots.(b)$$

die eine in ganzen Zahlen auflösbar ist.

Beweis. Es ist $(x+1)(x-1)=Ay^2$, oder da $x+1$, $x-1$, y gerade Zahlen sind, $\frac{1}{2}(x+1).\frac{1}{2}(x-1)=A.(\frac{1}{2}y)^2$. Bezeichnet nun ϑ das gr. gem. Maass zwischen $\frac{1}{2}(x+1)$ und $\frac{1}{2}y$, so wird, da $\frac{1}{2}(x+1)$ und $\frac{1}{2}(x-1)$, als nur um die Einheit verschieden, keinen gem. Factor haben, ϑ^2 in $\frac{1}{2}(x+1)$ aufgehen, und man kann also $\frac{1}{2}(x+1)=\vartheta^2\varrho$, $\frac{1}{2}y=\vartheta\vartheta'$ setzen; dadurch erhält man $\varrho.\frac{1}{2}(x-1)=A\vartheta'^2$; folglich muss ϑ'^2, zu ϱ prim, in $\frac{1}{2}(x-1)$ aufgehen, oder es muss sein $\frac{1}{2}(x-1)=\vartheta'^2\varrho'$, folglich $A=\varrho\varrho'$. Es verdient bemerkt zu werden, dass ϑ' das gr. gem. Maass zwischen $\frac{1}{2}(x-1)$ und $\frac{1}{2}y$ ist, wie leicht erhellt. Es existiren demnach folgende Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}(x+1)=\vartheta^2\varrho,\ \tfrac{1}{2}(x-1)=\vartheta'^2\varrho',\ \varrho\varrho'=A,\ \vartheta\vartheta'=\tfrac{1}{2}y,$$
$$\varrho\vartheta^2-\varrho'\vartheta'^2=1.$$

Man wird hier niemals $\varrho=1$ finden, weil sonst die Gleichung $x^2-Ay^2=1$ durch die Werthe ϑ, ϑ' befriedigt würde, welche resp. kleiner als x, y sind. Dagegen wird man bei ungerader Gliederzahl für $\sqrt{A}:\varrho'=1$ finden, so dass die Gleichung $\vartheta'^2-A\vartheta^2=-1$ entsteht; für diesen Fall ist also $x=2\vartheta'^2+1$, $y=2\vartheta\vartheta'$, wie es schon anderweitig bekannt ist.

18.

Theorem. Ist x gerade, y ungerade (wobei A nothwendig ungerade sein muss), so lässt sich die Zahl A so in zwei Factoren, f und h, prim zu einander, zerlegen, dass von den beiden Gleichungen

$$fp^2-hq^2=+2\ldots.(c),\quad fp^2-hq^2=-2\ldots.(d)$$

die eine in ganzen Zahlen auflösbar ist.

Beweis. Es ist $(x+1)(x-1)=Ay^2$. Bezeichnet nun ϑ das grösste gem. Maass zwischen $x+1$ und y, welches ungerade sein muss, so wird, da $x+1$ und $x-1$ als nur um 2 unterschieden, keinen ungeraden Factor gemein haben, ϑ^2 in $x+1$ aufgehen, und man kann also $x+1=\vartheta^2\varrho$, $y=\vartheta\vartheta'$ setzen; dadurch erhält man $\varrho.(x-1)=A\vartheta'^2$, folglich muss ϑ'^2, zu ϱ prim, in $x-1$ aufgehen, oder es muss sein $x-1=\vartheta'^2\varrho'$, folglich $\varrho\varrho'=A$. Auch verdient bemerkt zu werden, dass ϑ' das grösste gem. Maass zwischen $x-1$ und y ist. Es existiren also folgende Gleichungen:

$$x+1=\vartheta^2\varrho,\ x-1=\vartheta'^2\varrho',\ \varrho\varrho'=A,\ \vartheta\vartheta'=y$$
$$\varrho\vartheta^2-\varrho'\vartheta'^2=2.$$

Der hier vorausgesetzte Fall, dass x gerade, y ungerade ist, kann nur eintreten, wenn die Gliederzahl der Periode für $\sqrt{A}$ gerade ist, weil neben dieser letzten Gleichung die Gleichung $p^2-Aq^2=-1$ nicht bestehen kann. (16. (5)).

19.

Sind endlich x und y beide ungerade, so ist $Ay^2=x^2-1$ von der Form $8m$, folglich A durch 8 theilbar, die Gleichung $fp^2-hq^2=\pm2$, wo $fh=A$, und f, h prim zu einander sein sollen, ist dann nicht möglich (vergl. 16.), eben so ist die Gleichung $fp^2-hq^2=\pm1$ unmöglich, denn diese erfordert, dass x ungerade, y gerade ist.

Beispiel. $A=40$, $x=19$, $y=3$. Von den Gleichungen

$$x^2-40y^2=-1,$$
$$x^2-40y^2=\pm 2,$$
$$5x^2-8y^2=\pm 1,$$
$$5x^2-8y^2=\pm 2$$

ist keine in ganzen Zahlen lösbar.

Betrachtung besonderer Fälle.

20.

Ist A eine ungerade Zahl, und x gerade, y ungerade, so kann die Gleichung $x^2-Ay^2=1$ nur bestehen, wenn A die Form $4m+3$ hat, wie leicht erhellt. Ist also $A=4m+1$, so muss x ungerade, y gerade sein, und es werden die Formeln in 17. zur Geltung kommen. — Ist $A=4m+3$, so kann jeder der beiden in 17. und 18. betrachteten Fälle eintreten. Findet der erste dieser Fälle statt, d. h. ist die Gleichung $\varrho\vartheta^2-\varrho'\vartheta'^2=1$ vorhanden, so erkennt man leicht, dass $\varrho=4k+1$, $\varrho'=4k+3$ sein muss. Findet der zweite Fall statt, d. h. ist die Gleichung $\varrho\vartheta^2-\varrho'\vartheta'^2=2$ vorhanden, so können nur folgende Formen zusammengehören:

$\varrho=8k+1$	$\varrho=8k+5$	$\varrho=8k+3$	$\varrho=8k+7$
$\varrho'=8k+7$	$\varrho'=8k+3$	$\varrho'=8k+1$	$\varrho'=8k+5$
$A=8m+7$	$A=8m+7$	$A=8m+3$	$A=8m+3.$

Man findet dies Resultat am einfachsten, wenn man überlegt, dass ϑ^2 oder $\vartheta'^2\equiv 1$ (mod. 8), also $\varrho\vartheta^2-\varrho'\vartheta'^2\equiv\varrho-\varrho'$, folglich $\varrho-\varrho'\equiv 2$ (mod. 8) ist.

21.

Wenn nun $A=a^\alpha$, wo a eine ungerade Primzahl, und α ungerade ist, so kann es nur auf eine Art in zwei Factoren, prim zu einander, zerlegt werden, und man hat folglich $\varrho=a^\alpha$, $\varrho'=1$ oder umgekehrt.

(1) Ist $a=4m+1$, so muss der Fall $\varrho=1$, $\varrho'=a^\alpha$ ausgeschlossen werden, weil die Gleichung $\vartheta^2-A\vartheta'^2=1$ unstatthaft ist*), folglich $\varrho=a^\alpha$, $\varrho'=1$, und

---

*) ϑ und ϑ' sind nämlich kleiner als x und y und die letztern Zahlen sollen die kleinsten der Gleichung $x^2-Ay^2=1$ sein.

$$\vartheta'^2 - a^\alpha \vartheta^2 = -1.$$

Die Gliederzahl der Periode ist demnach ungerade, und -1 ein quadratischer Rest von a^α.

(2) Ist $a = 4m+3$, so kann die Gleichung $\varrho\vartheta^2 - \varrho'\vartheta'^2 = 1$ nicht statt haben, denn nach 20. müsste $\varrho = 1$ und $\varrho' = a^\alpha$ sein, was unmöglich ist. Daher kommt die Gleichung $\varrho\vartheta^2 - \varrho'\vartheta'^2 = 2$ zur Geltung, mithin eine der beiden folgenden:

$$\vartheta^2 - a^\alpha \vartheta'^2 = 2,$$
$$\vartheta'^2 - a^\alpha \vartheta^2 = -2;$$

jene, wenn $a = 8k+7$, diese, wenn $a = 8k+3$ ist. Auch gelangen wir hiermit zu Sätzen, welche in der Theorie der Zahlen bewiesen werden, dass nämlich 2 quadratischer Rest von einer Potenz (mit ungeradem Exponenten) der Primzahlen $8k+7$, -2 quadratischer Rest von einer Potenz der Primzahlen $8k+3$ ist.

22.

Wenn wir ferner annehmen, dass $A = 2a^\alpha$, wo a eine ungerade Primzahl und α ungerade, so ist in der Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ offenbar x ungerade, y gerade, also nach 17. $\varrho\vartheta^2 - \varrho'\vartheta'^2 = 1$. Da nun in Rücksicht auf die Zerlegung von A bloss die vier Fälle $\varrho = 1$, $\varrho' = 2a^\alpha$; $\varrho = 2a^\alpha$, $\varrho' = 1$; $\varrho = 2$, $\varrho' = a^\alpha$; $\varrho = a^\alpha$, $\varrho' = 2$ möglich sind, und der erste derselben aus dem schon mehrmals angedeuteten Grunde von selbst wegfällt, so wird eine der drei folgenden Gleichungen

$$\text{(a)} \ldots \vartheta'^2 - 2a^\alpha \vartheta^2 = -1,$$
$$\text{(b)} \ldots 2\vartheta^2 - a^\alpha \vartheta'^2 = 1,$$
$$\text{(c)} \ldots 2\vartheta'^2 - a^\alpha \vartheta^2 = -1$$

statt haben. Der erste Fall hat zur nothwendigen Voraussetzung, dass ϑ' ungerade und $a^\alpha \vartheta^2 = \frac{\vartheta'^2 + 1}{2}$ von der Form $\frac{8k+1+1}{2} = 4k+1$ ist; es wird also auch ϑ ungerade, und a^α (oder a) von der Form $4m+1$ sein. Wenn demnach

(1) $a = 4m+3$ ist, so wird nur eine der beiden Gleichungen

$$2\vartheta^2 - a^\alpha \vartheta'^2 = 1,$$
$$2\vartheta'^2 - a^\alpha \vartheta^2 = -1$$

zur Geltung kommen; ich behaupte ferner, dass die erste derselben existiren wird, wenn $a = 8k+7$, die andere, wenn $a = 8k+3$ ist. Fände nämlich im ersten Falle die zweite Gleichung statt, so wäre die Congruenz $-2 . \vartheta'^2 \equiv 1$ (mod. a) vorhan-

den, d. h. das Product $-2.\vartheta'^2$ ein quadratischer Rest von a, folglich auch -2 ein Rest von a (weil das Product eines Nichtrestes in einen Rest bekanntlich ein Nichtrest ist); in der Theorie der Zahlen wird aber bewiesen, dass -2 ein Nichtrest der Primzahl $8k+7$ ist (Mindings Anfangsgründe der höhern Arithmetik. Abschnitt 3. p. 52), folglich

$$2\vartheta^2 - a^\alpha\vartheta'^2 = 1 \text{ für } a = 8k+7.$$

Fände ferner im zweiten Falle die erste Gleichung statt, so wäre die Congruenz $2\vartheta^2 \equiv 1$ (mod. a) vorhanden, und 2 ein Rest von der Primzahl $8k+3$, während nach der Theorie der Zahlen 2 ein Nichtrest dieser Primzahl ist, folglich

$$2\vartheta'^2 - a^\alpha\vartheta^2 = -1 \text{ für } a = 8k+3.$$

(2) Wenn $a = 8k+5$, so können die Gleichungen (b) und (c) nicht statt finden, weil sonst 2 und -2 quadratische Reste der Primzahl $8k+5$ wären, was bekanntlich nicht der Fall ist, folglich

$$\vartheta'^2 - 2a^\alpha\vartheta^2 = -1 \text{ für } a = 8k+5.$$

Für die Formen $a = 8k+1$ endlich, die noch übrig bleiben, findet von den drei Gleichungen (a), (b), (c) bald die eine, bald die andere statt. Hat z. B. A einen der Werthe 2.17, 2.73, 2.89, 2.97, so ist die Gliederzahl der Periode für $\sqrt{A}$ gerade, folglich Gleichung (b) oder (c) vorhanden; für die Werthe $A = 2.41$, 2.113, 2.137 ist die Gliederzahl ungerade, folglich Gleichung (a) vorhanden. Weitere Untersuchungen hierüber gehören gegenwärtig nicht zu meinem Zwecke.

23.

Unterwirft man die Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ in dem Falle, wo A durch 4 theilbar ist, einer genauern Discussion, so gelangt man dahin, sie auf eine ähnliche zu reduciren, in welcher der Coefficient von y^2 gleich $\frac{1}{4}A$ ist, und durch Fortsetzung des Verfahrens wird man diesen Coefficienten zuletzt auf eine ungerade Zahl oder das Doppelte einer ungeraden Zahl bringen.

Es sei zuerst A eine Potenz von 2 oder $x^2 - 2^n y^2 = 1$. Da x nothwendig ungerade ist, so kann man diese Gleichung in $\frac{1}{2}(x+1).\frac{1}{2}(x-1) = 2^{n-2}y^2$ verwandeln. Die Factoren links haben keinen gemeinschaftlichen Factor; ist also ϑ das grösste gemeinschaftliche Maass von $\frac{1}{2}(x+1)$ und y, so wird ϑ^2 in $\frac{1}{2}(x+1)$ aufgehen, oder es wird sein $\frac{1}{2}(x+1) = \varrho\vartheta^2$, $y = \vartheta\vartheta'$ ($\varrho\vartheta$ und ϑ' prim zu einander), $\varrho.\frac{1}{2}(x-1) = 2^{n-2}\vartheta'^2$, $\frac{1}{2}(x-1)$ durch ϑ'^2 theilbar, also $\frac{1}{2}(x-1) = \varrho'\vartheta'^2$, $\varrho\varrho' = 2^{n-2}$, $\varrho\vartheta^2 - \varrho'\vartheta'^2 = 1$. Nach der letzten Gleichung sind ϱ, ϱ' relative Primzahlen, daher nach der vorletzten entweder $\varrho = 1$, $\varrho' = 2^{n-2}$; oder $\varrho = 2^{n-2}$, $\varrho' = 1$. Für den letzten Fall wäre $\vartheta'^2 - 2^{n-2}\vartheta^2 = -1$, ϑ' ungerade, ϑ'^2+1 von der Form $8k+2$

und durch 2^{n-2} theilbar, also $n \overline{\overline{<}} 3$. Nehmen wir nun an, dass $n>3$ ist, so wird $\varrho=1$, $\varrho'=2^{n-2}$ sein, und man hat

$$\tfrac{1}{2}(x+1)=\vartheta^2,\ \tfrac{1}{2}(x-1)=2^{n-2}\vartheta'^2,\ \vartheta\vartheta'=y,$$
$$\vartheta^2-2^{n-2}\vartheta'^2+1.$$

Sind nun $x_0=\vartheta$, $y_0=\vartheta'$ die kleinsten Werthe der Gleichung $x_0^2-2^{n-2}y_0^2=1$, so behaupte ich, dass $x=2\vartheta^2-1$, $y=\vartheta\vartheta'$ die kleinsten Werthe der Gleichung $x^2-2^n y^2=1$ sein werden. Dass diese Werthe der Gleichung überhaupt genügen, findet man leicht. Gesetzt nun $x=\xi$, $y=\eta$ seien die kleinsten Werthe, wo $\xi<2\vartheta^2-1$, so würden $x_0=\sqrt{\tfrac{1}{2}(\xi+1)}$, $y_0=\frac{\eta}{x_0}$ der Gleichung $x_0^2-2^{n-2}y_0^2=1$ genügen, folglich wegen $\vartheta>\sqrt{\tfrac{1}{2}(\xi+1)}$, ϑ und ϑ' nicht die kleinsten Werthe der letztern Gleichung sein.

Aus den kleinsten Werthen der Gleichung $x_0^2-2^3y_0^2=1$, nämlich $x_0=3$, $y_0=1$ kann man also nach den Formeln

$$x=2x_0^2-1,\ y=x_0y_0$$

die kleinsten Werthe der Gleichung $x^2-2^ny^2=1$ für jedes ungerade n berechnen. Dass diese sämmtlichen Werthe ungerade sind, erhellt leicht. Folgende Tafel ist leicht berechnet.

n	x	y
3	3	1
5	17	3
7	577	51
9	665857	29427
11	886731088897	19594173939

Bis $n=9$ findet man die Werthe in der Legendre'schen Tafel.

Noch mag bemerkt werden, dass die Gleichung $x^2-2^ny^2=-1$ für $n \overline{\overline{>}} 3$ unmöglich ist, da $x^2+1=8k+2$ nicht durch 4 theilbar ist; die Gliederzahl der Periode des Kettenbruchs für $\sqrt{2^n}$ wird also gerade sein.

24.

Es sei ferner A durch 4 theilbar, oder die Gleichung $x^2-2^{n+2}A'y^2=1$, wo A' ungerade, aufzulösen. Durch ein dem vorhergehenden ähnliches Verfahren erhält man

$$\tfrac{1}{2}(x+1)=\varrho\vartheta^2,\ \tfrac{1}{2}(x-1)=\varrho'\vartheta'^2,\ \varrho\varrho'=2^nA',\ \vartheta\vartheta'=y,$$
$$\varrho\vartheta^2-\varrho'\vartheta'^2=1,$$

indem ϑ das grösste gemeinschaftliche Maass zwischen $\frac{x+1}{2}$ und y, ϑ' das zwischen $\frac{x-1}{2}$ und y bedeutet.

Sind nun x_0, y_0 die kleinsten Werthe der Gleichung $x_0^2-2^nA'y_0^2=1$, und, wie wir annehmen wollen, y_0 ungerade, so ist nach 14. die Gleichung $\varrho\vartheta^2-\varrho'\vartheta'^2=1$ unmöglich, wenn nicht $\varrho=1$, $\varrho=2^nA'$, daher kommt

$$\tfrac{1}{2}(x+1)=\vartheta^2,\ \tfrac{1}{2}(x-1)=2^nA'\vartheta'^2,\ \vartheta\vartheta'=y$$
$$\vartheta^2-2^nA'\vartheta'^2=1.$$

Setzt man jetzt $\vartheta=x_0$, $\vartheta'=y_0$, so werden $x=2x_0^2-1$, $y=x_0y_0$ die kleinsten Werthe der Gleichung $x^2-2^{n+2}A'y^2=1$ sein, was eben so wie in 23. bewiesen wird. Nach diesen Formeln führt also die Kenntniss der kleinsten Wurzeln von $x_0^2-2^nA'y_0^2=1$ unmittelbar zu der Auflösung von $x^2-2^{n+2}A'y^2=1$ in den kleinsten Zahlen, so oft y_0 ungerade ist.

Ist y_0 gerade, so hat man $x_0^2-2^{n+2}A'\left(\frac{y_0}{2}\right)^2=1$, und es ist ersichtlich, dass $x=x_0$, $y=\frac{1}{2}y_0$ die kleinsten Wurzeln der Gleichung $x^2-2^{n+2}A'y^2=1$ sein werden.

Hiermit ist nun die Aufgabe: aus den kleinsten Wurzeln der Gleichung $x^2-Ay^2=1$, wo A ungerade, oder das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, die kleinsten Wurzeln der Gleichung $x^2-2^nAy^2=1$ unmittelbar herzuleiten, gelöst. Für alle durch 4 theilbaren Werthe von A ist folglich die Verwandlung von $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch zur Auflösung der Gleichung $x^2-Ay^2=1$ unnöthig, und das hier gelehrte Verfahren dürfte, wenn man die Legendre-sche Tafel weiter als bis zu $A=1003$ fortsetzen wollte, eine nicht unwesentliche Erleichterung des Calculs gewähren.

Zur Erläuterung des Verfahrens einige Beispiele:

Es sei die Gleichung $x^2-2^n.3.y^2=1$ aufzulösen, wo $n \geqq 2$ ist. Für $x^2-3y^2=1$ ist $x=2$, $y=1$, daher findet man die Wurzeln von $x'^2-2^2.3.y'^2=1$, $x''^2-2^4.3.y''^2=1$, $x'''^2-2^6.3.y'''^2=1$ u. s. w. successiv

$$x=2,\ y=1$$
$$x'=2x^2-1=7,\ y'=xy=2$$
$$x''=x'=7,\ y''=\tfrac{1}{2}y'=1$$
$$x'''=2x''^2-1=97,\ y'''=x''y''=7$$
$$x^{IV}=2x'''^2-1=18817,\ y^{IV}=x'''y'''=679$$
$$x^{V}=2x^{IV2}-1=708158977,\ y^{V}=x^{IV}y^{IV}=12776743$$

u. s. w.

(Ueber die 5 ersten Paare s. Legendre Table X.)

Für $x^2-6y^2=1$ ferner ist $x=5$, $y=2$, also die Wurzeln von $x^2-Ay^2=1$ für $A=2^3.3$, $2^5.3$, $2^7.3\ldots$

$$x=5,\ y=2$$
$$x'=x=5,\ y'=\tfrac{1}{2}y=1$$
$$x''=2x'^2-1=49,\ y''=x'y'=5$$
$$x'''=2x''^2-1=4801,\ y'''=x''y''=245$$

u. s. w.

Es sei ferner $x^2-2^n.29.y^2=1$ aufzulösen. Hier ist die Gleichung $t^2-29u^2=-1$ möglich, und nach der Legendre'schen Tafel $t=70$, $u=13$, daher bekanntlich $x=2t^2+1$, $y=2tu$, d. i. $x=9801$, $y=2.910$ die kleinsten Werthe von $x^2-29y^2=1$. Man erhält nun:

A	x	y
29	9801	1820
116	9801 *)	910
464	9801	455
1856	192119201	4459455

Ferner ist für $t^2-58u^2=-1$, $t=99$, $u=13$, daher folgende Tafel:

A	x	y
58	19603	2574
232	19603	1287
928	768555217	25229061

Bemerkt zu werden verdient, dass die Gleichung $t^2-Au^2=-1$ unmöglich, so oft A durch 4 theilbar ist, wie leicht erhellt; es wird also die Gliederzahl der Periode des Kettenbruchs für $\sqrt{A}$ in diesem Falle gerade sein.

25.

Die Resultate lassen sich noch mehr verallgemeinern. Jedesmal, wenn A durch ein Quadrat theilbar ist, ist die Gleichung $x^2-Ay^2=\pm1$ einer bemerkenswerthen Reduction fähig. Da sich nämlich dieselbe für $A=\vartheta^2A'$ in $x^2-A'(\vartheta y)^2=\pm1$ verwandelt, so wird $\frac{x}{\vartheta y}$ einem der vorletzten Näherungsbrüche in den Perioden des Kettenbruchs für $\sqrt{A'}$ gleich sein; bezeichnen wir diese resp. der ersten, zweiten, dritten etc. Periode angehörigen Brüche durch

*) Bei Legendre steht als Druckfehler 9301.

$\frac{x}{y}, \frac{x'}{y'}, \frac{x''}{y''}$, etc., so werden unter ihnen sich unzählig viele finden, deren Nenner durch ϑ theilbar sind, da die Gleichung $x^2 - \vartheta^2 A'.y^2 = +1$ stets auflösbar ist. Es sei $\frac{X}{Y}$ der erste der mit dieser Eigenschaft begabten Brüche in der obigen Reihe; da sich die Gleichung $X^2 - A'Y^2 = \pm 1$ in $X^2 - \vartheta^2 A'\left(\frac{Y}{\vartheta}\right)^2 = \pm 1$ verwandelt, so werden $X, \frac{Y}{\vartheta}$ der Gleichung $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ genügen, und, man darf behaupten, die kleinsten Wurzeln derselben sein. Denn gäbe es kleinere Wurzeln X', Y', so wäre $X'^2 - \vartheta^2 A' Y'^2$ oder $X'^2 - A'(\vartheta Y')^2 = \pm 1$, folglich $\frac{X'}{\vartheta Y'}$ ein solcher Näherungsbruch in der Reihe $\frac{x}{y}, \frac{x'}{y'}, \frac{x''}{y''}, \ldots$, dessen Nenner ein Vielfaches von ϑ, mithin $\frac{X}{Y}$ nicht der erste Näherungsbruch dieser Art. Zu mehrerer Verdeutlichung werde noch Folgendes bemerkt:

Ist die Gliederzahl der Periode für $\sqrt{A'}$ gerade, so wird sie auch für $\sqrt{\vartheta^2 A'}$ gerade sein. Denn fände das Gegentheil statt, so wäre die Gleichung $x^2 - \vartheta^2 A' y^2 = -1$, d. i. $x^2 - A'(\vartheta y)^2 = -1$ lösbar, mithin hätte die Periode für $\sqrt{A'}$ eine ungerade Gliederzahl.

Ist aber die Gliederzahl der Periode für $\sqrt{A'}$ ungerade, so kann sie für $\sqrt{\vartheta^2 A'}$ gerade oder ungerade sein, und zwar wird sie das eine, oder das andere sein, je nachdem der Bruch $\frac{X}{Y}$ resp. von geradem, oder von ungeradem Range ist. Wenn nämlich $\frac{X}{Y}$ von ungerad. Range, so ist $X^2 - A'Y^2$ oder $X^2 - \vartheta^2 A'\left(\frac{Y}{\vartheta}\right)^2 = -1$; wenn aber $\frac{X}{Y}$ von geradem Range, so sind $X, \frac{Y}{\vartheta}$ die kleinsten Wurzeln der Gleichung $x^2 - \vartheta^2 A' y^2 = +1$, und wäre also die Periode für $\sqrt{\vartheta^2 A'}$ ungradgliedrig, so würde der Bruch $X : \frac{Y}{\vartheta}$ der zweiten Periode für $\sqrt{\vartheta^2 A'}$ angehören, für den der ersten Periode angehörenden Näherungsbruch $\frac{X^0}{Y^0}$ würde $X^{0^2} - \vartheta^2 A' Y^{0^2}$ oder $X^{0^2} - A'(\vartheta Y^0)^2 = -1$, mithin der Nenner des Bruches $\frac{X^0}{\vartheta Y^0}$ ein Vielfaches von ϑ sein, was unmöglich ist, da $X^0 < X$, $Y^0 < \frac{Y}{\vartheta}$, oder $\vartheta Y^0 < Y$ ist.

Um also die kleinsten Wurzeln der Gleichung $x^2 - \vartheta^2 A'.y^2 = \pm 1$ zu finden, berechne man die Convergenzbrüche $\frac{x}{y}, \frac{x'}{y'}, \frac{x''}{y''}, \ldots$

für $\sqrt{A'}$, und suche den ersten unter ihnen, dessen Nenner durch ϑ theilbar ist $\left(\frac{X}{Y}\right)$, X und $\frac{Y}{\vartheta}$ werden die verlangten Wurzeln sein. Die succ. Berechnung dieser Brüche kann nach den bekannten Formeln

$$1.\quad \begin{cases} x^{(m)} = xx^{(m-1)} + yA'y^{(m-1)}, \\ y^{(m)} = xy^{(m-1)} + yx^{(m-1)} \end{cases}$$

oder nach diesen

$$2.\quad \begin{cases} x^{(m)} = 2x.x^{(m-1)} \mp x^{(m-2)} \\ y^{(m)} = 2x.y^{(m-1)} \mp y^{(m-2)} \end{cases}$$

geschehen, wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem $x^2 - A'y^2 = +1$, oder $x^2 - A'y^2 = -1$ ist. Die Anfangswerthe sind x, y; ferner

$$x' = x^2 + A'y^2 = 2x^2 \mp 1,$$
$$y' = 2xy.$$

Bevor man aber die Rechnung ausführt, wird man den ersten der Nenner y, y', y'',....., welcher durch ϑ theilbar ist, ermitteln. Zu dem Ende braucht man nur die kleinsten Reste dieser Zahlen nach dem Modulus ϑ zu berechnen, bis man auf den Rest Null kommt. Einige Beispiele werden das Verfahren erläutern.

Um die Gleichung $x^2 - 847y^2 = \pm 1$ aufzulösen, zerlege man 847 in 7.11^2, und schlage in der Legendre'schen Tafel die Zahl 7 auf; die nebenstehenden Zahlen $x=8$, $y=3$ genügen der Gleichung $x^2 - 7y^2 = +1$ (während $x^2 - 7y^2 = -1$ unmöglich), die vorgelegte Gleichung ist also nur für das obere Zeichen lösbar. Die Formeln zur Berechnung der Convergenzbrüche sind

$$x^{(m)} = 16x^{(m-1)} - x^{(m-2)},$$
$$y^{(m)} = 16y^{(m-1)} - y^{(m-2)}.$$

Aus der letzten Formel folgt nun $y^{(m)} \equiv 5y^{(m-1)} - y^{(m-2)}$ (mod. 11), daraus nach und nach

$$y \equiv 3 \text{ (mod. 11.)},\ y' \equiv 5.3 \equiv 4,\ y'' \equiv 5.4 - 3 \equiv 6,\ y''' \equiv 5.6 - 4 \equiv 4,$$
$$y^{IV} \equiv 5.4 - 6 \equiv 3,\ y^{V} \equiv 5.3 - 4 \equiv 0,$$

also x^V, $\frac{y^V}{11}$ die kleinsten Wurzeln der Gleichung $x^2 - 847y^2 = +1$ und zwar ist nach den obigen Formeln

$$x^V = 8193151,\ \frac{y^V}{11} = 281520$$

(S. Legendre Table X.)

Ferner sei vorgelegt $x^2-245y^2=\pm 1$, wo $245=5.7^2$. Nun ist $x=2$, $y=1$ für $x^2-5y^2=-1$, also

$$x^{(m)}=4x^{(m-1)}+x^{(m-2)},$$
$$y^{(m)}=4y^{(m-1)}+y^{(m-2)}.$$

Man erhält sodann

$$y\equiv 1 \text{ (mod. 7)},\ y'\equiv 4,\ y''\equiv 3,\ y'''\equiv 2,\ y^{IV}\equiv 4,\ y^{V}\equiv 4,$$
$$y^{VI}\equiv 6,\ y^{VII}\equiv 0.$$

Der Nenner y^{VII} ist von geradem Range, die vorgelegte Gleichung mithin nur für das obere Zeichen lösbar, und man erhält

$$x^{VII}=51841,\ \frac{y^{VII}}{7}=3312$$

als die kleinsten Wurzeln derselben. (Legendre Table X.)

Ueberhaupt reducirt sich die Auflösung der Gleichung $x^2-Ay^2=\pm 1$ immer auf den Fall, in welchem A durch kein Quadrat theilbar ist.

Wäre z. B. $A=2.3^3.5^7.11^6.13$, so würde man es in $2.3.5.13.(3.5^3.11^3)^2$ zerlegen, die Gleichung $x^2-2.3.5.13.y^2=+1$ auflösen, und den ersten der Nenner $y', y'', y''', \ldots$ ermitteln, welcher durch $\vartheta=3.5^3.11^3$ theilbar ist. Das letztere geschieht am einfachsten auf folgende Art:

Man bestimme in der Reihe $y', y'', y''', \ldots\ldots$ den ersten durch 3 theilbaren Nenner $(y^{(m)})$, den ersten durch 5^3 theilbaren $(y^{(n)})$, den ersten durch 11^3 theilbaren $(y^{(p)})$, und suche die kleinste Zahl N, welche den Congruenzen

$$N\equiv 0 \text{ (mod. } m),$$
$$N\equiv 0 \text{ (mod. } n),$$
$$N\equiv 0 \text{ (mod. } p)$$

zugleich Genüge leistet; diese durch m, n, p zugleich theilbare Zahl giebt die Stelle an, welche der erste durch $3.5^3.11^3$ theilbare Nenner in obiger Reihe einnimmt. Diese Regel gründet sich auf die folgende Betrachtung:

Da $\frac{x'}{y'}, \frac{x''}{y''}, \frac{x'''}{y'''}, \ldots\ldots$ die vorletzten Näherungsbrüche in der 1ten, 2ten, 3ten, ... Periode für $\sqrt{A}$ sind, so ist bekanntlich allgemein

$$x^{(m)}+y^{(m)}\sqrt{A}=(x'+y'\sqrt{A})^m,$$

folglich für eine beliebige positive ganze Zahl k:

$$x^{(mk)}+y^{(mk)}\sqrt{A}=(x'+y'\sqrt{A})^{mk}=\{x^{(m)}+y^{(m)}\sqrt{A}\}^k$$

Wenn nun $y^{(m)}$ der erste durch ϑ-theilbare Nenner ist, so wird, wenn man $y^{(m)} = \vartheta z^{(m)}$ setzt, $\frac{x^{(m)}}{z^{(m)}}$ der vorletzte Näherungsbruch in der ersten Periode für $\sqrt{\vartheta^2 A}$ sein, den wir durch $\frac{X'}{Z'}$ bezeichnen wollen; der vorletzte Näherungsbruch in der $k$ten Periode $\left(\frac{X^{(k)}}{Z^{(k)}}\right)$ wird also durch die Gleichung

$$X^{(k)} + Z^{(k)} \sqrt{\vartheta^2 A} = (X' + Z' \sqrt{\vartheta^2 A})^k$$

bestimmt. Nun ist $X' = x^{(m)}$, $Z' = \frac{y^{(m)}}{\vartheta}$, folglich

$$X^{(k)} + \vartheta Z^{(k)} \sqrt{A} = (x^{(m)} + y^{(m)} \sqrt{A})^k$$
$$= x^{(mk)} + y^{(mk)} \sqrt{A}.$$

Daraus folgt:

$$X^{(k)} = x^{(km)},\ Z^{(k)} = \frac{y^{(km)}}{\vartheta};$$

d. h.: Bezeichnet man die vorletzten Näherungsbrüche von $\sqrt{A}$ in den verschiedenen Perioden der Reihe nach durch $\frac{x'}{y'}, \frac{x''}{y''}, \frac{x'''}{y'''}, \ldots$ und ist $\frac{x^{(m)}}{y^{(m)}}$ der erste dieser Brüche, dessen Nenner durch die beliebige Zahl ϑ theilbar ist, so sind

$$x^{(m)} : \frac{y^{(m)}}{\vartheta},\ x^{(2m)} : \frac{y^{(2m)}}{\vartheta},\ x^{(3m)} : \frac{y^{(3m)}}{\vartheta},\ \ldots\ldots$$

die entsprechenden Näherungsbrüche für $\sqrt{\vartheta^2 A}$; andere Nenner als diese $y^{(m)}$, $y^{(2m)}$, $y^{(3m)}$, ... können durch ϑ nicht theilbar sein, wie leicht erhellt.

In dem obigen Beispiel muss also der Stellenzeiger des durch die Zahlen 3, 5^3, 11^3 zugleich theilbaren Nenners, ein Vielfaches von m, n, p zu gleicher Zeit sein, wie bewiesen werden sollte.

Noch mag eines Vortheils gedacht werden, der sich bei der Berechnung einer Tafel darbietet.

Um z. B. die obige Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$, wo $A = 2.3^3.5^7.11^6.13$, aufzulösen, löse man dieselbe zuerst für $A = A' = 2.3.5.13$ auf, und leite hieraus nach und nach die Auflösungen her für

$$A = 3^2 A',\ 3^2.5^2 A',\ 3^2.5^2.5^2 A',\ 3^2.5^2.5^2.5^2 A',$$

$$3^2.5^2.5^2.5^2.11^2 A',\ 3^2.5^2.5^2.5^2.11^2.11^2 A',\ 3^2.5^2.5^2.5^2.11^2.11^2.11^2 A'.$$

Will man die Auflösungen der Gleichung $x^2-Ay^2=\pm 1$ von $A=2$ bis $A=1003$ finden, so wird übrigens die Zerlegung von A immer von der Art sein, dass man es, wenn mehrere Factoren vorkommen, nur mit niedrigen Potenzen derselben zu thun hat.

26.

Es ist noch übrig, einige Bemerkungen über Berechnung und Gebrauch der Tafel zu machen, welche dieser Abhandlung beigefügt ist.

Man gehe die Werthe von N in der Legendre'schen Tafel der Reihe nach durch, und betrachte die nebenstehenden Werthe von x und y. Genügen diese der Gleichung $x^2-Ny^2=-1$, oder sind sie beide ungerade, so wird der betreffende Werth von N ausser Acht gelassen; denn im ersten Falle ist einerseits die Gleichung $fp^2-hq^2=\pm 2$ für $fh=N$ unmöglich, andrerseits die Gleichung $fp^2-hq^2=1$ nur für $f=N$, $h=1$ lösbar; im andern Falle ist keine der Gleichungen $fp^2-hq^2=\pm 1$, $fp^2-hq^2=\pm 2$ möglich (19.).

Alle übrigen Werthe von N, nämlich bis zu 1003, befinden sich in der ersten mit A überschriebenen Columne. Die zugehörigen Werthe von x und y in der Legendre'schen Tafel werden nun entweder so beschaffen sein, dass x ungerade, y gerade, oder so, dass x gerade, y ungerade ist.

Im ersten Falle werden die Werthe ϱ, ϱ'; ϑ, ϑ', welche sich in der zweiten und dritten Columne befinden, und der Gleichung $\varrho\vartheta^2-\varrho'\vartheta'^2=1$ genügen, durch folgende Relationen ausgedrückt:

$$\tfrac{1}{2}(x+1)=\varrho\vartheta^2,\ \ \tfrac{1}{2}(x-1)=\varrho'\vartheta'^2,\ \ \vartheta\vartheta'=\tfrac{1}{2}y,\ \ \varrho\varrho'=A;$$

indem ϑ gemeinschaftl. Maass von $\frac{1}{2}(x+1)$ und $\frac{1}{2}y$, ϑ' das von $\frac{1}{2}(x-1)$ und $\frac{1}{2}y$ bedeutet. Sind die Werthe von x und y nur klein, so bestimmt man eines dieser Maasse, z. B. ϑ sehr leicht, und findet daraus

$$\varrho=\frac{\frac{1}{2}(x+1)}{\vartheta^2},\ \ \varrho'=\frac{A}{\varrho},\ \ \vartheta'=\frac{\frac{1}{2}y}{\vartheta};$$

sind jene Werthe aber gross, so kann die Ermittelung der gemeinschaftlichen Factoren von $\frac{1}{2}(x+1)$ und $\frac{1}{2}y$ einige Umständlichkeit mit sich führen, namentlich, wenn man nicht im Besitz einer Factorentafel ist, und dann empfiehlt sich durch ihre Einfachheit folgende Methode, die ich bei der Anfertigung der Tafel fast durchgängig angewandt habe.

Man stelle die Zahl A als Product von Potenzen absoluter Primzahlen dar, auf diese Weise: $A=a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\ldots\ldots$, und dividire

$\frac{1}{2}(x+1)$ durch das Product aller der Factoren von A, welche darin aufgehen; dieser Theiler ist $=\varrho$, die Quadratwurzel aus dem Quotienten $=\vartheta$, ϱ' und ϑ' findet man nach den Formeln

$$\varrho' = \frac{A}{\varrho}, \quad \vartheta' = \frac{\frac{1}{2}y}{\vartheta}.$$

Hierbei ist zu bemerken, dass, wenn z. B. der Primfactor a in $\frac{1}{2}(x+1)$ aufgeht, die Potenz a^α ebenfalls darin aufgehen wird: denn das Product $\frac{1}{2}(x+1).\frac{1}{2}(x-1)$, dessen Factoren keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, ist durch A, also auch durch a^α theilbar. Die Kriterien für die Theilbarkeit der Zahlen durch Primzahlen, wie 2, 3, 5, 7, 11, leisten hier vortreffliche Dienste. Findet man übrigens nach vollzogener Division, dass $\frac{1}{2}(x+1)$ durch die gewählte Primzahl nicht theilbar ist, so ist diese Division nicht unnütz gemacht, indem dann die um 1 kleinere Zahl $\frac{1}{2}(x-1)$ dadurch theilbar sein wird.

Ist x gerade, y ungerade, so werden ϱ, ϱ'; ϑ, ϑ', welche dann der Gleichung $\varrho\vartheta^2-\varrho'\vartheta'^2=2$ genügen, durch die Formeln

$$x+1=\varrho\vartheta^2, \quad x-1=\varrho'\vartheta'^2, \quad \varrho\varrho'=A, \quad y=\vartheta\vartheta'$$

ausgedrückt, wo ϑ das grösste gemeinschaftliche Maass von $x+1$ und y, ϑ' das von $x-1$ und y ist. In Betreff der Bestimmung dieser Werthe verfährt man ganz wie im ersten Falle.

Um nicht zwei verschiedene Hauptrubriken zu machen, habe ich diejenigen Werthe von A, für welche $\varrho\vartheta^2-\varrho'\vartheta'^2=2$ ist, mit einem Sternchen (*) versehen.

Noch sind folgende im Vorhergehenden bewiesene Sätze bei der Berechnung der Tafel mit Nutzen angewandt worden:

I. Ist $A=a^\alpha$, d. h. Potenz einer Primzahl, so hat man

$$\varrho=1, \quad \varrho'=A, \quad \vartheta=\sqrt{x+1}, \quad \vartheta'=\frac{y}{\vartheta} \text{ für die Form } a=8m+7;$$

$$\varrho=A, \quad \varrho'=1, \quad \vartheta'=\sqrt{x-1}, \quad \vartheta=\frac{y}{\vartheta'} \text{ für die Form } a=8m+3.$$

II. Ist $A=2a^\alpha$, d. h. das Doppelte einer Potenz einer Primzahl, so hat man

$$\varrho=2, \quad \varrho'=a^\alpha, \quad \vartheta=\tfrac{1}{2}\sqrt{x+1}, \quad \vartheta'=\frac{y}{2\vartheta} \text{ für } a=8m+7;$$

$$\varrho=a^\alpha, \quad \varrho'=2, \quad \vartheta'=\tfrac{1}{2}\sqrt{x-1}, \quad \vartheta=\frac{y}{2\vartheta'} \text{ für } a=8m+3.$$

Bei der Ausziehung der Quadratwurzeln sind Tafeln der Quadratzahlen und noch verschiedene andere Vortheile benutzt

worden, die sich hier in der Kürze nicht wohl angeben lassen. Die Tafel der Primzahlen von 3 bis 2063, welche man in Minding's Anfangsgründen der höhern Arithmetik findet, hat ebenfalls vortreffliche Dienste geleistet. Merkwürdigerweise fehlt in dieser Tafel die Primzahl 331; sollte sie in Vega's grösserer Tafel auch fehlen?

Uebrigens ist die hier befolgte Methode, nach welcher die Zahlen meiner Tafel aus denen der Legendre'schen hergeleitet werden, die beste Revision der letztern; die Werthe von x oder y sind fehlerhaft, sobald eine Division nicht aufgeht, oder eine Quadratwurzel sich nicht genau ausziehen lässt. Auf diese Weise habe ich in Legendre's Tafel folgende Fehler entdeckt:

Bei $N=$ 94 lies 2143295 statt 2543295,

„ $N=$116 lies 9801 statt 9301,

„ $N=$149 lies 9305 statt 9303,

„ $N=$171 lies 170 statt 70,

„ $N=$308 lies 351 statt 251,

„ $N=$479 lies 136591 statt 139591,

„ $N=$667 lies 4147668 statt 414768,

„ $N=$1001 lies 1060905 statt 1050905,

„ $N=$271 lies 115974983600 statt 115974988600,

„ $N=$749 lies 1084616384895 statt 108461638495,

„ $N=$751 lies 7293318466794882424418960 statt 7293318466794882425318960,

„ $N=$823 lies 235170474903644006168 statt 2351704903644006168.

Die richtigen Werthe sind nicht durch die bei den vielziffrigen Zahlen sehr mühsame Entwickelung von $\sqrt{N}$ in einen Kettenbruch, sondern durch verschiedene andere Methoden ermittelt worden. Im Uebrigen kann man sich auf die Werthe der Legendre'schen Tafel, welche hier in Betracht gezogen worden, vollkommen verlassen.

Schliesslich einige Erläuterungen über den Gebrauch meiner Tafel, die ich ohne fremde Hülfe mit grosser Sorgfalt, und unter aller möglichen Controlle berechnet habe.

Es sei die Gleichung $ft^2-hu^2=1$ aufzulösen, wo f und h gegebene, relative Primzahlen, sind, und das Product $A=fh$ die Zahl 1003 nicht übersteigt.

Für die Fälle $f=1$, oder $h=1$ findet man die kleinsten Wurzeln mit Hülfe der Legendre'schen Tafel; weshalb sie hier ausgeschlossen werden.

Ist weder f noch $h=1$, so suche man das Product $A=fh$ in der ersten Columne unserer Tafel. Findet man es dort nicht, oder ist, im Fall man es wirklich findet, nicht die doppelte Bedingung erfüllt, dass erstens die Zahl A ohne das Zeichen (*) ist, zweitens in der zweiten Columne sich $\varrho=f$, $\varrho'=h$ vorfindet, so ist keine Auflösung möglich; im entgegengesetzten Falle giebt die dritte Columne die kleinsten Wurzeln $t=\vartheta$, $u=\vartheta'$ an.

Sodann sei die Gleichung

$$ft^2-hu^2=2$$

gegeben, wo f und h wieder relative Primzahlen sein sollen, auch das Product $A=fh$ nicht grösser als 1003 ist.

Ist eine der Zahlen f, h durch 4 theilbar, (die andere ungerade), so findet keine Auflösung statt. — Sind beide Zahlen ungerade, so suche man $A=fh$ in der ersten Columne; damit die Auflösung möglich sei, sind die zwei Bedingungen erforderlich, dass erstens der Werth A mit dem Zeichen (*) versehen sei, zweitens in der zweiten Columne sich $\varrho=f$, $\varrho'=h$ vorfindet; ist beides der Fall, so sind die kleinsten Wurzeln $t=\vartheta$, $u=\vartheta'$ in der dritten Columne angezeigt. — Ist endlich eine der Zahlen f, h das Doppelte einer ungeraden Zahl, (die andere ungerade), z. B. $h=2h'$, so wird man das Product fh in der Tafel unter den mit einem Sternchen versehenen Werthen nicht vorfinden, da alle diese Werthe ungerade sind, es folgt aber nicht, dass die Auflösung in allen Fällen möglich sei, vielmehr ist so zu schliessen:

Die Gleichung

$$ft^2-2h'u^2=2$$

erfordert, dass t gerade, $=2t'$ sei; es kommt also

$$4ft'^2-2h'u^2=2,\ \text{oder}\ 2ft'^2-h'u^2=1.$$

Man versuche also die letzte Gleichung mit Hülfe der Tafel aufzulösen; findet man, dass sie möglich ist, so hat man unmittelbar $t=2t'$, $u=u$ als die Wurzeln von der Gleichung $ft^2-hu^2=2$. Z. B. Es sei $3t^2-94u^2=2$ gegeben. Diese Gleichung reducirt sich auf $6t'^2-47u^2=1$, die Tafel giebt $t'=14$, $u=5$, also ist $t=28$, $u=5$ für die erste Gleichung. Ist f gerade, so versuche man die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}f.t^2-2h.u'^2=1;$$

findet man sie möglich, so kommt $t=t$, $u=2u'$. Dieser Einfach-

heit wegen durften die Auflösungen der Gleichung $ft^2 - hu^2 = 2$ für die Fälle, dass f oder h das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, in der Tafel ganz übergangen werden.

Sollten f und h nicht relative Primzahlen sein, so würde die Gleichung

$$ft^2 - hu^2 = 1$$

offenbar unmöglich, die andere

$$ft^2 - hu^2 = 2$$

nur dann möglich sein, wenn der grösste gemeinschaftliche Theiler von f und h gleich 2 wäre, und, falls dies statt fände, würde die Gleichung sich auf die schon behandelte

$$\tfrac{1}{2}f \,.\, t^2 - \tfrac{1}{2}h \,.\, u^2 = 1$$

reduciren.

Die Gleichungen

$$ft^2 - hu^2 = -1,\quad ft^2 - hu^2 = -2$$

sind einerlei mit

$$hu^2 - ft^2 = 1,\quad hu^2 - ft^2 = 2,$$

unter welcher Form man sie, um Irrungen zu vermeiden, vor der Auflösung darstellen wird.

Tafel

der kleinsten Wurzeln der Gleichungen

$\varrho\vartheta^2 - \varrho'\vartheta'^2 = 1, \quad \varrho\vartheta^2 - \varrho'\vartheta'^2 = 2$

von

$\varrho\varrho' = 3$ bis $\varrho\varrho' = 1003$.

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
*3	3:1	1:1
6	3:2	1:1
*7	1:7	3:1
*11	11:1	1:3
12	4:3	1:1
14	2:7	2:1
*15	5:3	1:1
18	9:2	1:2
*19	19:1	3:13
20	5:4	1:1
21	7:3	2:3
22	11:2	3:7
*23	1:23	5:1
*27	27:1	1:5
28	4:7	4:3
30	6:5	1:1
*31	1:31	39:7
33	3:11	2:1
34	2:17	3:1

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
*35	7:5	1:1
38	19:2	1:3
39	13:3	1:2
42	7:6	1:1
*43	43:1	9:59
44	4:11	5:3
45	9:5	3:4
46	2:23	78:23
*47	1:47	7:1
*51	51:1	1:7
52	13:4	5:9
54	27:2	3:11
55	5:11	3:2
56	8:7	1:1
57	19:3	2:5
*59	59:1	3:23
60	4:15	2:1
62	2:31	4:1
*63	9:7	1:1
66	33:2	1:4
*67	67:1	27:221
68	17:4	1:2
69	3:23	36:13
70	14:5	3:5
*71	1:71	59:7
72	9:8	1:1
*75	3:25	3:1
76	4:19	85:39
77	11:7	4:5

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
78	3:26	3:1
*79	1:79	9:1
*83	83:1	1:9
84	28:3	1:3
86	43:2	11:51
*87	29:3	1:3
90	10:9	1:1
*91	7:13	15:11
92	4:23	12:5
93	31:3	14:45
94	2:47	732:151
95	5:19	2:1
98	2:49	5:1
*99	11:9	1:1
102	51:2	1:5
*103	1:103	477:47
105	21:5	1:2
*107	107:1	3:31
108	4:27	13:5
110	11:10	1:1
111	37:3	2:7
112	16:7	2:3
114	57:2	3:16
*115	23:5	7:15
116	29:4	13:35
117	13:9	5:6
118	59:2	51:277
*119	1:119	11:1
*123	123:1	1:11

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
124	4:31	760:273
126	9:14	5:4
*127	1:127	2175:193
129	43:3	14:53
*131	131:1	9:103
132	12:11	1:1
133	7:19	430:261
134	67:2	33:191
*135	5:27	7:3
138	6:23	2:1
*139	139:1	747:8807
140	4:35	3:1
141	3:47	4:1
142	2:71	6:1
*143	13:11	1:1
146	73:2	1:6
147	49:3	1:4
148	37:4	1:3
150	25:6	1:2
*151	1:151	41571:3383
153	9:17	11:8
154	22:7	22:39
155	5:31	5:2
156	13:12	1:1
158	2:79	44:7
*159	53:3	5:21
161	23:7	16:29
162	81:2	11:70
*163	163:1	627:8005

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
164	41:4	5:16
165	15:11	6:7
166	83:2	3201:20621
*167	1:167	13:1
*171	171:1	1:13
172	4:43	1741:531
174	6:29	11:5
*175	25:7	9:17
177	3:59	102:23
178	89:2	3:20
*179	179:1	153:2047
180	9:20	3:2
182	14:13	1:1
183	61:3	2:9
184	8:23	39:23
186	31:6	11:25
*187	187:1	3:41
188	4:47	24:7
189	7:27	2:1
190	19:10	37:51
*191	1:191	2999:217
194	2:97	7:1
*195	15:13	1:1
198	99:2	1:7
*199	1:199	127539:9041
201	67:3	62:293
203	29:7	1:2
204	4:51	25:7
205	5:41	63:22

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
206	2:103	122:17
207	9:23	8:5
209	11:19	46:35
210	15:14	1:1
*211	211:1	36321:527593
212	53:4	25:91
213	3:71	180:37
214	107:2	57003:416941
*215	5:43	3:1
217	7:31	524:249
*219	3:73	5:1
220	5:44	3:1
221	17:13	7:8
222	3:74	5:1
*223	1:223	15:1
*227	227:1	1:15
228	76:3	1:5
230	46:5	1:3
*231	77:3	1:5
234	9:26	17:10
*235	47:5	1:3
236	4:59	265:69
237	79:3	38:195
238	2:119	54:7
*239	1:239	2489:161
240	16:15	1:1
242	121:2	9:70
*243	243:1	17:265
244	61:4	3805:14859

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
245	49:5	23:72
246	123:2	19:149
*247	13:19	81:67
248	8:31	2:1
249	3:83	1194:227
*251	251:1	121:1917
252	4:63	4:1
253	23:11	8370:12103
254	2:127	8:1
*255	17:15	1:1
258	129:2	1:8
259	37:7	107:246
260	65:4	1:4
261	9:29	3267:1820
262	131:2	633:5123
*263	1:263	373:23
264	33:8	1:2
266	7:38	7:3
*267	267:1	3:49
268	4:67	24421:5967
270	54:5	7:23
*271	1:271	340551:20687
272	17:16	1:1
273	91:3	2:11
275	25:11	2:3
276	12:23	18:13
278	139:2	3:25
*279	9:31	13:7
282	6:47	14:5

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
*283	283:1	699:11759
284	4:71	1740:413
285	29:15	8:9
286	22:13	113:147
*287	1:287	17:1
*291	291:1	1:17
292	73:4	125:534
294	49:6	7:20
295	5:59	450:131
297	27:11	30:47
299	13:23	4:3
300	4:75	13:3
301	43:7	261556:648261
302	2:151	1034:119
*303	101:3	5:29
305	5:61	7:2
306	18:17	1:1
*307	307:1	537:9409
308	44:7	2:5
309	103:3	17654:103443
310	10:31	206:117
*311	1:311	4109:233
315	9:35	2:1
316	4:79	40:9
318	6:53	3:1
*319	29:11	667:1083
321	3:107	6:1
322	2:161	9:1
*323	19:17	1:1

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
326	163:2	1:9
327	109:3	1:6
329	7:47	412:159
330	55:6	1:3
*331	331:1	2900979:5277868
332	4:83	41:9
333	37:9	1:2
334	2:167	3993882:437071
*335	5:67	11:3
*339	339:1	17:313
340	85:4	41:189
341	31:11	414:695
342	19:18	1:1
*343	1:343	11427:617
345	69:5	7:26
*347	347:1	43:801
348	4:87	14:3
350	25:14	3:4
351	13:27	49:34
354	177:2	27:254
355	5:71	309:82
356	89:4	53:250
357	21:27	9:10
358	179:2	22209:210107
*359	1:359	19:1
*363	363:1	1:19
364	4:91	787:165

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
366	3:122	389:61
*367	1:367	137913:7199
368	16:23	6:5
369	9:41	683:320
371	53:7	4:11
372	124:3	7:45
374	187:2	3:29
*375	125:3	11:71
376	8:47	366:151
377	13:29	3:2
378	7:54	25:9
*379	379:1	5843427:113759383
380	20:19	1:1
381	127:3	2:13
382	2:191	203100:20783
*383	1:383	137:7
385	11:35	66:37
386	2:193	167:17
*387	387:1	3:59
388	97:4	569:2802
390	10:39	2:1
*391	1:391	2709:137
393	3:131	2782:421
395	5:79	4:1
396	4:99	5:1
398	2:199	10:1
*399	21:19	1:1
402	201:2	1:10
*403	31:13	147:227

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
404	101:4	1:5
405	81:5	1:4
406	58:7	716:2061
407	37:11	6:11
410	41:10	1:2
*411	411:1	11:223
412	4:103	113764: 22419
413	7:59	90:31
414	18:23	26:23
*415	5:83	1919:471
417	139:3	554:3771
418	209:2	9:92
*419	419:1	803:16437
420	21:20	1:1
422	211:2	129:1325
423	9:47	16:7
426	6:71	86:25
*427	7:61	3:1
428	4:107	481:93
429	3:143	504:73
430	86:5	129:535
*431	1:431	12311:593
434	7:62	3:1
*435	3:145	7:1
436	109:4	851525: 4445091
437	23:19	10:11
438	3:146	7:1
*439	1:439	21:1

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
*443	443:1	1:21
444	148:3	1:7
446	2:223	5248:497
*447	149:3	1:7
448	64:7	1:3
450	9:50	33:14
*451	451:1	321:6817
452	113:4	73:388
453	151:3	74:525
454	227:2	6104097:65030839
*455	65:17	1:3
456	57:8	3:8
*459	459:1	33:707
460	4:115	563:105
462	22:21	1:1
*463	1:463	15732537:731153
465	31:15	16:23
466	233:2	1419:15316
*467	467:1	59:1275
468	13:26	5:3
469	67:7	32:99
470	94:5	3:13
471	157:3	158:1143
473	11:43	2:1
474	79:6	35:127
475	25:19	34:39
476	4:119	60:11
477	9:53	22083:9100

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
478	2:239	20107956: 1839433
*479	1:479	1729:79
482	2:241	11:1
*483	23:21	1:1
486	243:2	1:11
*487	1:487	7204587: 326471
489	163:3	4826:35573
490	49:10	103:228
*491	491:1	13809: 305987
492	4:123	61:11
494	38:13	31:53
495	45:11	1:2
496	16:31	380:273
497	71:7	92:293
498	249:2	19:212
*499	499:1	3:67
500	125:4	61:341
501	3:167	1368864: 183469
502	251:2	2763:30953
*503	1:503	157:7
504	9:56	5:2
505	5:101	9:2
506	23:22	1:1
507	169:3	2:15
508	4:127	2365312: 419775
510	34:15	2:3

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
*511	1:511	64719:2863
513	19:27	602:505
514	257:2	3:34
*515	103:5	13:59
516	172:3	7:53
517	47:11	{79290: 163897}
518	74:7	4:13
*519	173:3	293:2225
522	58:9	13:33
*523	523:1	{12507: 286025}
524	4:131	5305:927
525	25:21	-11:12
526	2:263	{4584105462: 399752993}
*527	1:527	23:1
*531	531:1	1:23
532	28:19	215:261
534	267:2	83:959
*535	5:107	569:123
537	3:179	5662:733
*539	11:49	19:9
540	4:135	122:21
542	2:271	1036:89
543	181:3	43:334
545	109:5	3:14
546	39:14	3:5
*547	547:1	{541137: 12656129}
548	137:4	149:872

Δ	$\varrho:\varrho'_1$	$\vartheta:\vartheta'$
549	61:9	3805:9906
550	11:50	1179:553
*551	29:19	17:21
552	24:23	1:1
553	79:7	62876:211227
*555	15:37	11:7
556	4:139	{38781625: 6578829}
558	9:62	21:8
559	13:43	4414:2427
561	33:17	89:124
562	281:2	627:7432
*563	563:1	11:261
564	12:47	2:1
566	283:2	411:4889
*567	81:7	5:17
568	8:71	3:1
570	6:95	4:1
*571	571:1	{563210019: 13458244873}
572	4:143	6:1
573	3:191	8:1
574	2:287	12:1
*575	25:23	1:1
578	289:2	1:12
579	193:3	1:8
580	145:4	1:6
581	7:83	104222:30267
582	97:6	1:4
583	53:11	282:619

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
584	73:8	1:3
585	9:65	43:16
*587	587:1	57:1381
588	49:12	1:2
589	19:31	{1044070552: 817383375}
590	59:10	7:17
*591	197:3	29:235
594	297:2	43:524
595	35:17	23:33
596	149:4	9305:56791
597	199:3	34118:277875
598	26:23	174:185
*599	1:599	{4968539: 203009}
600	25:24	1:1
602	86:7	2:7
*603	603:1	9:221
604	4:151	{864074020: 140634693}
605	5:121	305:62
606	6:101	1875:457
*607	1:607	405063:16441
609	7:87	208:59
*611	47:13	71:135
612	9:68	11:4
614	307:2	23817:295081
*615	5:123	5:1
616	88:7	11:39
618	103:6	7:29

A	ϱ:ϱ'	ϑ:ϑ'
*619	619:1	28906107:719175577
620	5:124	5:1
621	27:23	12:13
622	2:311	58746:4711
*623	1:623	25:1
*627	627:1	1:25
628	157:4	385645:2416059
630	126:5	1:5
*631	1:631	221272626669:8808724183
632	8:79	22:7
633	211:3	1022:8571
*635	127:5	1:5
636	4:159	662:105
637	49:13	120343:233640
638	22:29	31:29
639	9:71	1160:413
642	321:2	3:38
*643	643:1	55617:1410305
644	92:7	8:29
645	129:5	63:320
646	17:38	3:2
*647	1:647	10963:431
648	81:8	11:35
649	59:11	3085770:7146497
650	26:25	1:1
651	217:3	2:17
652	4:163	32040013:5019135

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
654	3:218	1219:143
655	5:131	8589:1678
656	41:16	5:8
657	73:9	125:356
658	7:94	11:3
*659	659:1	3:77
660	60:11	3:7
662	331:2	1611:20725
663	13:51	2:1
665	35:19	14:19
666	9:74	1233:430
667	29:23	1359:1526
668	4:167	84:13
669	223:3	5647754:48693117
670	134:5	147:761
*671	61:11	31:73
674	2:337	13:1
*675	27:25	1:1
678	339:2	1:13
*679	1:679	133389:5119
681	3:227	1338106:153829
682	31:22	139:165
*683	683:1	499:13041
684	4:171	85:13
686	2:343	52082:3977
687	229:3	19:166
689	53:13	1:2
690	46:15	4:7

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
*691	691:1	212279001: 5580152383
692	173:4	85:559
693	9:77	117:40
694	347:2	7475426163: 98465863939
695	5:139	58:11
*699	699:1	57:1507
700	4:175	1012:153
702	27:26	1:1
*703	37:19	177:247
705	141:5	29:154
706	2:353	93:7
*707	7:101	19:5
708	12:59	51:23
710	10:71	8:3
*711	9:79	3:1
712	89:8	3:10
713	31:23	292:339
714	42:17	7:11
*715	143:5	23:123
716	4:179	2095105:313191
717	3:239	1080:121
718	2:359	1494439626: 111543983
*719	1:719	635201:23689
720	9:80	3:1
721	7:103	36481088: 9510387
722	361:2	177:2378
*723	3:241	9:1

A	ϱ : ϱ'	θ : θ'
724	181:4	{82596761: 555612885}
725	29:25	13:14
726	3:242	9:1
*727	1:727	27:1
*731	731:1	1:27
732	244:3	1:9
734	2:367	1612:119
*735	245:3	1:9
737	67:11	1374:3391
738	82:9	1:3
*739	739:1	{11516632737: 313074529583}
740	185:4	5:34
741	247:3	122:1107
742	106:7	1114:4335
*743	1:743	845:31
745	149:5	207:1130
*747	83:9	1:3
748	4:187	841:123
749	107:7	71192:278339
750	6:125	461:101
*751	1:751	{2700614460969: 98546821297}
752	16:47	12:7
753	3:251	226762:24791
755	5:151	11:2
756	28:27	1:1
758	379:2	739:10173
759	69:11	2:5

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
762	127:6	5:23
763	109:7	1817:7170
764	4:191	4497000: 650783
765	85:9	41:126
766	2:383	6040149252: 436478927
*767	13:59	49:23
770	14:55	2:1
*771	771:1	1969:54673
772	193:4	126985:882066
774	43:18	11:17
775	25:31	304:273
777	7:111	4:1
*779	779:1	123:3433
780	4:195	7:1
781	71:11	690:1753
782	2:391	14:1
*783	29:27	1:1
786	393:2	1:14
*787	787:1	6633:186079
788	197:4	1:7
789	3:263	1638936: 175043
790	10:79	18188:6471
791	113:7	1:4
793	13:61	13:6
*795	3:265	47:5
796	4:199	8133098260: 1153080099
798	57:14	1:2

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
*799	17:47	5:3
801	9:89	166667:53000
802	2:401	8595:607
*803	803:1	3:85
804	268:3	31:293
805	161:5	2169:12308
806	62:13	223:487
*807	269:3	439:4157
810	10:81	37:13
*811	811:1	41281449:1175615653
812	29:28	1:1
813	271:3	2:19
814	11:74	437295:168599
*815	5:163	177:31
817	43:19	2:3
*819	63:13	5:11
820	5:164	63:11
822	411:2	3:43
*823	1:823	15335268987:534553873
824	8:103	61:17
825	75:11	18:47
826	7:118	125993:30687
*827	827:1	33:949
828	36:23	4:5
830	166:5	21:121
831	277:3	133:1278
833	49:17	311:528

A	ϱ:ϱ'	ϑ:ϑ'
834	417:2	2803:40474
*835	167:5	14339:82869
836	44:19	23:35
837	31:27	14:15
838	419:2	7089:102607
*839	1:839	29:1
*843	843:1	1:29
844	4:211	{139177186825: 19162705353}
846	18:47	244:151
847	121:7	184:765
849	283:3	{1628834: 15820107}
850	25:34	7:6
*851	23:37	605:477
852	12:71	90:37
854	14:61	215:103
855	9:95	13:4
858	22:39	4:3
*859	859:1	{48957047673: 1434867510253}
860	4:215	22:3
861	21:41	3591:2570
862	2:431	{9460742124: 644468311}
*863	1:863	136103:4633
866	2:433	103:7
*867	867:1	9:265

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
868	28:31	262:249
869	11:79	{1654096: 617225}
870	30:29	1:1
*871	13:67	38673:17035
873	97:9	569:1868
874	23:38	9:7
*875	7:125	131:31
876	4:219	37:5
878	2:439	1526:103
*879	293:3	605:5979
882	9:98	33:10
*883	883:1	{6284900361: 186757799729}
884	17:52	7:4
885	15:59	2:1
886	443:2	{93487270491: 1391359460479}
*887	1:887	685:23
889	127:7	{228241952: 972183651}
890	10:89	3:1
*891	11:81	19:7
892	4:223	112:15
893	47:19	8050:12661
894	6:149	5:1
895	5:179	6:1
897	3:299	10:1

A	ρ:ρ'	θ:θ'
898	2:449	15:1
*899	31:29	1:1
902	451:2	1:15
903	301:3	1:10
905	181:5	1:6
906	151:6	1:5
*907	907:1	369485787: 11127596791
908	4:227	113:15
909	9:101	67:20
910	91:10	1:3
*911	1:911	19282961: 638873
913	11:83	4841742: 1762621
915	61:15	1:2
916	229:4	113:855
917	7:131	7670:1773
918	459:2	67:1015
*919	1:919	669447758300 61: 2208304390649
921	307:3	2026718: 20502267
*923	71:13	3:7
924	4:231	38:5
926	2:463	8725828: 573497
*927	9:103	159:47
930	31:30	1:1

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
931	49:19	8257:13260
932	233:4	1517:11578
933	3:311	112:11
934	467:2	57:871
*935	17:55	9:5
936	9:104	17:5
938	134:7	8:35
939	313:3	14:143
940	4:235	23:3
942	3:314	133:13
943	41:23	3:4
945	189:5	27:166
946	473:2	218649:3362506
*947	947:1	3777:116231
948	316:3	19:195
950	19:50	73:45
*951	317:3	841:8645
952	8:119	27:7
954	106:9	389:1335
955	5:191	14475:2342
956	4:239	3097560:400729
957	33:29	15:16
958	2:479	64735080:4182991
*959	1:959	31:1
*963	963:1	1:31

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
964	241:4	{4574225: 35505534}
966	46:21	25:37
*967	1:967	{2156277477: 69341209}
968	121:8	9:35
969	19:57	598:365
*971	971:1	113369:3532677
972	4:243	35113:4505
973	7:139	254:57
974	2:487	{11054702: 708431}
975	25:39	5:4
978	489:2	11:172
979	89:11	45:128
980	49:20	23:36
981	109:9	{851525: 2963394}
982	491:2	3:47
*983	1:983	533:17
987	21:47	3:2
988	4:247	42646:5427
989	23:43	{3458674: 2529527}
990	9:110	7:2
*991	1:991	{616049024759241: 19569442212887}
992	32:31	1:1
993	331:3	2:21

A	$\varrho:\varrho'$	$\vartheta:\vartheta'$
994	142:7	2:9
995	5:199	940:149
996	12:83	597:227
998	499:2	993:15685
999	37:27	1178:1379
1001	77:13	83:202
1002	6:167	4152:787
*1003	1003:1	3:95

XX.

Verzeichnung der geometrischen Projectionen der Oberflächen der zweiten Ordnung, vermittelst Anwendung der Theorie der Umhüllungscurven.

Von
Herrn C. T. Meyer,
Bergwerkscandidaten zu Freiberg.

Obgleich ich in der im 1sten Hefte des 9ten Bandes dieses Journals befindlichen Abhandlung über die Anwendung der Theorie der Umhüllungscurven auf die Schattenconstructionen erwähnte, dass die Beschreibung der Anwendung auf die geometrischen Constructionen besser in einem besondern Werke über Axonometrie erfolgen würde, so hat sich doch gezeigt, dass ein solches Werk enger in seinen Grenzen gehalten werden muss, als dass die Verzeichnungen mit Auf- und Grundriss darin Platz finden könnten. Wenn nun auch die Zeichnungsmethode durch Umhüllungscurve namentlich vereinfachend auf die axonometrischen Darstellungen der Oberflächen 2ter Ordnung einwirkt, welche ausserdem nur sehr mühsam durch einzelne Schnitte oder mehrfaches Umzeichnen verschiedener Projectionen hergestellt werden könnten, so ist der Nutzen für die Darstellungen mit Auf- und Grundriss doch gewiss auch nicht zu vernachlässigen, und ich gebe daher (zumal da sich die Herausgabe obengenannten Werkes durch verschiedene eingetretene Hindernisse noch einige Zeit verzögern dürfte) in folgender Abhandlung eine Anweisung über:

Die Anwendung der Theorie der Umhüllungscurven auf die geometrische Verzeichnung der Oberflächen 2ter Ordnung.

Ich beschäftige mich hier blos mit den Körpern oder Oberflächen der 2ten Ordnung, obgleich, wie schon aus dem früheren Aufsatze hervorgeht, auch für Körper und namentlich für Rotations-

körper anderer Ordnungen Anwendung gemacht werden kann; aber erstens würde ich blos noch einzelne Fälle anführen können, da das Wesentliche als theils schon bekannt und theils als aus dem Folgenden ersichtlich betrachtet werden kann; und zweitens würden diese gewiss wenig praktischen Nutzen gewähren, da sowohl dergleichen Körper selten vorkommen, als auch am Ende die Vereinfachung nicht sehr bedeutend sein wird.

Zu den Oberflächen der 2ten Ordnung gehören die elliptischen (der Kreis als zur Gattung der Ellipsen gehörend betrachtet) Kegel und Cylinder, die Ellipsoide, Hyperboloide beider Art, die elliptischen und hyperbolischen Paraboloide. Die elliptischen Kegel und Cylinder übergehe ich wegen ihrer schon jetzt sehr einfachen Darstellung, so dass ich mich im Folgenden blos mit den zuletzt genannten Oberflächen zu beschäftigen habe.

Ich gehe hier nicht, wie in dem früheren Aufsatze, wo es mir mehr nur auf die Begründung des Princips, gleichsam wie auf die Grundsteinlegung, ankam, von einfachern Fällen aus, sondern nehme gleich die schwierigsten an. Was die Formelableitung, den Beweis des Verfahrens betrifft, welches ich einschlage, so werde ich mich, um Wiederholungen aus dem frühern Aufsatze möglichst zu vermeiden, blos auf Weniges beschränken, und zwar will ich dieses der Deutlichkeit halber nicht mit der Beschreibung der Zeichnung vermengen, sondern hinterher besonders anführen; namentlich ist diess beim hyperbolischen Paraboloid nöthig, über welches früher noch gar nichts gesagt wurde.

Noch habe ich endlich zu erwähnen, ehe ich zu den Aufgaben selbst übergehe, dass ich die einzelnen geometrischen Verfahren (wie das Verzeichnen der Projection einer geneigten Ellipse oder Parabel etc.) nicht überall besonders beschrieben habe, so weit es nicht das Verständniss unbedingt erfordert; doch sind sie in den Figuren überall ausgeführt, wo man sie leicht wird verfolgen können. Uebrigens sind die Buchstaben im Aufrisse zur leichtern Unterscheidung der des Grundrisses immer mit einem Index unten versehen.

Aufgabe 1.

Verzeichnung eines Ellipsoids, dessen Durchschnitt durch die Mitte der Hauptaxe (natürlich rechtwinklig zu derselben) in Taf. IV. Fig. 1. durch die Ellipse *CDEF* (im Grundriss) und die Hauptaxe selbst durch A_1B_1 (im Aufriss) gegeben ist; die Stellung des Ellipsoids gegen die Aufrissebene ist sogleich in der Stellung der Ellipse *CDEF* bestimmt; der Neigungswinkel, unter dem die Projection erfolgen soll, sei $=RAN$, die Richtung der Neigung $=AR$. Um den Stand des Ellipsoids gegen die Basisebene zu bestimmen, muss noch ein Drehungspunkt oder eine Drehungsaxe gegeben sein; wir nehmen der Einfachheit halber den Punkt A_1 als solchen an; ist ein anderer Punkt gegeben, so erschwert diess die Aufgabe gar nicht, wie wir aus den folgenden Beispielen sehen werden; ist jedoch die Aufgabe so gestellt, dass ein gewisser (der unterste) Punkt des Ellipsoids auftreffen soll, so muss dieser

erst nach der obigen Angabe durch Zeichnung oder Rechnung gefunden werden, was aber nicht weiter hierher gehört.

Auflösung. Man verzeichne sich, um zuerst die Darstellung im Grundriss zu erhalten, die Axe in ihrer geneigten Stellung als ab (durch das Profil AB_2) und hierauf den durch den Mittelpunkt rechtwinklig zur Axe gelegten Schnitt $CDEF$ durch die zusammengehörigen Durchmesser GH und JK als $ghik$ (insofern nämlich zusammengehörige Durchmesser in jeder Projection der Ellipse wieder zusammengehörige Durchmesser geben). Die Punkte i, k, g und h erhält man, wie man leicht aus der Figur sieht, ebenfalls vermittelst des Profils, indem man sich JK als J_2K_2 und HG als H_2G_2 verzeichnet, (insofern man $AH' = O_2H_2$, $AK = O_2K_2$ etc. macht). Sodann errichte man im Mittelpunkte o ein Perpendikel auf ik als demjenigen Durchmesser der Ellipse, der in der Richtung der Axe ab liegt, wozu man sogleich O_2o benutzen kann, gebe ihm die Grösse $oi = ok$ als op und trage die Grösse der Hypotenuse bp auf die verlängerte ab als oq nach beiden Seiten von o aus auf. Beschreibt man nun aus gh, als dem zu ik zugehörigen Durchmesser, und qq als zusammengehörige Durchmesser die Ellipse, so ist die geometrische Darstellung im Grundriss fertig. Es ist offenbar, dass man die Ellipse $ghik$ nicht erst aus den gefundenen Durchmessern gh und ik zu verzeichnen braucht, um die Conturen des projicirten Körpers in der Ellipse $ghqq$ herzustellen; doch wird man es immer schon des Bildes wegen thun.

Um den Aufriss zu verzeichnen, trage man vorerst die projicirte Hauptaxe ab, sowie die Durchmesser gh und ik als a_1b_1, g_1h_1 und i_1k_1 in Aufriss und verzeichne sich um g_1h_1 und i_1k_1 als zusammengehörige Durchmesser die Ellipse $g_1h_1i_1k_1$, welche die Projection von $ghik$ im Grundriss ist. Man verfährt nun ganz ähnlich wie vorher, nur mit dem Unterschiede, dass man, da hier der zu s_1t_1, als dem auf der verlängerten Axe a_1b_1 gelegenen Durchmesser, zugehörige Durchmesser u_1v_1 nicht gegeben ist, solchen erst verzeichnen muss, was sehr einfach durch Halbirung einer (oder sicherer mehrerer) Parallellinie mit s_1t_1 in der Ellipse geschieht. Man trägt die Grösse s_1o_1 rechtwinklig zu a_1b_1 als a_1m_1 auf und macht dann o_1w_1 gleich der Hypotenuse b_1m_1, worauf man aus w_1w_1 und u_1v_1 die gesuchte Ellipse zeichnet.

Will man sich nun im Grund- und Aufriss noch die Axen cd, ef und c_1d_1, e_1f_1 angeben, so ist diess sehr leicht, aber ohne wesentlichen Nutzen, da die deutliche Vorstellung namentlich durch die Ellipsen $ghik$ und $g_1h_1i_1k_1$ bewirkt wird.

Eine etwas verschiedene Construction namentlich hinsichtlich des Aufrisses muss man anwenden, wenn die Ellipsen $ghik$ und $g_1h_1i_1k_1$ gar nicht verzeichnet werden sollen, wodurch aber, wie bereits erwähnt, die Deutlichkeit des Bildes viel verliert; auch ist die Ersparniss im Zeichnen sehr gering, namentlich da, wenn man wenigstens die Axen CD, EF angeben will, auch deren Findung wieder etwas mehr Construction verursacht. Ich führe diese Construction blos an, um zu zeigen, dass man, wenn es

darauf ankommt, zur geometrischen Darstellung eines Ellipsoids nicht eine einzige krumme Linie als Hülfslinie bedarf.

Die Verzeichnung der äussern Conturen im Grundriss ist ganz wie früher, nur dass man die Ellipse nicht aus ik und gh verzeichnet, sondern, will man die Axen CD, EF in der Projection angeben, solche erst auf ähnliche Weise wie die Durchmesser gh und ik finden muss (was jedoch in der Figur auf Taf. IV. Fig. 2. nicht ausgeführt ist, da sonst zu viel Linien zusammenkommen würden). Um nun aber den Aufriss darzustellen, verfährt man folgendermassen: Man ziehe im Grundriss die Verbindungslinie ih und verzeichne diese als $i_1 h_1$ in den Aufriss, deren Durchschnittspunkt m_1 mit der projicirten Axe $a_1 b_1$ man wieder als m in den Grundriss trägt; zieht man nun mo, so ist offenbar, dass die Projection dieser Linie im Aufriss auf $a_1 b_1$ fällt. Fast noch einfacher kann man die Richtung von om durch die Tracen bestimmen, indem man den Durchschnitt einer rechtwinklig zum Aufriss durch $a_1 b_1$ gelegten Ebene mit der Ellipsenebene $ghik$ sucht. Den Punkt m trägt man in die gegebene Ellipse $CDEF$ als M (indem M in JH liegen muss) und zieht ST und den zugehörigen Durchmesser UV, worauf man beide Durchmesser wieder in die Grundrissprojection überträgt, wobei sich ts sehr leicht durch die Parallelen Tt und Ss mit AR ergiebt, uv aber wie gewöhnlich (d. i. wie gh, ik etc.) durch das Profil gefunden werden muss (in der Figur fällt hierbei D_2 auf K_2 und U_2 auf J_2, da der Fusspunkt eines Perpendikels von V oder U nur unmerklich von K oder J differiren wird). st und uv verzeichnet man nun in den Aufriss als $s_1 t_1$ und $u_1 v_1$, wo sodann die weitere Lösung mit der frühern zusammenfällt.

Der Beweis zu dieser Zeichnungsmethode geht sogleich aus der letzten Aufgabe des vorigen Aufsatzes hervor, wo wir die Gleichung der umhüllenden Curve

$$\frac{x^2}{a^2+n^2l^2}+\frac{y^2}{l^2}=1$$

fanden, wenn Ellipsen ähnlich $ikgh$ (oder im Aufriss $i_1 k_1 g_1 h_1$) auf ab nach dem Gesetze der Veränderung der schiefwinkligen Ordinaten og oder oh in einer Ellipse, die man sich um ab und gh als zusammengehörige Durchmesser beschrieben denken kann, fortschreiten, und wenn a die halbe Axe $oa=ob$, l den halben Durchmesser $og=oh$ und nl den auf ab fallenden halben Durchmesser $oi=ok$ der Ellipse $ghik$ bezeichnet. Dass hier aber in der Projection eine Ellipse als Contur gesucht wird, die alle parallel mit $ghik$ durch die Axe ab geführten Schnitte einschliesst, und sich diese nach einer Ellipse um $abgh$ ändern werden (oder um irgend eine Ellipse, die man aus einem Durchmesser der Ellipse $ikgh$ und ab zieht, was ganz auf dasselbe hinauskommt) bedarf weiter keines Beweises.

Aufgabe 2.

Darstellung eines um den Punkt P (Taf. V. Fig. 3.) unter einem Winkel $=RPN$ in der Richtung PR geneigten Hyperboloids mit einem Mantel, wenn die Grund-

fläche und ihre Stellung zur Aufrissebene durch die Ellipse *CDEF*, die Höhe durch A_1B_1 und die Projection des Halbkreises für eine gleiche Stellung wie *CDEF* durch L_1M_1 gegeben ist.

Ferner wird noch die Grösse der imaginären Axe (welche für alle Hyperbelschnitte durch die Axe dieselbe bleibt und daher zugleich eine constante Axe des Körpers bildet) als durch $2\,O_1Q_1$ gegeben vorausgesetzt.*)

Auflösung. Es ist offenbar durch den Punkt *P* nichts als die Drehungsaxe *Pp* gegeben, wenn man *Pp* rechtwinklig zu *PR* zieht, und man kann daher eben so gut sagen, es soll das Hyperboloid um den Punkt *p* der mit *PR* parallel durch *A* gezogenen Linie *AR'* geneigt werden, von wo aus man sich am passendsten das Profil verzeichnen wird, durch welches man die Axe in *ab* und die Ellipsenprojection von *CDEF* ganz wie oben in *ghik* erhält; um *b* wird als obere Ellipsenprojection eine mit *ghik* identische (d. i. gleich grosse und gleich gelegene) Ellipse gezogen. Es ist nun die die seitliche Contur gebende Hyperbel als Verbindungslinie dieser 2 Ellipsen zu bestimmen. Hierzu ist es erforderlich, sowohl die Projection der imaginären Axe Q_1Q_1, welche man leicht in *qq* erhält, als auch die nach dem Halskreis verjüngten Grössen von *gh* und *ik* zu kennen. Die Verjüngung ist, wie man leicht einsieht, durch die Linien O_1M_1 und $A_1\Delta_1$ gegeben, und es wird sonach, trägt man auf eine beliebige Linie $a\delta = A_1\Delta_1$ und $a\mu = O_1M_1$, verbindet δg und δk und zieht die Parallelen $\mu\eta$ und $\mu\varepsilon : o\gamma = o\chi = a\eta$ die eine und $o\iota = o\varkappa = a\varepsilon$ die andere gesuchte Axe im Halskreis. Es giebt nun für diese Werthe die Theorie der Umhüllungscurven den Ausspruch: Die beiden zusammengehörigen Durchmesser der gesuchten Hyperbel erhält man in $\gamma\chi$ und einer Linie von *o* aus nach beiden Seiten auf *ab* aufgetragen, deren Grösse durch $\sqrt{oq^2 - o\iota^2}$ (also durch die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem die Hypotenuse $= oq$, die andere Kathete $= o\iota$ ist) gegeben ist. Ist aber, wie hier, $o\iota > oq$, so decken die Ellipsen die Hyperbel und es wird solche gar nicht sichtbar. Zeichnet man das Hyperboloid als Oberfläche, so ergiebt sich noch eine Ellipse oder 2 Ellipsenbogen in dem Theile, wo sich beide Endellipsen überschneiden.

---

*) Anmerkung. Man kann sie leicht aus den frühern Annahmen finden, ihre specielle Angabe aber gehört jedenfalls zur Vollständigkeit der Aufgabe. Sollte sie nicht gegeben sein (wie es bei Aufnahmen zuweilen vorkommen kann) und man will sie auch nicht erst (s. Anhang zu Schreiber's darstellender Geometrie) finden, so zeigt die folgende Aufgabe ein Verfahren, wie man sich in der Ausführung der Zeichnung selbst helfen kann. Für den Fall, dass die imaginäre Axe, aber nicht der Halskreis und dadurch die nach den verschiedenen Verticalschnitten variirenden reellen Axen gegeben sind, findet überall das umgekehrte Verhältniss statt, welches leicht zu abstrahiren ist; ich sehe daher gänzlich davon ab, zumal es selten vorkommen wird, auch eigentlich dieser Abhandlung etwas entfernt liegt.

Man suche die Grösse von $\sqrt{o\iota^2 - oq^2}$, indem man $ox = o\iota$ macht, und trage ox von o aus nach beiden Seiten auf ab als $o\xi$ auf, worauf man um $\gamma\chi$ und $2o\xi$ als zusammengehörige Durchmesser eine Ellipse beschreibt, die von den Scheitelpunkten γ und χ so weit hereingeht, bis eine Berührung mit den Endellipsenprojectionen stattfindet. Für den Fall $o\iota = oq$ ist die Zeichnung durch die der beiden Endellipsen sogleich beendet. In cd und ef erhält man die Projection der Ellipsenaxen CD und EF.

Für die Verzeichnung im Aufriss erhält man aus dem Grundriss durch Uebertragung leicht die Ellipse $g_1h_1i_1k_1$, die Körperaxenprojection a_1b_1 und die sich als q_1q_1 darstellende imaginäre Axe, worauf man um b_1 eine der $g_1h_1i_1k_1$ identische Ellipse zeichnet. Hierauf ziehe man in $g_1k_1i_1k_1$ den zu s_1t_1 gehörigen Durchmesser u_1v_1 und suche die Grössen der gleichliegenden Durchmesser im Halskreise, indem man $a_1\delta_1 = A\Delta$, und $a_1\mu_1 = O_1M_1$ macht und Parallelen $\mu_1\eta_1$ und $\mu_1\varepsilon_1$ mit δ_1s_1 und δ_1u_1 zieht, wo dann $a_1\eta_1$ und $a_1\varepsilon_1$ die gesuchten Grössen sind, welche man als $o_1\varphi_1 = o_1\psi_1$ und $o_1\sigma_1 = o_1\tau_1$ an die ihnen zukommenden Plätze trägt. Construirt man nun aus $o_1\sigma_1$ und $o_1q_1 = \sigma_1\varrho_1$ ein rechtwinkliges Dreieck, so giebt $o_1\varrho_1$ die Grösse, welche man von o_1 aus auf o_1b_1 und auf o_1a_1 als $o_1\alpha_1$ auftragen muss, um den zu $\varphi_1\psi_1$ zugehörigen Durchmesser der zu verzeichnenden Hyperbel zu finden. Aus den zusammengehörigen Durchmessern $\psi_1\varphi_1$ und $\alpha_1\alpha_1$ zeichnet man die Hyperbel am leichtesten dadurch, dass man um dieses Kreuz ein Parallelogramm construirt und durch dessen Eckpunkte die Asymptoten zieht, aus denen man von ψ_1 und φ_1 aus ohne Schwierigkeit die Hyperbel verzeichnet.

Wir haben es hier, hinsichtlich der Ableitung der Gleichung für die neue Hyperbel, mit Ellipsen ähnlich $ghik$ (im Aufriss $g_1h_1i_1k_1$; doch was vom Grundriss gilt, gilt natürlich auch vom Aufriss, daher hierauf weiter keine Rücksicht genommen werden wird) zu thun, die auf ab nach einer Hyperbel fortschreiten, welche man sich aus den zusammengehörigen Axen qq und $\gamma\chi$ verzeichnet denken kann (da, wie bereits erwähnt, zusammengehörige Durchmesser eines Kegelschnittes auch in der Projection zusammengehörig bleiben). Nennt man nun, wie früher, die neuen Coordinaten der Umhüllungscurve x und y (wo aber augenscheinlich x die Ordinaten, y die Abscissen werden), die variable Entfernung der Ellipse vom Punkte o aus α, die ähnlich ag und ai gelegenen halben Durchmesser der Ellipsen l und nl und die Axen $o\gamma = o\chi = a$ und $oq = b$, so wird

$$\frac{y^2}{l^2} + \frac{(\alpha - x)^2}{n^2 l^2} = 1$$

und

$$l = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + \alpha^2}$$

(da für zusammengehörige Durchmesser der Kegelschnitte dieselben Gleichungen als für die Hauptaxen gelten)

$$\text{d. i.} \quad n^2 y^2 + (\alpha - x)^2 = n^2 \frac{a^2}{b^2} (b^2 + \alpha^2),$$

woraus für die Umhüllungscurve die Gleichung:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2 - n^2 a^2} = 1$$

resultirt, d. i. die einer Hyperbel, deren zusammengehörige Axen a und $\sqrt{b^2 - n^2 a^2}$ sind, so dass also $o\gamma = o\chi$ bleibt, während oq in $\sqrt{\overline{oq}^2 - \overline{o\iota}^2}$ übergeht (da offenbar na der auf ab fallende halbe Durchmesser des Halbkreises ist). Ist $na >$ oder auch nur $= b$, d. i. $o\iota >$ oder $= oq$, so zeigt schon die Formel, dass keine Begrenzungs-Hyperbel entsteht.

Die Formel giebt für den Fall $na > b$ eine Ellipse

$$= \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{n^2 a^2 - b^2},$$

und wirklich entsteht eine solche im Innern durch die Schnitte oder Tangenten der von o aus fortschreitenden Ellipsen, bis

$$l = \frac{a^2 n}{\sqrt{a^2 n - b^2}}$$

wird, wo dann die nächsten immer die vorhergehenden einschliessen. Wenn man also vielleicht die obere und untere Fläche eines solchen Modells aus Glas herstellt, oder nur eine hyperbolische Oberfläche betrachtet, so wird man in der Mitte einen elliptischen freien Raum von der Form

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{n^2 a^2 - b^2}$$

sehen, während der übrige Inhalt dieser Endellipsen durch den Mantel verdunkelt sein wird.

(Es ist diess im vorigen Aufsatze bloss flüchtig angedeutet; dagegen sieht man hieraus leicht ein, wie der Schatten eines schiefgestellten hohlen Hyperboloids mit einer freien Ellipse in der Mitte vorkommen und verzeichnet werden kann).

Für den Fall, dass

$$l < \frac{a^2 u}{\sqrt{a^2 n - b^2}}$$

sein sollte, sieht man nur einen Theil dieser innern Ellipse vom Scheitel hereingehen, bis eine Tangirung mit den Endellipsen eintritt; es findet dieses Verhältniss in der Figur statt.



Ist $na=b$, so geht die Gleichung in $y=a$ über, d. h. alle Ellipsen werden durch die Punkte γ und χ gehen; man sieht dann bei einer hyperbolischen Oberfläche den Raum in der Mitte frei, in welchem die beiden Endellipsen sich decken.

Aufgabe 3.

Es ist ein Hyperboloid mit zwei Mänteln (oder getrennten Höhlungen) durch die Höhe A_1B_1 (Taf. V. Fig. 4.), die Grundfläche $CDEF$ in ihrer Stellung zur Aufrissebene und die Axe zwischen den Anfangspunkten beider Mäntel $=M_1M_1$ gegeben; es soll dasselbe in einer um den Punkt P nach der Richtung PR und unter einem Winkel $=RPN$ geneigten Stellung verzeichnet werden.

Auflösung. Wir gehen natürlich auch hier von der Verzeichnung im Grundriss aus, indem wir Pp rechtwinklig zu PR ziehen, bis es eine Parallele Ab in p trifft, und von p aus das Profil $A_2B_2J_2K_2$ etc. verzeichnen, woraus man leicht die Projectionen der Axe in ab, der Scheitelpunkte in m, m und der Ellipse in $ghik$ erhält; um b beschreibt man eine der $ghik$ identische Ellipse $g'h'$. Um sich nun aus der Axe mm einer durch die Punkte g, h, g', h' so gehend gedachten Hyperbel, dass gh $(=g'h')$ die zur Abscissenaxe mm oder ab zugehörige Ordinatenrichtung angiebt, die imaginäre Axe zu bestimmen, wende man ein Verfahren an, welches dem von Schreiber im Anhang seiner descriptiven Geometrie angegebenen sehr ähnlich ist, insofern nur wenige Modificationen dadurch eintreten, dass dort rechtwinklige Axen, hier zusammengehörige Durchmesser angenommen sind. Man ziehe hh', schlage darüber einen Halbkreis und ziehe im Abstand $\delta\delta=om$ eine Parallele mit hh', welche den Kreis in dem Punkte ν schneidet, von dem aus man das Perpendikel $\nu\alpha$ auf hh' fällt, die dasselbe in α trifft, durch welchen Punkt man nun die Linie αo zieht, welche die Asymptote der Hyperbel $ghog'h'$ giebt. Aus der Asymptote erhält man leicht in $\gamma\chi=2m\lambda$ die zu mm zugehörige imaginäre Axe. Denkt man sich um die so gefundene imaginäre Axe $\gamma\chi$ eine Ellipse ähnlich $ghik$ beschrieben, so wird der zugehörige Durchmesser $=\iota k$ (man erhält ihn in $\iota'b$ durch die Parallelen $g'i'$ und $\gamma'\iota'$), und nun ist das Verfahren ganz ähnlich wie in voriger Aufgabe; es bleibt nämlich die Axe $\gamma\chi$ unverändert, während die halbe reelle Axe oq der gesuchten Hyperbel in der Kathete ol eines rechtwinkligen Dreiecks $o\iota l$, dessen Hypotenuse $\iota l=om$ und andere Kathete $ol=o\iota$ ist, gefunden wird. Um $\gamma\chi$ und qq schlägt man hierauf ein Parallelogramm und zieht die Asymptoten $\beta o\beta$, $\beta o\beta$, aus denen man von q, q aus die Hyperbel verzeichnet, bis sie sich tangential an die Ellipsen anlegt.

Nachdem man für die Aufrissprojection die Ellipse $ghik$ als $g_1h_1i_1k_1$, die Axe mm als m_1m_1 und die Höhe ab als a_1b_1 verzeichnet und um b_1 eine der $g_1h_1i_1k_1$ ganz gleiche Ellipse beschrieben hat, ziehe man, ganz wie früher, den zu s_1t_1 zugehörigen Durchmesser u_1v_1. Aus dem Grundriss ist nun die Verjün-

gung des imaginären Halskreises $=\frac{bg'}{b\gamma}$ bekannt, man wird also die den Durchmessern $s_1 t_1$ und $u_1 v_1$ entsprechenden imaginären Axen der Hyperbelschnitte durch $s_1 t_1$ und $u_1 v_1$ in $\sigma_1 \tau_1$ und $\varphi_1 \psi_1$ erhalten, wenn man $a_1 \delta_1 = bg'$ und $a_1 \mu_1 = b\gamma'$ auf eine beliebige Linie aufträgt und durch die Parallelen $\mu_1 \eta_1$ und $\mu_1 \varepsilon_1$ mit $\delta_1 u_1$ und $\delta_1 s_1$ die dem Halskreis entsprechenden Grössen $a_1 \eta_1$ und $a_1 \varepsilon_1$ für $o_1 \varphi_1 = o_1 \psi_1$ und $o_1 \tau_1 = o_1 \sigma_1$ abschneidet. Aus $o_1 \tau_1$ und $o_1 m_1$ als Hypotenuse stellt man nun ein rechtwinkliges Dreieck zusammen und erhält in der 3ten Seite $o_1 \varrho_1$ die Grösse, welche man als $o_1 r_1$ von o_1 aus nach beiden Seiten aufträgt, um die Anfangspunkte der gesuchten Hyperbel zu erhalten, welche man selbst aus den Asymptoten $\beta_1 \beta_1$, $\beta_1 \beta_1$ verzeichnet, die man durch die Ecken eines Parallelogramms um $\varphi_1 \psi_1$ und $r_1 r_1$ zieht.

Die Projectionen der Axen CD und EF ergeben sich einfach in cd, ef und $c_1 d_1$, $e_1 f_1$.

Es ist die Ableitung und auch die Gleichung der die Projection des Hyperboloids mit 2 Mänteln gebenden Umhüllungscurve ziemlich ähnlich der für das Hyperboloid mit einem Mantel, auch schon im vorigen Aufsatze oberflächlich erwähnt. Es schreiten hier offenbar Ellipsen wie $ghik$ nach einer Hyperbel wie $ghog'h'$ als Projection eines Durchschnittes durch die Axe AB nach der Linie GH auf ab fort; bezeichnet man daher den halben Durchmesser om durch a, $o\gamma = o\chi$ durch b, nennt x die Abscissen, y die Ordinaten der neuen Hyperbel nnd lässt die Bedeutungen von l, nl und α wie früher, so wird:

$$\frac{y^2}{l^2} + \frac{(\alpha-x)^2}{n^2 l^2} = 1$$

und

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{l^2}{b^2} = 1,$$

also

$$n^2 y^2 + (\alpha - x)^2 = n^2 \frac{b^2}{a^2} (\alpha^2 - a^2),$$

woraus durch Differentiation nach α und nachherige Substitution die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 - n^2 b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

folgt, so dass also die Axe $2b$, d. i. $\gamma\chi$, unverändert bleibt, während mm in

$$2\sqrt{a^2 - n^2 b^2} = 2\sqrt{\overline{om}^2 - \overline{oi}^2} = qq$$

übergeht, da offenbar $nb = \overline{oi}$ ist. Ist $nb =$ oder $> a$, so fällt

der erste Ausdruck $\frac{x^2}{a^2-n^2b^2}$ ganz weg oder geht im zweiten Falle in $-\frac{x^2}{n^2b^2-a^2}$ über, so dass man entweder die Formel $-\frac{y^2}{b^2}=1$, d. i. $y^2=-b^2$ oder

$$\frac{x^2}{n^2b^2-a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

erhält, — zwei Ausdrücke, welche nur zu imaginären Abhängigkeiten zwischen x und y führen. In einem solchen Falle ist also keine Curve ausser den beiden Endellipsen sichtbar, da sich die Schnittellipsen jedes der beiden Mäntel immer umschliessen und so gar keine Umhüllungscurve geben können (ähnlich wie bei einer Kegelprojection, wo die Scheitelprojection in die projicirte Basis fällt).

Aufgabe 4.

Es ist ein elliptisches Paraboloid von der Höhe $=A_1B_1$ (Taf. VII. Fig. 5.) und der Bodenfläche $=$Ellipse $CDEF$, welche sogleich in der gegebenen Stellung gegen die Aufrissebene verzeichnet ist, darzustellen, wenn die Richtung der Neigung $=PR$, der Neigungswinkel $=RPN$ ist und der Drehungspunkt in P angenommen wird.

Auflösung. Auch hier kann man sich wie in den vorhergehenden Aufgaben statt um P die Drehung um p vorgenommen denken, von wo aus man sich das Profil $A_2B_2I_2K_2$ angiebt und die Axe ab und die Ellipsenprojection $ghik$ verzeichnet, und es kommt nun darauf an, die Parabel anzugeben, in welcher sich das Paraboloid im Grundriss projicirt. Man ziehe rechtwinklig auf gh durch den Mittelpunkt a der Ellipse die Linie lm, mache $al=ab$ und ziehe gm rechtwinklig auf lg; hierauf messe man mit einem Maasstabe von beliebiger Einheit (den man sich ohne jede Schwierigkeit sogleich angeben kann) ai und hg und dividire mit hg in ai, welchen Bruch man zu quadriren hat, um die Zahl zu erhalten, welche angiebt, den wievielsten Theil (in der Figur den 20sten) man von am nehmen und von b aus auf die verlängerte ab als bo auftragen muss. Vom Punkte o aus kann man nun mit den zusammengehörigen Coordinatenrichtungen ou und gh und einem Parameter $=am$ die gesuchte Parabel, die sich natürlich tangential an die Ellipse anschliessen muss, verzeichnen; wie diess sehr leicht geschieht, werde ich noch am Schlusse anhangsweise angeben.

Die Zeichnung für den Aufriss ist ganz ähnlich. Man trage zuerst die Axe ab als a_1b_1 und die Ellipse $ghik$ als $g_1h_1i_1k_1$ in Aufriss, ziehe den zu s_1t_1 zugehörigen Durchmesser u_1v_1 und nun rechtwinklig dagegen die l_1m_1, mache $a_1l_1=a_1b_1$ und ziehe rechtwinklig zu l_1v_1 die v_1m_1. Hierauf messe man a_1s_1 und u_1v_1, berechne sich $\frac{\overline{a_1s_1}^2}{\overline{u_1v_1}^2}$ und nehme einen durch diesen Bruchtheil (in

der Figur $= \frac{1}{25}$) bestimmten Theil von $a_1 m_1$ und trage diesen als bw_1 auf die verlängerte $a_1 b_1$ auf. Verzeichnet man sich nun noch die Parabel von w_1 aus mit dem Parameter $= a_1 m_1$ und den zusammengehörigen Coordinatenrichtungen $w_1 a_1$ und $u_1 v_1$, so ist auch diese Darstellung beendet.

Die Axen CD und EF, wenn man diese noch anzugeben beabsichtigt, ergeben sich wie bei den frühern Aufgaben einfach in cd, ef und $c_1 d_1$ und $e_1 f_1$.

Wohl mag es sein, dass dieser Construction von Vielen der Vorwurf gemacht wird, dass Rechnung dabei nöthig wird und man nicht mit reiner Linienzeichnung auskommt, doch glaube ich hierin bei einem Falle, wie der gegenwärtige, eher einen Vortheil als Nachtheil zu erblicken; denn diese einfache Rechnung, welche sogleich auf jedem Orte ausgeführt werden kann, führt sicherlich zu einem genauern Resultate als vieles Construiren, und sollte ja Jemand ein so grosser Feind dieser Vermischung sein, dass er seiner Ansicht lieber Zeit und Genauigkeit opfert, so kann man auch leicht oben angezeigte Rechnung geometrisch ausführen.

Was den Beweis für dieses Verfahren betrifft, so kann ich mich auch hier auf den früheren Aufsatz berufen und daher ziemlich kurz fassen.

Wir haben es hier mit der Umhüllungscurve von Ellipsen ähnlich $ghik$ zu thun, welche auf der Linie ab nach dem verändernden Gesetze einer Parabel fortschreiten, die man sich um ab und gh als zusammengehörige Coordinatenrichtungen von b aus beschrieben denken kann. Nennt man nun ganz analog dem frühern Aufsatze $ag = ah = l$, und sonach $ai = ak = nl$, α den variablen Abstand der Ellipse von b aus, p den Parameter der Parabel bgh für die Coordinatenrichtungen ab und gh, und bezeichnet durch x und y die neuen Coordinaten der Umhüllungscurve von b aus, so hat man

$$\frac{y^2}{l^2} + \frac{(\alpha - x)^2}{n^2 l^2} = 1$$

und

$$\alpha p = l^2,$$

also

$$n^2 y^2 + (\alpha - x)^2 = n^2 p . \alpha,$$

woraus durch Differentiation nach α und Substitution ganz wie früher

$$y^2 = p\left(\frac{n^2 p}{4} + x\right)$$

folgt, d. i. die Gleichung einer Parabel, deren Anfangspunkt um

$\frac{pn^2}{4}$ weiter auf der Abscissenaxe zurückliegt. $\frac{pn^2}{4}$ ist nun aber gleich $\frac{(nl)^2}{4l^2}p$, d. i.

$$=\frac{\overline{ai}^2}{4\overline{ag}^2}p=\frac{\overline{ai}^2}{\overline{hg}^2}.p.$$

Es bleibt nun blos noch zu erwähnen, dass p in der Figur durch am gefunden wurde, worauf wir am Ende, wenn wir Einiges über die Construction der Parabel aus zusammengehörigen Durchmessern anführen, zurückkommen.

Aufgabe 5.

Es ist in Taf. VI. Fig. 6. ein um eine Ecke C in der Richtung CR und unter einem Winkel $= CRN$ geneigtes hyperbolisches Paraboloid zu verzeichnen; die Dimensionen sind in der Basis $CDEHFG$ und in der Höhe in der Mitte $A=A_1B_1$ gegeben. Die Stellung gegen die Aufrissebene ist wie bisher zugleich in der Stellung von $CDEHFG$ enthalten. Obgleich die Aufgabe hierdurch schon bestimmt ist, so haben wir in der Figur doch noch die imaginäre Axe QQ der Hyperbel $CDEHFG$ der Einfachheit wegen als bekannt angenommen, theils weil sie sowohl leicht gefunden werden, als auch ihre Findung auf die in voriger Aufgabe angezeigte Weise umgangen werden kann, theils weil man sie blos zur Construction der Hyperbelprojection braucht, also die Annahme oder Nichtannahme derselben gar keinen Einfluss darauf hat, worauf es hier ankommt.

Auflösung. Auch hier gebe ich vorerst nur das rein constructive Verfahren an; die Erklärung liefert die darauffolgende Ableitung der vorhandenen Umhüllungscurve.

Man ziehe parallel CR die Ab, fälle darauf das Perpendikel Cp und construire sich von p aus das Profil $pl_2A_2B_2$, wodurch man in ab die Horizontalprojection von A_1B_1, in i einen Punkt der projicirten Linie CF erhält, so dass cif deren ganze Projection wird. Durch wenige Parallellinien ergeben sich nun die übrigen gesuchten Punkte und Linien, wie man sogleich aus der Figur sieht, worauf man die Asymptoten $\alpha\alpha$, $\alpha\alpha$ zieht und daraus die Hyperbel $cdehfg$ verzeichnet. Die Projection des durch die Mitte EH und A_1B_1 geführten Schnittes würde man offenbar in einer Parabel erhalten, die man aus ab und eh als zusammengehörige Coordinatenrichtungen von b aus construirte, insofern der Schnitt nach der Eigenschaft des hyperbolischen Paraboloids eine Parabel ist und, wie bereits mehrmals erwähnt, zusammengehörige Durchmesser oder Coordinatenrichtungen der Kegelschnitte auch in der Projection zusammen gehörig bleiben. Ganz dieselbe Parabel zeigen nun aber die parallelen Seitenflächen über CF und DG, nur dass, da die Ordinate grösser ist, es auch die Abscisse sein muss; man wird also, um im Grundriss diese Ebenen darzu-

stellen, nur die Grösse der zu *cf* oder *dg* gehörigen Abscisse zu suchen und dann der *abeh* gleiche Parabeln zu construiren haben. Man bestimme sich demnach zuerst den Parameter *ak* der imaginären Parabel *abhe* (indem man die *kk'* rechtwinklig auf *he* zieht, $ak' = ae = ah$ macht, *k'* mit *h* verbindet und in *h* das Perpendikel *hk* errichtet), ziehe hierauf *ll'* rechtwinklig zu *cf* durch *m*, mache $ml = ak$ und ziehe rechtwinklig zur Verbindungslinie *lf* die *fl'*; *al'* giebt sodann die gesuchte Abscissenlinie und wird als *mo* und *no* parallel *ab* aufgetragen, worauf man um *cf*, *mo* und *dg*, *no* mit dem Parameter *ak* die Parabeln *cof* und *dog* beschreibt.

Bis hieher liegt in der ganzen Construction nichts Neues, sondern es ist die gewöhnliche geometrische Darstellung einer Hyperbel- und zweier Parabelprojectionen; es bleibt nun aber noch die Darstellung des inneren Theils übrig, die Verzeichnung der Höhlung, da bekanntlich dieses Paraboloid sattelförmig gestaltet ist, und hierbei verfährt man folgendermassen. Man ziehe in der Hyperbel *cdehfg* den zur Richtung *ab* zugehörigen Durchmesser *rr*, bestimme sich durch *rσ* parallel *ab* bis zur Asymptote *αα* die Grösse des Durchmessers *ss* und verzeichne den den zusammengehörigen Coordinaten *ab*, *rr* zukommenden Parameter einer gedachten Parabel um *ab*, *rr*, indem man *tt'* rechtwinklig zu *rr* zieht, $at' = ar$ nimmt und durch eine zu *t'r* perpendiculäre Linie *rt* die Grösse *at* abschneidet. Hierauf messe man mit einer beliebigen Einheit die Grössen *as* und *rr* und berechne sich hiernach $\left(\frac{as}{rr}\right)^2$, worauf man eine Parabel aus den zusammengehörigen Coordinatenrichtungen *rr* und *ab* zu construiren hat, deren Parameter $= at$ ist und deren Anfangspunkt um $\left(\frac{as}{rr}\right)^2 . at$ auf der *ab* weiter herein als *b* liegt. Diese Parabel wird so weit gezeichnet, bis sie sich tangential an die Hyperbel *cdehfg* anschliesst. In der Figur ist die Grösse *bo'*, um welche der Anfangspunkt *o'* vor *b* fällt, $\frac{1}{4}$ *at*, was hier blos einen Punkt beträgt.

Bei der Zeichnung des Aufrisses hat man ebenso, wie im Grundrisse, erst die Darstellung der Hyperbel und der beiden Seitenparabeln zu vollziehen, wozu man die nöthigen Längen aus dem Grundriss erhält. Die Hyperbel $c_1d_1e_1h_1f_1g_1$ verzeichnet man aus den Asymptoten $\alpha_1\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_1$, indem man solche blos aus dem Grundrisse heraufzutragen braucht, da es ein sehr leicht einzusehender Satz ist, dass die Asymptoten in jeder Darstellung der Hyperbel solche bleiben müssen. Für die Verzeichnung der Parabeln $c_1f_1o_1$ und $d_1g_1o_1$ ist m_1o_1, c_1f_1 und n_1o_1, d_1g_1 gegeben, wozu man sich den Parameter zu bestimmen hat, den man auch in a_1k_1 erhält, da eine Parabel um a_1b_1, e_1h_1 beschrieben gedacht, nothwendig dieselben Verhältnisse zeigen wird. Hierauf bestimme man sich nun den zur Richtung a_1b_1 gehörigen Durchmesser $v_1a_1v_1$ der Hyperbel und durch eine durch v_1 parallel a_1b_1 bis zum Durchschnitt mit der Asymptote $\alpha_1\alpha_1$ gezogene Linie $v_1\beta_1$ den Durchmesser w_1w_1, sowie ferner den einer Parabel um a_1b_1, v_1v_1 zukommenden Parameter a_1l_1 (indem man l'_1l_1 rechtwinklig zu v_1v_1 zieht und l_1v_1 zur Verbindungslinie $v_1l'_1$). Misst



man nun v_1v_1 und a_1w_1 und berechnet sich den Ausdruck $\left(\frac{a_1w_1}{v_1v_1}\right)^2$, so erhält man dadurch in einem Bruchtheil von a_1l_1 die Grösse, um welche der Anfangspunkt u_1 weiter herein als b_1 liegt, woraus man sich dann leicht mit dem Parameter a_1l_1, die Richtungen a_1u_1 und v_1v_1 als zusammengehörig betrachtet, von u_1 aus die Parabel verzeichnet, die man so weit fortsetzt, bis sie die Hyperbel tangirt. In der Figur ist $b_1u_1 = \frac{1}{32}\, a_1l_1$.

Ueber die Construction der Hyperbel und Seitenparabeln ist natürlich nichts weiter zu sagen, sondern blos die Formel für die innere Parabel $o'rr$ abzuleiten. Diese Parabel ist aber die Umhüllungscurve von Hyperbeln ähnlich $cdehfg$, welche nach einer Parabel, die man sich um ab, eh beschrieben denken kann, in der Richtung ab fortschreiten, wie sogleich aus der ideellen Entstehungsweise des hyperbolischen Paraboloids durch die Fortbewegung einer variabeln Hyperbel ähnlich $CDEHFG$ um eine Parabel B_1A_1EH, wobei sich die Axen nach den doppelten Ordinaten der Parabel ändern, hervorgeht. Nennt man daher die variable Entfernung der Hyperbel von b aus (etwa ba) $= \alpha$, die zu dieser Entfernung gehörige Ordinate (gleich halben Durchmesser der Hyperbel) $ae = r$, den halben Durchmesser $ar = l$ und den dazu gehörigen, auf ab fallenden halben Durchmesser der Hyperbel $= nl$, so wird, lässt man wieder x und y als die Coordinaten der neuen Curve nach den Richtungen ab und rr gelten:

$$\frac{y^2}{l^2} - \frac{(\alpha - x)^2}{n^2 l^2} = 1$$

und

$$l = \mu \sqrt{\alpha p},$$

wo μ das Verhältniss $\frac{l}{r}$ ausdrückt und p den Parameter der Parabel $abeh$ bezeichnet. Substituirt man den Werth von l in die erste Gleichung, so erhält man:

$$n^2y^2 - (x - \alpha)^2 = n^2 . \mu^2 . \alpha p,$$

differenziirt

$$2(x - \alpha) = n^2 . \mu^2 . p,$$

$$\alpha = x - \frac{n^2 . \mu^2 . p}{2}$$

und durch Einsetzung dieses Ausdrucks von α in obige Gleichung:

$$n^2y^2 - \left(x + \frac{n^2 . \mu^2 . p}{4} - x\right)^2 = n^2 . \mu^2 . p . \frac{2x - p . n^2\mu^2}{2},$$

$$y^2 = \mu^2 p \left(x - \frac{n^2\mu^2 p}{4}\right),$$

d. i. die Gleichung einer Parabel, deren Parameter $p_1 = \mu^2 p$ ist und deren Anfangspunkt (oder Scheitelpunkt in der Linie ab) um $\frac{n^2\mu^2}{4} . p$ weiter herein liegt.

Man könnte nun hiernach sehr leicht die Zeichnung ausführen, indem man nur mit einem Maassstabe ae, ar und as zu messen und sich die Ausdrücke $\mu^2 = \left(\frac{ar}{ae}\right)^2$ und

$$\frac{\mu^2 n^2}{4} = \frac{\overline{ar}^2}{4\overline{ae}^2} \cdot \frac{\overline{as}^2}{\overline{ar}^2} = \left(\frac{as}{2ae}\right)^2$$

zu berechnen braucht, um in Theilen von at die Bestimmungen für die neue Parabel zu erhalten, und es ist eine solche Construction namentlich in den Fällen zu empfehlen, wo μ ein grosser Bruch wird, so dass man dasselbe mit hinreichender Genauigkeit für die Zeichnung $=1$ setzen kann; doch ist in der Figur und Beschreibung ein etwas anderer Gang eingeschlagen.

Es ist nämlich, bestimmt man sich für eine um rar und ab beschrieben gedachte Parabel den Parameter p_2, derselbe $= \frac{\overline{ar}^2}{ab}$ während $p = \frac{\overline{ae}^2}{ab}$ ist, so dass

$$p = \left(\frac{ae}{ar}\right)^2 \cdot p_2 = \frac{1}{\left(\frac{ar}{ae}\right)^2} p_2 = \frac{1}{\mu^2} \cdot p_2$$

wird, und substituirt man diesen Werth in die Gleichungen $p_1 = \mu^2 p$ und

$$o_1 b = \mu^2 . \frac{n^2}{4} . p,$$

so erhält man $p_1 = p_2$ und

$$o_1 b = \frac{n^2}{4} p_2 = \left(\frac{as}{rr}\right)^2 . p_2 .$$

Die Parabel $abrr$ ist wirklich die Projection eines durch ab und rr geführten Schnittes in dem hyperbolischen Paraboloid, und man hätte die Ableitung gleich so vornehmen können, dass man sich die Hyperbeln nach dieser Parabel fortlaufend gedacht hätte, was zu demselben Resultate geführt haben würde; doch glaube ich, dass die gegebene Ableitung einestheils deshalb besser ist, weil sie noch einen andern Weg der Construction zeigt, der in einzelnen Fällen sogar besser anwendbar sein kann, und anderntheils macht sie bloss von dem einfachsten Satze, von der Entstehung des hyperbolischen Paraboloids, Gebrauch, während im zweiten Falle schon einige nähere Kenntnisse von dessen Eigenschaften vorausgesetzt werden müssen.

Hiermit wären die zu behandelnden Oberflächen der 2ten Ordnung erschöpft und für jede derselben eine, wie mir scheint, ziemlich einfache Constructionsmethode ihrer Projectionen angegeben, und ich schliesse daher diese Abhandlung mit dem Wunsche, dass sie auch in praktischer Hinsicht (für Zeichner u. dergl.) einigen Nutzen gewähren und Vorurtheile, welche gewiss dagegen auftreten werden, siegreich überwinden möge.

Für die Annahme, dass in den vier erstern Körpern die Ellipse in einen Kreis übergeht, treten noch mehrfache Vereinfachungen ein, welche ich in einem späteren Aufsatze zusammenzustellen Willens bin.

Es wurde am Ende der 4ten Aufgabe auf eine ziemlich einfache Parabelconstruction aus einem Durchmesser und der dazugehörigen Ordinatenrichtung verwiesen, und ich gebe daher zum Schlusse ein Verfahren an, welches gewiss vor vielen andern in der Ausführung den Vorzug verdient; eine sehr leichte Construction, insofern man erst die Axen findet, ist auch in Crelle's Journal von meinem Bruder angegeben worden.— Es muss ausser dem Durchmesser und der Richtung der Ordinaten entweder noch der Parameter für diese Coordinatenrichtungen oder ein beliebiger Punkt der Parabel gegeben sein, woraus man erst den Parameter findet; wir nehmen den letztern Fall an, da er als der allgemeinere den erstern mit einschliesst.

Es sei in Taf. VII. Fig. 7. der Durchmesser der Parabel $=AB$, die gegebene Ordinatenrichtung CD und D (also auch C) ein Punkt der Parabel.

Um zuerst den zu diesen Coordinatenrichtungen gehörenden Parameter zu bestimmen, ziehe man EF rechtwinklig zu CD, mache $ME=AM$ und ziehe DF rechtwinklig zu ED; es wird sodann MF die gesuchte Grösse. Der Beweis ergiebt sich sogleich aus der Gleichung der Parabel. Die nun folgende Parabelverzeichnung ist nichts als das umgekehrte Verfahren. Man ziehe durch beliebig angenommene Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 etc. Parallelen mit CD und EF und von A aus die AE beliebig verlängert fort, welche die E_1F_1, E_2F_2 etc. in E_1, E_2, E_3 etc. schneidet. Trägt man nun auf einer beliebigen dieser Parallelen, z. B. E_4F_4, $M_4F_4 =$ dem Parameter auf, halbirt EF in H und E_4F_4 in H_4 und zieht die HH_4, welche man nach beiden Seiten beliebig verlängert, so erhält man in H_1, H_2, H_3, H_4 etc. Punkte, von denen aus man mit einer Zirkelspannung $=H_1E_1$, H_2E_2 etc. die Punkte D_1, C_1, D_2, C_2 etc. abschneidet, durch die die Parabel geht. Ein Vortheil bei der Zeichnung ist, die Punkte mehr in der Nähe des Scheitels zusammenzudrängen; je entfernter davon, desto grösser kann man die Distanzen nehmen.

XXI.

Ueber eine transscendente Gleichung, welcher keine complexe Zahl genügt.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Die fortschreitende Ausbildung der Arithmetik hat bekanntlich eine successive Erweiterung des Zahlengebietes nöthig gemacht und zwar in der Absicht, um Operationen, die unter Umständen unausführbar sein würden, unter allen Umständen bewerkstelligen zu können. So ist z. B., wenn wir die natürliche Zahlenreihe 1, 2, 3,.... als das ursprüngliche Material der Arithmetik ansehen, schon die Subtraction eine nicht immer mögliche Operation; denn bei dem Versuche 5 von 3 abzuziehen (von 3 aus 5 Schritte rückwärts zu gehen) würde man aus der obigen Zahlenreihe herauskommen, und mithin ist $3-5$ eine relativ unmögliche Zahl, weil es eben unmöglich ist, sie in jener Zahlenreihe aufzufinden. Diese Unmöglichkeit verschwindet bei einer Erweiterung des Zahlengebietes um die negativen ganzen Zahlen. Aehnliche Betrachtungen führen auf die neuen Erweiterungen durch Brüche und Irrationalzahlen, welche zur Interpolation der Reihe

$$\ldots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ \ldots$$

dienen. Ausser dieser longitudinalen Erweiterung des Zahlengebietes ist aber auch eine laterale Erweiterung eingetreten und zwar durch die Entdeckung der imaginären Zahlen, welche in Beziehung auf das Zahlengebiet $-\infty$ bis $+\infty$ relativ eben so unmöglich sind wie eine negative Zahl bezüglich der Zahlenreihe 0 bis $+\infty$. Es entsteht nun die Frage, ob sich mit dieser Zahlengattung das Gebiet der Zahlen schliesst, oder ob es noch weitere neue Zahlengattungen giebt, durch welche das Zahlengebiet fernere Dimensionen erhalten würde. Es ist nicht schwer, den Weg anzudeuten, auf welchem man fortgehen muss, wenn man der-

gleichen neue Regionen zu entdecken hoffen will; erinnert man sich nämlich, dass die Einheiten -1 und $\sqrt{-1}$ als Wurzeln der Gleichungen $1+x=0$, $1+x^2=0$ angesehen werden dürfen, so erhellt auf der Stelle, dass es nur darauf ankommen würde, eine Gleichung von der Form $1+f(x)=0$ zu finden, welche keine Wurzel von der Form $x=a+b\sqrt{-1}$ besässe; denn hiesse j die Wurzel jener Gleichung, so wäre eben diese durch die Gleichung $f(j)=-1$ definirte Grösse nicht in dem bisherigen Zahlengebiete (dem der complexen Zahlen) enthalten und gehörte demnach einer neuen Zahlengattung an. Man weiss nun im Voraus, dass $f(x)$ keine algebraische Function sein darf, weil schon bewiesen ist, dass jede algebraische Gleichung durch complexe Zahlen aufgelöst werden kann, und es bleibt daher nur übrig sich im Gebiete der transscendenten Functionen umzusehen. Ich will nun zeigen, dass wenn

$$1)\qquad f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\dots$$

gesetzt wird, die Gleichung $1+f(x)=0$ oder $f(x)=-1$ keine Wurzel von der Form $a+bi$ (wo $i=\sqrt{-1}$) besitzt.

I. Beschränken wir uns vorerst auf reelle Werthe von x, so sind drei Fälle möglich, nämlich $x>0$, $x=0$ und $x<0$. Für $x>0$, d. h. für ein positives x, bleibt nun aber immer

$$f(x)>\frac{1}{x(x+1)},$$

wie man sogleich ersieht, wenn $f(x)$ unter der Form

$$f(x)=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\dots$$

dargestellt wird, und daher ist die Gleichung $f(x)=-1$ für ein positives x offenbar nicht zu erfüllen. Eben so wenig kann $x=0$ eine Wurzel derselben sein, weil $f(0)=\infty$ also nicht $=-1$ wird. So bleibt denn nur die Möglichkeit übrig, dass eine negative Zahl, $-\xi$ etwa, der Gleichung genügte, so dass für $x=-\xi$ die Beziehung

$$2)\qquad \frac{1}{-\xi}-\frac{1}{-\xi+1}+\frac{1}{-\xi+2}-\dots+\frac{(-1)^m}{-\xi+m}$$
$$+\frac{(-1)^{m+1}}{-\xi+m+1}+\frac{(-1)^{m+2}}{-\xi+m+2}+\dots+\frac{(-1)^{2m}}{-\xi+2m}$$
$$+\frac{(-1)^{2m+1}}{-\xi+2m+1}+\frac{(-1)^{2m+2}}{-\xi+2m+2}+\dots=-1$$

statt finden müsste. Man übersieht auf der Stelle, dass ξ hier keine ganze Zahl sein darf, weil sonst ein Glied der Reihe unendlich werden würde, und dass folglich nur ein zwischen zwei

ganze Zahlen (etwa m und $m+1$) fallendes ξ der Gleichung genügen könnte. Setzen wir daher $\xi = m + \varrho$, wo ϱ einen positiven ächten Bruch bezeichnet. Die Gleichung 2) geht dann in die folgende über:

$$-\frac{1}{m+\varrho}+\frac{1}{m-1+\varrho}-\ldots\ldots+\frac{(-1)^m}{1+\varrho}+\frac{(-1)^{m+1}}{\varrho}$$
$$+\frac{(-1)^{m+1}}{1-\varrho}+\frac{(-1)^{m+2}}{2-\varrho}+\ldots\ldots+\frac{(-1)^{2m}}{m-\varrho}$$
$$-\left[\frac{1}{m-\varrho+1}-\frac{1}{m-\varrho+2}+\frac{1}{m-\varrho+3}-\ldots\ldots\right]=-1.$$

Multiplicirt man beiderseits mit $(-1)^{m+1}$ und nimmt darauf diejenigen Glieder zusammen, deren Nenner nur in dem Vorzeichen von ϱ differiren, so ergiebt sich auf der Stelle

$$3)\qquad \frac{1}{\varrho}+\frac{2\varrho}{1^2-\varrho^2}-\frac{2\varrho}{2^2-\varrho^2}+\ldots\ldots+\frac{(-1)^{m+1}2\varrho}{m^2-\varrho^2}$$
$$+(-1)^m\left[\frac{1}{m-\varrho+1}-\frac{1}{m-\varrho+2}+\frac{1}{m-\varrho+3}-\ldots\right]=(-1)^m.$$

Hier müssen wir unterscheiden, ob m gerade oder ungerade ist; im ersteren Falle transponiren wir $\frac{1}{\varrho}$ auf die rechte Seite und schreiben folgendermassen:

$$2\left(\frac{\varrho}{1^2-\varrho^2}-\frac{\varrho}{2^2-\varrho^2}\right)+2\left(\frac{\varrho}{3^2-\varrho^2}-\frac{\varrho}{4^2-\varrho^2}\right)+\ldots$$
$$\ldots+2\left(\frac{\varrho}{(m-1)^2-\varrho^2}-\frac{\varrho}{m^2-\varrho^2}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{m-\varrho+1}-\frac{1}{m-\varrho+2}\right)+\left(\frac{1}{m-\varrho+3}-\frac{1}{m-\varrho+4}\right)+\ldots$$
$$=1-\frac{1}{\varrho}=\frac{\varrho-1}{\varrho}.$$

Diese Gleichung enthält aber einen offenbaren Widerspruch in sich; sämmtliche auf der linken Seite in Klammern eingeschlossene Differenzen sind nämlich positive Grössen, und mithin ist auch der Gesammtwerth der linken Seite positiv; dagegen ist die rechts vorkommende Differenz $\varrho-1$ negativ, weil ϱ einen ächten Bruch bezeichnete. Daher kann die Zahl m keine gerade Zahl sein.

Für ein ungerades m stellen wir die Gleichung 3) in folgender Form dar:

$$2\left(\frac{\varrho}{1^2-\varrho^2}-\frac{\varrho}{2^2-\varrho^2}\right)+2\left(\frac{\varrho}{3^2-\varrho^2}-\frac{\varrho}{4^2-\varrho^2}\right)+\dots$$

$$\dots+2\left(\frac{\varrho}{(m-2)^2-\varrho^2}-\frac{\varrho}{(m-1)^2-\varrho^2}\right)+\frac{2\varrho}{m^2-\varrho^2}$$

$$+\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{m-\varrho+1}\right)+\left(\frac{1}{m-\varrho+2}-\frac{1}{m-\varrho+3}\right)+\dots.=-1$$

Hier sind wieder alle auf der linken Seite vorkommenden Differenzen positiv und überhaupt der Gesammtwerth der linken Seite positiv, während rechts eine negative Zahl steht. Da sich diess widerspricht, so folgt, dass m auch keine ungerade Zahl sein kann. — Fassen wir nun alles Bisherige zusammen, so ergiebt sich, dass die Gleichung $f(x)=-1$ keine reelle Auflösung besitzt.

II. Wir haben nun noch zu untersuchen, ob die complexe Zahl $x=a\pm bi$ eine Wurzel unserer Gleichung sein könnte. Da überhaupt

$$\frac{1}{a\pm bi+n}=\frac{a+n\mp bi}{(a+n)^2+b^2}$$

ist, so hat man unmittelbar

$$f(a\pm bi)=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{a+1}{(a+1)^2+b^2}+\frac{a+2}{(a+2)^2+b^2}-\dots$$

$$\mp i\left[\frac{b}{a^2+b^2}-\frac{b}{(a+1)^2+b^2}+\frac{b}{(a+2)^2+b^2}-\dots\right]$$

und wenn diess $=-1$ sein soll, so müssen gleichzeitig die Gleichungen

$$\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{a+1}{(a+1)^2+b^2}+\frac{a+2}{(a+2)^2+b^2}-\dots.=-1, \tag{4}$$

$$\frac{b}{a^2+b^2}-\frac{b}{(a+1)^2+b^2}+\frac{b}{(a+2)^2+b^2}-\dots=0 \tag{5}$$

statt finden. Die zweite Reihe convergirt nun immer und ihre Summe ist

$$<\frac{b}{a^2+b^2},$$

dagegen

$$>\frac{b}{a^2+b^2}-\frac{b}{(a+1)^2+b^2};$$

also im Allgemeinen eine von Null verschiedene Grösse. Nur in zwei Fällen liesse sich die Gleichung 5) erfüllen, wenn nämlich

entweder $b=0$ oder $a=\infty$ wäre; aber in beiden Fällen besteht die Gleichung 4) nicht. Für $b=0$ käme man nämlich auf

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}-\ldots=-1$$

zurück, was für reelle a (und nur solche werden betrachtet) ein Widerspruch ist, wie wir aus I. wissen; im zweiten Falle $a=\infty$ dagegen würde die Gleichung 4) in $0=-1$ übergehen, was sich abermals widerspricht. Die Gleichungen 4) und 5) können daher nicht zusammen bestehen, d. h. es giebt keine reellen a und b, für welche $f(a+bi)=-1$ werden könnte. Hiermit ist denn der Nachweis geliefert, dass die transscendente Gleichung

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\ldots=-1$$

keine Wurzel von complexer Form besitzt. Es lassen sich an diese Thatsache noch mancherlei Consequenzen anknüpfen, die, wie es scheint, nicht ohne Interesse und Brauchbarkeit sind. Davon ein ander Mal.

XXII.

Ueber die höheren Differenzialquotienten der Tangente.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Obgleich man die höheren Differenzialquotienten der Tangente schon auf mehrere verschiedene Weisen entwickelt hat, so ist doch vielleicht die nachstehende Ableitung derselben nicht überflüssig, weil sie auf einem sehr einfachen Verfahren beruht, welches den Resultaten eine besondere Eleganz verleiht. Bezeichnen

wir überhaupt den $m$ten Differenzialquotienten einer Function $\varphi(x)$ mit $D^m\varphi(x)$, so ist

$$D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1,$$

ferner:

$$\begin{aligned} D^2\tan x &= 2\tan x \,.\, D\tan x \\ &= 2\tan x(\tan^2 x + 1) \\ &= 2\tan^3 x + 2\tan x. \end{aligned}$$

Weiter hat man

$$\begin{aligned} D^3\tan x &= 2.3\tan^2 x \,.\, D\tan x + 2D\tan x \\ &= (2.3\tan^2 x + 2)\, D\tan x, \end{aligned}$$

und wenn für $D\tan x$ wieder $\tan^2 x + 1$ gesetzt wird:

$$D^3\tan x = 6\tan^4 x + 8\tan^2 x + 2.$$

Eine nochmalige Differenziation giebt

$$\begin{aligned} D^4\tan x &= 6.4\tan^3 x \,.\, D\tan x + 8.2\tan x \,.\, D\tan x \\ &= (6.4\tan^3 x + 8.2\tan x)(\tan^2 x + 1), \end{aligned}$$

d. i.

$$D^4\tan x = 24\tan^5 x + 40\tan^3 x + 16\tan x.$$

Man sieht auf der Stelle wie sich dieses Verfahren fortsetzen lässt und zwar mit einer Leichtigkeit, die wohl bei keiner anderen Entwickelungsweise anzutreffen sein dürfte. Ueberhaupt ist

$$1)\qquad D^m\tan x$$
$$= \overset{m}{E}_0\tan^{m+1}x + \overset{m}{E}_2\tan^{m-1}x + \overset{m}{E}_4\tan^{m-3}x + \ldots..$$

wobei die mit E bezeichneten Koeffizienten blosse Zahlen sind. Eine Recursionsformel für dieselben ergiebt sich leicht, wenn man die Gleichung 1) noch einmal differenzirt und die so entstandene neue Gleichung mit derjenigen zusammenhält, in welche die obige übergeht, sobald man $m+1$ an die Stelle von m treten lässt. Man findet so erstlich

$$D^{m+1}\tan x$$

$$=\left[(m+1)\overset{m}{E_0}\tan^m x+(m-1)\overset{m}{E_2}\tan^{m-2}x+(m-3)\overset{m}{E_4}\tan^{m-4}x+..\right]$$

$$\times[\tan^2 x+1]$$

$$=(m+1)\overset{m}{E_0}\tan^{m+2}x+\left[(m+1)\overset{m}{E_0}+(m-1)\overset{m}{E_2}\right]\tan^m x$$

$$+\left[(m-1)\overset{m}{E_2}+(m-3)\overset{m}{E_4}\right]\tan^{m-2}x+.....;$$

andererseits, wenn man $m+1$ für m setzt, aus der Gleichung 1):

$$D^{m+1}\tan x$$

$$=\overset{m+1}{E_0}\tan^{m+2}x+\overset{m+1}{E_2}\tan^m x+\overset{m+1}{E_4}\tan^{m-2}x+......$$

Bezeichnet man mit k eine gerade Zahl, und vergleicht beiderseits die Koeffizienten von $\tan^{m-k+2}x$, so ergiebt sich die Recursionsformel

$$2)\qquad \overset{m+1}{E_k}=(m-k+1)\overset{m}{E_k}+(m-k+3)\overset{m}{E_{k-2}},$$

mit deren Hülfe sich eine Tafel der Koeffizienten E leicht berechnen lassen würde.

Eine independente Bestimmung der fraglichen Koeffizienten ergiebt sich auf folgendem Wege. In meiner Differenzialrechnung ist S. 108. Formel (1) und (2) gezeigt, dass für ein ungerades m

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}D^m\tan x$$

$$=\overset{m}{J}_{m+1}\frac{\cos(m+1)x}{\cos^{m+1}x}-2\overset{m}{J}_m\frac{\cos mx}{\cos^m x}+2^2\overset{m}{J}_{m-1}\frac{\cos(m-1)x}{\cos^{m-1}x}-....$$

und für ein gerades m

$$(-1)^{\frac{1}{2}m}D^m\tan x$$

$$=\overset{m}{J}_{m+1}\frac{\sin(m+1)x}{\cos^{m+1}x}-2\overset{m}{J}_m\frac{\sin mx}{\cos^m x}+2^2\overset{m}{J}_{m-1}\frac{\sin(m-1)x}{\cos^{m-1}x}-...$$

ist, worin die mit J bezeichneten Grössen mittelst der Formel

$$3)\qquad \overset{n}{J}_p=(p-1)_0 p^n-(p-1)_1(p-1)^n$$

$$+(p-1)_2(p-2)^n-(p-1)_3(p-3)^n+....$$

berechnet werden; verwandelt man nun die einzelnen Glieder der eben citirten Differenzialformeln in Reihen, indem man die bekannten Formeln

$$\frac{\cos qx}{\cos^q x} = q_0 - q_2 \tan^2 x + q_4 \tan^4 x - \ldots\ldots$$

$$\frac{\sin qx}{\cos^q x} = q_1 \tan x - q_3 \tan^3 x + q_5 \tan^5 x - \ldots..$$

benutzt, und bringt man endlich die so entstehenden Gleichungen auf die Form der Gleichung 1), so findet man ohne Mühe

$$4)\quad \overset{m}{E}_k = (-1)^{\frac{1}{2}k} \Big[(m+1)_k \overset{m}{J}_{m+1} - 2^1 m_{k-1} \overset{m}{J}_m + 2^2 (m-1)_{k-2} \overset{m}{J}_{m-1}$$
$$- 2^3 (m-2)_{k-3} \overset{m}{J}_{m-2} + \ldots \Big];$$

wo das Bildungsgesetz unmittelbar klar ist.

So wie die Gleichung 1) in Worte übersetzt die Aufgabe enthält, die höheren Differenzialquotienten der Tangente durch die Potenzen der Tangente auszudrücken, so kann man auch die umgekehrte Aufgabe stellen: die Potenzen der Tangente durch die Differenzialquotienten der letzteren auszudrücken. Diess giebt folgende kleine Rechnung. Zunächst hat man wegen $D \tan x = \tan^2 x + 1$ umgekehrt

$$\tan^2 x = D \tan x - 1,$$

folglich durch Differenziation

$$2 \tan x (\tan^2 x + 1) = D^2 \tan x:$$

und hieraus

$$\tan^3 x = \frac{1}{2} D^2 \tan x - \tan x.$$

Wiederholte Differenziation giebt hier

$$3 \tan^2 x (\tan^2 x + 1) = \frac{1}{2} D^3 \tan x - D \tan x,$$

oder

$$\tan^4 x + \tan^2 x = \frac{1}{6} D^3 \tan x - \frac{1}{3} D \tan x,$$

und wenn man die für $\tan^2 x$ gefundene Gleichung davon abzieht:

$$\tan^4 x = \frac{1}{6} D^3 \tan x - \frac{4}{3} D \tan x + 1.$$

Differenzirt man auf's Neue, so kommt

$$4 \tan^3 x (\tan^2 x + 1) = \frac{1}{6} D^4 \tan x - \frac{4}{3} D^2 \tan x$$

oder

$$\tan^5 x + \tan^3 x = \frac{1}{24} D^4 \tan x - \frac{1}{3} D^2 \tan x.$$

und hieraus fliesst durch Subtraction der für $\tan^3 x$ gefundenen Gleichung

$$\tan^5 x = \frac{1}{24} D^4 \tan x - \frac{5}{6} D^2 \tan x + \tan x.$$

Man übersieht auf der Stelle den weiteren Fortgang dieser Rechnung und zugleich das Gesetz, welches sich darin ausspricht; man hat nämlich

$$5) \qquad \tan^m x$$
$$= \overset{m}{H}_1 D^{m-1} \tan x - \overset{m}{H}_3 D^{m-3} \tan x + \overset{m}{H}_5 D^{m-5} \tan x - \ldots\ldots,$$

und diese Formel ist allgemein richtig, wenn man $D^0 \tan x = \tan x$, $D^{-1} \tan x = 1$ setzt, wie sich aus der Vergleichung mit den bisherigen speziellen Fällen ergiebt. — Um eine Recursionsformel für die mit H bezeichneten Koeffizienten zu erhalten, differenziren wir die Gleichung 5); es wird dann

$$m \tan^{m-1} x (\tan^2 x + 1)$$
$$= \overset{m}{H}_1 D^m \tan x - \overset{m}{H}_3 D^{m-2} \tan x + \overset{m}{H}_5 D^{m-4} \tan x - \ldots.$$

oder

$$\tan^{m+1} x + \tan^{m-1} x$$
$$= \frac{1}{m} \overset{m}{H}_1 D^m \tan x - \frac{1}{m} \overset{m}{H}_3 D^{m-2} \tan x + \frac{1}{m} \overset{m}{H}_5 D^{m-4} \tan x - \ldots.$$

Schafft man $\tan^{m-1} x$ auf die rechte Seite und bildet darauf die Reihen für $\tan^{m+1} x$ und $\tan^{m-1} x$ nach der Analogie der Gleichung 5), so findet man durch Koeffizientenvergleichung die Recursionsformel

$$6) \qquad \overset{m+1}{H}_k = \frac{1}{m} \overset{m}{H}_k + \overset{m}{H}_{k-2}.$$

worin k eine ungerade Zahl bezeichnet. Eine independente Formel für die Koeffizienten H habe ich noch nicht entdecken können; die Aehnlichkeit der Gleichung 6) mit der Recursionsformel für die Fakultätencoeffizienten*) lässt übrigens vermuthen, dass das Bildungsgesetz jener Koeffizienten äusserst verwickelt ist.

---

*) Setzt man nämlich

$$\overset{m}{H}_k = \frac{1}{1.2..(m-1)} \overset{m}{G}_k,$$

Die vorhin ausgeführte successive Berechnung von $\tan^2 x$, $\tan^3 x$, $\tan^4 x, \ldots$ mit Hülfe der höheren Differenzialquotienten von $\tan x$ ist noch in so fern von Vortheil, als man leicht die unendlichen Reihen für die Potenzen der Tangente dadurch erhält. Man hat nämlich für ein zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegendes x

$$\tan x = \frac{2^2(2^2-1)}{1.2} B_1 x + \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4} B_3 x^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{1.2..6} B_5 x^5 + \ldots$$

oder

$$7) \qquad \tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \ldots;$$

folglich durch Differenziation und nachherige Subtraction der Einheit:

$$8) \qquad \tan^2 x = x^2 + \frac{2}{3} x^4 + \frac{17}{45} x^6 + \frac{62}{315} x^8 + \ldots;$$

ferner durch Differenziation, Division mit 2 und nachherige Subtraction der Gleichung 7):

$$9) \qquad \tan^3 x = x^3 + x^5 + \frac{231}{315} x^7 + \ldots;$$

weiter durch Differenziation, Division mit 3 und Subtraction der Gleichung 8):

$$10) \qquad \tan^4 x = x^4 + \frac{4}{3} x^6 + \ldots,$$

was sich leicht genug fortsetzen lässt.

---

so verwandelt sich die Gleichung 6) in die folgende

$$\overset{m+1}{G_k} = \overset{m}{G_k} + m \overset{m}{G}_{k-2}\,.$$

Aus der Gleichung

$$(1+0x)(1+1x)(1+2x)\ldots(1+\overline{m-1}\,x)$$
$$= \overset{m}{C_0} + \overset{m}{C_1} x + \overset{m}{C_2} x^2 + \ldots + \overset{m}{C}_{m-1} x^{m-1}$$

leitet man dagegen sehr leicht die Recursionsformel

$$\overset{m+1}{C_k} = \overset{m}{C_k} + m \overset{m}{C}_{k-1}$$

ab, welche mit der vorigen für G die auffallendste Aehnlichkeit hat. Die Koeffizienten H bilden daher gewissermassen Fakultätencoefficienten einer höheren (zweiten) Ordnung.

Wir wollen von diesen Formeln noch eine Anwendung zeigen. Es sei $f(z)$ eine Function, welche sich für alle innerhalb eines gewissen Intervalles $z=0$ bis $z=\zeta$ enthaltenen z in eine Reihe von der Form

$$f(z)=A_0+A_1 z+A_2 z^2+\ldots.$$

verwandeln lässt, so ist für $\zeta > \tan x > 0$:

$$f(\tan x)=A_0+A_1\tan x+A_2\tan^2 x+A_3\tan^3 x+\ldots,$$

und wenn die Bedingung $\frac{1}{2}\pi > x > -\frac{1}{2}\pi$ der obigen Bedingung nicht widerspricht, so kann man für $\tan x$, $\tan^2 x$, $\tan^3 x$, etc. ihre Werthe aus den Gleichungen 7), 8), 9) etc. substituiren und dadurch die obige Gleichung in eine andere von der Form

$$f(\tan x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\ldots..$$

umsetzen. Hieraus folgt weiter

$$\int f(\tan x)\,dx=a_0 x+\frac{1}{2}a_1 x^2+\frac{1}{3}a_2 x^3+\ldots.$$

oder für $x=\operatorname{Arctan} z$:

$$\int\frac{f(z)\,dz}{1+z^2}$$

$$=\frac{1}{1}a_0\operatorname{Arctan} z+\frac{1}{2}a_1\operatorname{Arc}^2\tan z+\frac{1}{3}a_2\operatorname{Arc}^3\tan z+\ldots,$$

wovon man öfter Gebrauch machen kann So ist z. B.

$$\cos(r\tan x)=1-\frac{r^2\tan^2 x}{1.2}+\frac{r^4\tan^4 x}{1.2.3.4}-\ldots.$$

$$=1-\frac{1}{2}r^2\left[x^2+\frac{2}{3}x^4+\ldots\ldots\right]$$

$$+\frac{1}{24}r^4\left[x^4+\frac{4}{3}x^6+\ldots\ldots.\right]$$

$$-\ldots\ldots.$$

$$=1-\frac{1}{2}r^2 x^2+\left(\frac{1}{24}r^4-\frac{1}{3}r^2\right)x^4-\ldots.$$

und diess gilt für alle x von $x=-\frac{\pi}{2}$ bis $x=\frac{\pi}{2}$. Es folgt weiter daraus

$$\int \cos(r\tan x)\,dx$$
$$=x-\frac{1}{6}r^2x^3+\frac{1}{15}\left(\frac{1}{8}r^4-r^2\right)x^5-\ldots\ldots$$

und für $x=\mathrm{Arctan}\,z$:

$$\int \frac{\cos rz}{1+z^2}\,dz$$
$$=\mathrm{Arctan}\,z-\frac{1}{6}r^2\mathrm{Arc}^3\tan z+\frac{1}{15}\left(\frac{1}{8}r^4-r^2\right)\mathrm{Arc}^5\tan z-\ldots$$

Diese Reihenentwickelung hat den nicht unerheblichen Vortheil, für alle z von $z=-\infty$ bis $z=+\infty$ zu gelten, denn erst wenn $z=\infty$ geworden ist, hat x den grössten Werth (nämlich $\frac{1}{2}\pi$) erreicht, den es überhaupt annehmen darf.

Nicht minder leicht würde es sein, ganz ähnliche Reihen für die Integrale

$$\int \sin(r\tan x)\,dx \quad \text{und} \int e^{-r\tan x}\,dx,$$

oder

$$\int \frac{\sin rz}{1+z^2}\,dz \quad \text{und} \int \frac{dz}{1+z^2}e^{-rz}$$

zu entwickeln, was nun keiner weiteren Auseinandersetzung mehr bedarf.

XXIII.

Noch ein Wort über die Fuss'sche Ellipse.

Von dem
Herrn Dr. August Wiegand,
Oberlehrer an der Realschule zu Halle.

In dem 1. Hefte des 12. Theils d. Archivs erwähnt Hr. Prof. Anger S. 41. eine Ellipse, über welche Fuss eine Abhandlung unter dem Titel: „Observationes circa ellipsin quandam prorsus singularem", geschrieben habe. Es war mir interessant dieselbe Ellipse wieder zu finden, deren Untersuchung ich zum Gegenstande des Osterprogrammes hiesiger Realschule vom Jahre 1846, natürlich ohne die Existenz der Fuss'schen Abhandlung zu ahnen, gemacht hatte. Da der Gegenstand einmal zur Sprache gebracht worden ist und sich namentlich recht wohl zur Uebung für Anfänger eignet, so mögen hier noch einige Bemerkungen darüber Platz finden.

Die Entstehung der Curve habe ich allgemeiner aufgefasst als Fuss, und gesagt: „Wenn man die Abscissen eines Kreises, dessen Gleichung $x^2+y^2=r^2$ ist, um das $n$fache der zugehörigen Ordinaten vermehrt, so ist

$$(x-ny)^2+y^2=r^2$$

die Gleichung einer Ellipse etc., während Fuss sich mit der einmaligen Abtragung begnügt.

Ist α der Neigungswinkel der grossen Axe gegen die Abscisse, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{n^2+4}-n,$$

also für $n=1$:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Die Ordinate des Hauptaxenendpunktes ist demnach das grössere Stück der nach dem goldenen Schnitte getheilten Abscisse.

Die allgemeinen Werthe für die Halbaxen sind

$$a=\frac{2r}{\sqrt{n^2+4}-n},$$

$$b=\frac{2r}{\sqrt{n^2+4}+n}.$$

Betrachtet man n als veränderlich, so drückt die Gleichung

$$(x-ny)^2+y^2=r^2$$

eine unendliche Anzahl von Ellipsen aus, deren Hauptaxenendpunkte (und auch, da die Hauptaxe für ein negatives n in die Nebenaxe umschlägt, Nebenaxenendpunkte) eine Curve zum geometrischen Orte haben, deren Gleichung

$$y^4+x^2y^2=r^2x^2$$

ist. Dieselbe theilt die Kreisperipherie in vier gleiche Theile und hat die an die Endpunkte des auf der Ordinatenaxe liegenden Kreisdurchmessers gezogenen Tangenten zu Asymptoten. Sie berührt und schneidet zugleich die Ordinatenaxe. Ihr asymptotischer Raum ist $=r^2\pi$, also gleich dem Erzeugungskreise und gleich dem Inhalte der Ellipse für $n=1$.

Der geometrische Ort der Brennpunkte hingegen ist eine Curve, deren Gleichung

$$x^2y^2+r^2y^2=r^2x^2$$

ist. Sie hat natürlich dieselben Asymptoten. Der Durchschnittspunkt dieser Curve mit dem Erzeugungskreise hat die mittlere Proportionale zwischen dem Kreishalbmesser und der Seite seines eingeschriebenen Zehnecks zur Abscisse. Die Tangenten im Anfangspunkte der Coordinaten an beide Zweige der Curve bilden mit der Abscissenaxe Winkel von 45°.

Der asymptotische Raum dieser Curve ist $=4r^2$, also gleich dem Quadrate über dem Durchmesser des Erzeugungskreises.

XXIV.

Ueber die Gleichgewichtslage einer Magnetnadel, die unter dem Einflusse eines Magneten steht, und über magnetische Curven.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

§. 1.

Auf der Geraden AB (Taf. VII. Fig. 8.) nehme man zwei Punkte N und S an, ziehe um dieselben mit dem beliebigen Halbmesser a Kreise; errichte in einem Punkte P der Linie AB eine Senkrechte, welche die beiden Kreise in W und V trifft; ziehe sodann von den Mittelpunkten S und N nach den Punkten W und V gerade Linien, die sich im Punkte K schneiden. Man soll nun die Lage des Punktes K bestimmen.

Man halbire SN in M, nehme M als Anfangspunkt der Coordinaten, MN als positive Seite der Axe der x, eine Senkrechte in M, die nach oben gerichtet ist, als positive Seite der Axe der y, und sei $MN=L$, $MP=b$; so ist die Gleichung des Kreises um N:

$$(x-L)^2+y^2=a^2, \qquad (1)$$

die des Kreises um S:

$$(x+L)^2+y^2=a^2. \qquad (2)$$

Die Gleichung der PV ist

$$x=b \qquad (3)$$

Die Linie (3) trifft den Kreis (1) im Punkte V, dessen Coordinaten sind:

$$b, \pm\sqrt{a^2-(b-L)^2},$$

wo das untere Zeichen für einen ähnlichen Punkt V unterhalb AB gilt. Dieselbe Linie trifft den Kreis (2) in dem Punkte W, dessen Coordinaten sind:

$$b, \pm\sqrt{a^2-(b+L)^2}.$$

Die Gleichung der Linie NV ist:

$$y=\frac{\sqrt{a^2-(b-L)^2}}{b-L}(x-L); \tag{4}$$

die der Linie SW:

$$y=\frac{\sqrt{a^2-(b+L)^2}}{b+L}(x+L). \tag{5}$$

Diese zwei Linien (4) und (5) treffen sich im Punkte K, dessen Coordinaten also sind:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\dfrac{L\sqrt{a^2-(b+L)^2}}{b+L}+\dfrac{L\sqrt{a^2-(b-L)^2}}{b-L}}{\dfrac{\sqrt{a^2-(b-L)^2}}{b-L}-\dfrac{\sqrt{a^2-(b+L)^2}}{b+L}} \\ y &= \frac{2L\sqrt{a^2-(b+L)^2}.\sqrt{a^2-(b-L)^2}}{\dfrac{\sqrt{a^2-(b-L)^2}}{b-L}-\dfrac{\sqrt{a^2-(b+L)^2}}{b+L}}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen die Grösse b, so erhält man die Gleichung der Curve, in der alle auf ähnliche Weise gefundene Punkte K liegen, welche Curve **magnetische Curve** genannt werden möge, aus einem Grunde, der bald angegeben werden wird.

Aus der ersten Gleichung (6) folgt zunächst:

$$(b+L)\sqrt{a^2-(b-L)^2}=(b-L)\sqrt{a^2-(b+L)^2}.\frac{L+x}{x-L};$$

setzt man diess in die zweite, so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$b+L=\frac{a(L+x)}{\sqrt{y^2+(L+x)^2}}; \tag{7}$$

Eben so folgt aus der ersten Gleichung in (6):

$$(b-L)\sqrt{a^2-(b+L)^2}=\frac{x-L}{L+x}\sqrt{a^2-(b-L)^2}.(b+L);$$

und wenn man diess wieder in die zweite setzt und reduzirt:

$$b-L=\frac{a(x-L)}{\sqrt{y^2+(x-L)^2}}. \tag{8}$$

Zieht man die Gleichungen (7) und (8) von einander ab, so erhält man endlich:

$$\frac{2L}{a}=\frac{x+L}{\sqrt{y^2+(x+L)^2}}-\frac{x-L}{\sqrt{y^2+(x-L)^2}}, \tag{9}$$

welches nun die Gleichung der gesuchten magnetischen Curve ist.

Diese Gleichung kann man auch schreiben:

$$\frac{2L}{a}\sqrt{y^2+(x+L)^2}.\sqrt{y^2+(x-L)^2},$$

$$=(x+L)\sqrt{y^2+(x-L)^2}-(x-L)\sqrt{y^2+(x+L)^2},$$

und sie wird befriedigt durch $y=0$ und $x=\pm L$, so dass die magnetische Curve durch die Punkte N und S geht. Da mit dem Werthe von a auch die Curve sich ändert, so giebt es unendlich viele magnetische Curven, die alle durch N und S gehen, so dass NS als eine Art gemeinschaftlicher Axe auftritt. Setzt man $a=\infty$, so ist die Gleichung der magnetischen Curve:

$$\frac{x+L}{\sqrt{y^2+(x+L)^2}}=\frac{x-L}{\sqrt{y^2+(x-L)^2}},$$

d. h.

$$(x+L)y=\pm(x-L)y,$$

welche Gleichung für $y=0$ allgemein befriedigt wird, so dass die magnetischen Curven für ein unendliches a zur Axe der x werden.

Da die Gleichung (9) unverändert bleibt, wenn man $-y$ statt y, oder $-x$ statt x setzt, so folgt daraus, dass die Curve durch die Coordinatenaxen in vier congruente Theile getheilt wird. Für $x=\pm L$ erhält man übrigens ausser $y=0$ auch noch $y=\pm\sqrt{a^2-4L^2}$; so dass, wenn $a>2L$, dem Werthe $x=\pm L$ zwei Punkte (resp. 8) der Curve entsprechen. Für $x=0$ erhält man $y=\pm\sqrt{a^2-L^2}$, so dass immer $a>L$ sein muss, was man auch aus der Art der Entstehung der Curve begreifen wird.

Eine andere merkwürdige Eigenschaft jeder magnetischen Curve besteht auch darin, dass die Differenz der Cosinus der Winkel, welche zwei von einem Punkte der Curve nach den Polen N und S gezogene Gerade mit der Axe der x machen, constant ist.

Heisst nämlich der Winkel $KNB=\varphi$, $KSB=\varphi'$, so ist

$$\cos\varphi=\frac{x-L}{\sqrt{y^2+(x-L)^2}},\ \cos\varphi'=\frac{x+L}{\sqrt{y^2+(x+L)^2}};$$

woraus, nach (9):

$$\cos\varphi'-\cos\varphi=\frac{2L}{a}, \tag{10}$$

welche Gleichung den genannten Satz enthält.

Wenn die Linie NS und ausserhalb ihr irgend ein Punkt im Raume gegeben ist, so kann man durch denselben leicht die entsprechende magnetische Curve ziehen. Man lege nämlich durch NS und jenen Punkt eine Ebene, nehme die Coordinatenaxen wie oben, und seien c, d die Abscissen des fraglichen Punktes in der Ebene, welche nun Ebene der xy ist, so findet sich der Halbmesser a nach der Formel:

$$\frac{2L}{a}=\frac{c+L}{\sqrt{d^2+(c+L)^2}}-\frac{c-L}{\sqrt{d^2+(c-L)^2}}, \tag{11}$$

so dass die Gleichung der magnetischen Curve ist:

$$\frac{L+x}{\sqrt{y^2+(L+x)^2}}-\frac{x-L}{\sqrt{y^2+(x-L)^2}}=\frac{L+c}{\sqrt{d^2+(c+L)^2}}-\frac{c-L}{\sqrt{d^2+(c-L)^2}}. \tag{12}$$

Da der Halbmesser a aus (11) bekannt ist, so hat die Verzeichnung auch keine Schwierigkeit; es ist nämlich:

$$a=2L\,.\frac{\sqrt{d^2+(c+L)^2}\,.\,\sqrt{d^2+(c-L)^2}}{(c+L)\sqrt{d^2+(c-L)^2}-(c-L)\sqrt{d^2+(c+L)^2}}. \tag{13}$$

Für $d=0$ und $c=\pm L$ wird a unbestimmt, wie sich diess von selbst versteht, da a l l e magnetischen Curven durch N und S gehen.

Sucht man aus der Gleichung (9) den Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$, so findet er sich:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{y\left[(y^2+(x+L)^2)^{\frac{3}{2}}-(y^2+(x-L)^2)^{\frac{3}{2}}\right]}{(x-L)(y^2+(x+L)^2)^{\frac{3}{2}}-(x+L)(y^2+(x-L)^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{14}$$

Bildet man nun die Gleichung der Tangente an die Curve im Punkte (x, y), und sucht den Durchschnittspunkt derselben mit der Axe der x, so findet man als Abscisse des letzteren:

$$L\,.\frac{(y^2+(x+L)^2)^{\frac{3}{2}}+(y^2+(x-L)^2)^{\frac{3}{2}}}{(y^2+(x+L)^2)^{\frac{3}{2}}-(y^2+(x-L)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da, wie wir bald sehen werden, es von Wichtigkeit ist, die Tangente an eine magnetische Curve ziehen zu können, deren Axe NS ist, so kann man aus dem erhaltenen Resultate leicht folgende Construction ableiten, wenn man, wie kurz vorher, einen beliebigen Punkt im Raume annimmt, in dem die fragliche Tangente gezogen werden soll.

Nachdem die Ebene der xy gelegt und die Coordinatenaxen, wie angegeben, gewählt worden, nehme man auf der Axe der x einen Punkt, dessen Abscisse:

$$L \cdot \frac{(d^2+(c+L)^2)^{\frac{3}{2}}+(d^2+(c-L)^2)^{\frac{3}{2}}}{(d^2+(c+L)^2)^{\frac{3}{2}}-(d^2+(c-L)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ziehe von diesem an den ersten eine Gerade, so ist diess die verlangte Tangente.

Nach diesen vorläufigen Betrachtungen wenden wir uns nun zur eigentlichen Aufgabe, nämlich der der Bestimmung der Lage einer Magnetnadel, welche unter der Einwirkung eines Magneten steht, vorausgesetzt, die Nadel könne sich frei um ihren Schwerpunkt bewegen.

§ 2.

Sei in Taf. VII. Fig. 9. NS ein fester Magnet, dessen Länge $=2L$, M seine Mitte; sei ferner ns eine um ihren Mittelpunkt C bewegliche Magnetnadel, deren Länge $=2l$; N, n die Nord-, S, s die Südenden. Man lege durch N, S, C eine Ebene, welche als Ebene der xy betrachtet werde, die Axe der x gehe durch C, parallel mit NS und in der Richtung NS, die Axe der y sei gegen NS gerichtet, so dass C der Anfangspunkt der Coordinaten ist. Nun ist, wenn α, β, γ die Winkel sind, welche Cs mit den Coordinatenaxen macht, die Entfernung:

$$Ns = \sqrt{(a-L-l\cos\alpha)^2+(b-l\cos\beta)^2+(l\cos\gamma)^2} = \varrho,$$

$$Nn = \sqrt{(a-L+l\cos\alpha)^2+(b+l\cos\beta)^2+(l\cos\gamma)^2} = r;$$

$$Ss = \sqrt{(a+L-l\cos\alpha)^2+(b-l\cos\beta)^2+(l\cos\gamma)^2} = \varrho_1,$$

$$Sn = \sqrt{(a+L+l\cos\alpha)^2+(b+l\cos\beta)^2+(l\cos\gamma)^2} = r_1;$$

wenn a, b die Coordinaten des Punktes M sind.

Ist nun A die Stärke der gegenseitigen Anziehung oder Abstossung in der Einheit der Entfernung, so wirken folgende Kräfte:

I) auf s die Kraft $+\frac{A}{\varrho^2}$, nach Ns, deren Richtung mit den Axen Winkel bildet, deren Cos $=\frac{a-L-l\cos\alpha}{\varrho}$, $\frac{b-l\cos\beta}{\varrho}$, $-\frac{l\cos\gamma}{\varrho}$;

auf s die Kraft $-\frac{A}{\varrho_1^2}$, deren entsprechende Cos $=\frac{a+L-l\cos\alpha}{\varrho_1}$, $\frac{b-l\cos\beta}{\varrho_1}$, $-\frac{l\cos\gamma}{\varrho_1}$;

II) auf n die Kraft $-\frac{A}{r^2}$, deren entsprechende Cos $=\frac{a-L+l\cos\alpha}{r}$, $\frac{b+l\cos\beta}{r}$, $\frac{l\cos\gamma}{r}$;

auf n die Kraft $+\frac{A}{r_1^2}$, deren entsprechende Cos $=\frac{a+L+l\cos\alpha}{r_1}$, $\frac{b+l\cos\beta}{r_1}$, $\frac{l\cos\gamma}{r_1}$.

Bildet man nun die drei Gleichungen des Gleichgewichts für den Fall eines festen Punktes (Poinsot, Elémens. 116.), und reducirt, so sind dieselben:

$$lb\cos\gamma\left(\frac{1}{\varrho^3}+\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\varrho_1^3}-\frac{1}{r_1^3}\right)=0,$$

$$al\cos\gamma\left(\frac{1}{\varrho_1^3}+\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{\varrho^3}-\frac{1}{r^3}\right)+Ll\cos\gamma\left(\frac{1}{\varrho^3}+\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r_1^3}+\frac{1}{\varrho_1^3}\right)=0, \quad (15)$$

$$la\cos\beta\left\{\frac{1}{\varrho^3}+\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\varrho_1^3}-\frac{1}{r_1^3}\right\}-Ll\cos\beta\left\{\frac{1}{\varrho^3}+\frac{1}{r^3}+\frac{1}{\varrho_1^3}+\frac{1}{r_1^3}\right\}$$
$$-lb\cos\alpha\left\{\frac{1}{\varrho^3}+\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\varrho_1^3}-\frac{1}{r_1^3}\right\}=0.$$

Aus der ersten Gleichung (15) folgt, da l und b nicht Null sind:

$$\cos\gamma=0, \quad (16)$$

oder

$$\frac{1}{\varrho^3}+\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\varrho_1^3}-\frac{1}{r_1^3}=0.$$

Wäre die letztere Gleichung richtig, so wäre die zweite

$$\frac{1}{\varrho^3}+\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r_1^3}+\frac{1}{\varrho_1^3}=0,$$

was unmöglich ist, da ϱ, r, ϱ_1, r_1 positiv sind. Also hat (16) Statt, d. h. die Nadel liegt in der Ebene durch N, S, C. Für diesen Fall ist ferner $\cos\beta=\sin\alpha$. Alsdann ist:

$$\left.\begin{array}{l}(a\sin\alpha-b\cos\alpha)\left\{\frac{1}{\varrho^3}+\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\varrho_1{}^3}-\frac{1}{r_1{}^3}\right\}\\ \quad -L\sin\alpha\left\{\frac{1}{\varrho^3}+\frac{1}{r^3}+\frac{1}{\varrho_1{}^3}+\frac{1}{r_1{}^3}\right\}\end{array}\right\}=0, \quad (17)$$

welche Gleichung den Werth von α, und somit die Gleichgewichtslage der Nadel bestimmt.

Nehmen wir l so klein an, dass man seine Länge vernachlässigen kann, so folgt aus (17):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{b\left\{\frac{1}{((a-L)^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{((a+L)^2+b)^{\frac{3}{2}}}\right\}}{(a-L)\frac{1}{((b^2+(a-L)^2)^{\frac{3}{2}}}-(a+L)\frac{1}{(b^2+(a+L)^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

$$=\frac{b\{(b^2+(a+L)^2)^{\frac{3}{2}}-(b^2+(a-L)^2)^{\frac{3}{2}}\}}{(a-L)(b^2+(a+L)^2)^{\frac{3}{2}}-(a+L)(b^2+(a-L)^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (18)$$

wodurch α gegeben ist.

Man verlege nun die Coordinatenaxen parallel mit sich selbst in M, nur ändere man die Richtung ihrer positiven Theile, so sind a, b alsdann die Coordinaten von C, während α die Lage der Nadel angiebt. Diese Lage bildet nun die Tangente an eine Curve, die durch C geht, und deren Differenzialgleichung sich findet, wenn man in (18) $b=y$, $a=x$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\partial y}{\partial x}$ setzt, so dass die Differenzialgleichung derselben:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{y\{(y^2+(x+L)^2)^{\frac{3}{2}}-(y^2+(x-L)^2)^{\frac{3}{2}}\}}{(x-L)(y^2+(x+L)^2)^{\frac{3}{2}}-(x+L)(y^2+(x-L)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

welche Gleichung genau mit (14) übereinstimmt. Die Gleichung der fraglichen Curve ist also (9), wenn a darin eine willkührliche Constante bedeutet. Die Curve ist also die durch C gehende magnetische Curve, deren Axe NS ist. Construirt man also auf die in §. 1. angegebene Weise die Tangente im Punkte C an diese Curve, so giebt diese Tangente die Lage der Magnetnadel an, immer vorausgesetzt, dass die Länge der Magnetnadel verschwindend klein sei.

Nimmt man also die Hypothese eines Erdmagneten an, so kann man die Ebene des magnetischen Meridians in einem Punkte der Erde leicht finden. Durch die beiden Pole des Erdmagneten und den gegebenen Punkt denke man sich eine Ebene gelegt, zeichne in derselben im gegebenen Punkte (§. 1.) die Tangente an die durch denselben Punkt gehende magnetische Curve, und lege durch diese Tangente und den Mittelpunkt der Erde eine Ebene, so ist diese die Ebene des magnetischen Meridians.

Ueberhaupt ist man nach den in §. 1. gegebenen Formeln im Stande, die Lage einer kleinen Magnetnadel in Bezug auf einen, auf sie einwirkenden Magnet zu finden, in welchem Punkte des Raumes um den Magneten die Nadel angebracht werde, vorausgesetzt, dass sie frei um ihren Mittelpunkt beweglich ist.

XXV.

Drei materielle Punkte, die auf einer Geraden liegen, ziehen sich an nach den umgekehrten dritten Potenzen ihrer Entfernungen von einander.

Von

Herrn H. Eggers,

Studirenden der Mathematik zu Berlin.

Es seien auf einer festen Geraden drei mit den Massen m_1, m_2, m_3 behaftete Punkte gegeben, welche einander anziehen nach den umgekehrten Cuben ihrer Entfernungen von einander. Man soll den Ort eines jeden als Function der Zeit darstellen.

Die drei Coordinaten dieser drei Punkte, von einem Punkte auf derselben Geraden, dessen Coordinate wir x setzen wollen, abgerechnet, seien respect. x_1, x_2, x_3; so dass ihre respectiven Entfernungen vom Anfangspunkte des Coordinatensystems sind:

$$x+x_1,\ x+x_2,\ x+x_3.$$

Bestimmt man die Anziehung eines jeden Punktes auf die beiden übrigen, so sieht man, dass dieselben durch partielle Differentialquotienten derselben Function (u) respect. nach x_1, x_2, x_3 dargestellt werden, wo u folgenden Werth hat:

$$u = -{}^{1}\left\{\frac{m_1 m_2}{(x_1-x_2)^2} + \frac{m_2 m_3}{(x_2-x_3)^2} + \frac{m_3 m_1}{(x_3-x_1)^2}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ 1.$$

und also unabhängig von der Coordinate x ist.

Die Differentialgleichungen der Bewegung sind demnach folgende:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{\partial^2(x+x_1)}{\partial t^2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ m_2 \frac{\partial^2(x+x_2)}{\partial t^2} &= \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ m_3 \frac{\partial^2(x+x_3)}{\partial t^2} &= \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ 2.$$

Von den sechs Integralgleichungen dieses Systems wollen wir in diesen Coordinaten nur zwei ableiten, welche der Satz von der Erhaltung des Schwerpunkts giebt. Mit Hülfe dieses Integrals können wir dann das System Gleichungen (2.) in zwei Differentialgleichungen mit zwei Variabeln transformiren und aus diesen die vier noch übrigen Integrale bestimmen.

Wenn man alle drei Gleichungen (2.) addirt, so erhält man rechts:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

identisch; folglich auch links:

$$m_1 \frac{\partial^2(x+x_1)}{\partial t^2} + m_2 \frac{\partial^2(x+x_2)}{\partial t^2} + m_3 \frac{\partial^2(x+x_3)}{\partial t^2} = 0,$$

woraus durch zweimalige Integration folgende beiden Integrale erhalten werden:

$$(m_1+m_2+m_3)\frac{\partial x}{\partial t} + m_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + m_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + m_3 \frac{\partial x_3}{\partial t} = \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ 3.$$

und:

$$(m_1+m_2+m_3)\,x + m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = \alpha t + \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ 4.$$

wo α und β die Constanten der Integration bezeichnen.

Ueber den bis jetzt noch willkührlichen Punkt x wollen wir nun so verfügen, dass er der Schwerpunkt des Systems ist. Das giebt uns zwischen den Coordinaten x_1, x_2, x_3 folgende Bedingung:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ 4^*.$$

so dass

$$Mx = \alpha t + \beta \text{ .... } 5.$$

wird, wo

$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

bedeutet.

Die Gleichung (4.) benutzen wir nun, um eine Variable zu eliminiren, was durch die folgende, Euler'sche, Substitution geschehen kann, indem wir zwei neue Variable q_1 und q_2 vermittelst 6 nachher zu bestimmenden Constanten einführen:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_1 q_1 + b_1 q_2 \\ x_2 = a_2 q_1 + b_2 q_2 \\ x_3 = a_3 q_1 + b_3 q_2 \end{array}\right\} \text{ .... } 6.$$

Die sechs Constanten a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 wollen wir zunächst so wählen, dass die Gleichung (4) identisch erfüllt wird, was folgende zwei Bedingungsgleichungen giebt:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 = 0 \\ m_1 b_1 + m_2 b_2 + m_3 b_3 = 0 \end{array}\right\} \text{ .... } 7.$$

Ferner wollen wir die Bestimmungen treffen, dass in dem Integral der lebendigen Kraft die Coefficienten der Quadrate der Geschwindigkeiten einzeln $= 1$ werden und der Coefficient des Products der Geschwindigkeiten verschwindet, wodurch wir noch folgende drei Bedingungen erlangen:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 + m_3 a_3^2 = 1 \\ m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2 + m_3 b_3^2 = 1 \end{array}\right\} \text{ .... } 8.$$

$$m_1 a_1 b_1 + m_2 a_2 b_2 + m_3 a_3 b_3 = 0 \text{ .... } 9.$$

Mit Hülfe dieser Bedingungsgleichungen lassen sich die neuen Variabeln leicht als Functionen der alten darstellen; man hat nur nöthig, das System Gleichungen (6.) der Reihe nach mit $m_1 a_1$, $m_2 a_2$, $m_3 a_3$ zu multipliciren und zu addiren, und es eben so mit $m_1 b_1$, $m_2 b_2$, $m_3 b_3$ zu machen und dabei auf die Gleichung (8.) Rücksicht zu nehmen Man erhält:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = m_1 a_1 x_1 + m_2 a_2 x_2 + m_3 a_3 x_3 \\ q_2 = m_1 b_1 x_1 + m_2 b_2 x_2 + m_3 b_3 x_3 \end{array}\right\} \text{ .... } 10.$$

Um nun die Differentialgleichung (2.) zu transformiren, machen wir zunächst die Bemerkung, dass aus Gleichung (5.) sich ergiebt: $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$, folglich das System (2.) in dieses übergeht:

$$\left.\begin{aligned} m_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}&=\frac{\partial u}{\partial x_1}\\ m_2\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2}&=\frac{\partial u}{\partial x_2}\\ m_3\frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2}&=\frac{\partial u}{\partial x_3}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots 11.$$

Man hat nun:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_1}&=\frac{\partial u}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial x_1}=m_1 a_1\frac{\partial u}{\partial q_1}+m_1 b_1\cdot\frac{\partial u}{\partial q_2}\Bigg|\;a_1\;\Bigg|\;b_1\\ \frac{\partial u}{\partial x_2}&=\frac{\partial u}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial q_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial x_2}=m_2 a_2\frac{\partial u}{\partial q_1}+m_2 b_2\frac{\partial u}{\partial q_2}\Bigg|\;a_2\;\Bigg|\;b_2\\ \frac{\partial u}{\partial x_3}&=\frac{\partial u}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial q_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial q_2}{\partial x_3}=m_3 a_3\frac{\partial u}{\partial q_1}+m_3 b_3\frac{\partial u}{\partial q_2}\Bigg|\;a_3\;\Bigg|\;b_3\end{aligned}$$

Multiplicirt man mit den zur Seite stehenden Factoren und addirt die drei Gleichungen jedesmal, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial q_1}&=a_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+a_3\frac{\partial u}{\partial x_3}\\ \frac{\partial u}{\partial q_2}&=b_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+b_3\frac{\partial u}{\partial x_3}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots 12.$$

Multipliciren wir also die Gleichung (11.) resp. mit a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 und addiren, so ist die Transformation vollendet und wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2}&=\frac{\partial u}{\partial q_1}\\ \frac{\partial^2 q_2}{\partial t^2}&=\frac{\partial u}{\partial q_2}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots 13.$$

wo die Ausdrücke auf der linken Seite mit Hülfe der Gleichung (10.) hergeleitet sind.

Das Integral der lebendigen Kraft finden wir bekanntlich, wenn wir die Gleichung (13.) respective mit $\frac{\partial q_1}{\partial t}$ und $\frac{\partial q_2}{\partial t}$ multipliciren und addiren. Es ist folgendes:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q_1}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q_2}{\partial t}\right)^2=u+h\ldots\ldots\ldots 14.$$

Multipliciren wir ferner von den Gleichungen (13) die erste mit q_1, die zweite mit q_2 und addiren, so ergiebt sich:

$$q_1 \frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2} + q_2 \frac{\partial^2 q_2}{\partial t^2} = q_1 \frac{\partial u}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial u}{\partial q_2} \qquad\text{.......... 15.}$$

Der Ausdruck rechts giebt, nach einem bekannten Satze über homogene Functionen, $-2u$. Bemerken wir nun, dass allgemein ist:

$$y \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (y^2)}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2,$$

transformiren darnach die linke Seite der Gleichung (15.) und drücken auf der rechten Seite u durch seinen aus Gleichung (14.) gezogenen Werth aus, so erhalten wir:

$$-\left[\left(\frac{\partial q_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_2}{\partial t}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 (q_1^2)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (q_2^2)}{\partial t^2}\right]$$
$$= -\left[\left(\frac{\partial q_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_2}{\partial t}\right)^2\right] + 2h,$$

oder nach Fortlassung der gleichen Glieder beiderseits:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 [q_1^2 + q_2^2]}{\partial t^2} = 2h,$$

woraus:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial [q_1^2 + q_2^2]}{\partial t} = 2ht + h_, \qquad\text{............ 16.}$$

und:

$$\frac{1}{2} [q_1^2 + q_2^2] = ht^2 + h_, t + h_{,,} \qquad\text{.......... 17.}$$

wo $h_,$ und $h_{,,}$ die Integrationsconstanten bezeichnen.

Das vierte noch fehlende Integral lässt sich schliesslich durch folgende, auch sonst gebräuchliche, Substitution, leicht finden. Wir setzen nämlich:

$$q_1 = r\cos\varphi, \quad q_2 = r\sin\varphi; \qquad\text{.......... 18.}$$

so wird:

$$q_1^2 + q_2^2 = r^2, \quad \partial q_1^2 + \partial q_2^2 = \partial r^2 + r^2 \partial\varphi^2.$$

In r und φ ausgedrückt nehmen die drei gefundenen Integrale (14.), (16.) und (17.) folgende Form an:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (r^2)}{\partial t} = r \frac{\partial r}{\partial t} = 2ht + h_, \qquad\text{.......... 19.}$$

$$\frac{1}{2} r^2 = ht^2 + h_, t + h_{,,} \qquad\text{............ 20.}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial r^2 + r^2 \partial \varphi^2}{\partial t^2}\right] = u + h = -\frac{1}{2r^2} f(\varphi) + h; \;\ldots\ldots\; 21.$$

wo $f(\varphi)$ die Function von φ bezeichnet, welche als Factor von $-\frac{1}{2r^2}$ erscheint, wenn man u durch r und φ ausdrückt; es ist:

$$f(\varphi) = \frac{m_1 m_2}{\{(a_1 - a_2)\cos\varphi + (b_1 - b_2)\sin\varphi\}^2} + \frac{m_2 m_3}{\{(a_2 - a_3)\cos\varphi + (b_2 - b_3)\sin\varphi\}^2}$$
$$+ \frac{m_3 m_1}{\{(a_3 - a_1)\cos\varphi + (b_3 - b_1)\sin\varphi\}^2}$$

Aus der Gleichung (21.) wollen wir jetzt alle Functionen von r eliminiren und dadurch die Variabeln t und φ separiren. Aus Gleichung (19.) und (20.) ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{l} r^2 = 2(ht^2 + h_{,}t + h_{,,}), \quad r^4 = 4(ht^2 + h_{,}t + h_{,,})^2, \\ r^2\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = (2ht + h_{,})^2 \end{array}\right\} \;\ldots\ldots\; 22.$$

Multipliciren wir jetzt Gleichung (21.) mit $2r^2$ und setzen die Werthe aus (22.) ein, so finden wir:

$$r^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + r^4\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 = -f(\varphi) + 2hr^2,$$

woraus:

$$(2ht + h_{,})^2 + 4(ht^2 + h_{,}t + h_{,,})^2 \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 = -f(\varphi) + 4h(ht^2 + h_{,}t + h_{,,})$$

und, nach Fortlassen der gleichen Terme zu beiden Seiten:

$$4(ht^2 + h_{,}t + h_{,,})^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 = 4hh_{,,} - h_{,}^2 - f(\varphi),$$

und hieraus endlich die letzte Quadratur:

$$\int \frac{\partial t}{2(ht^2 + h_{,}t + h_{,,})} = \int \frac{\partial \varphi}{\sqrt{4hh_{,,} - h_{,}^2 - f(\varphi)}} \;\ldots\ldots 23.$$

wo das Integral links leicht auszuführen ist und auf arc. tangens führt, das rechts aber ein Abelsches ist, denn die Function unter dem Wurzelzeichen führt mindestens auf den sechsten Grad, wie man sich leicht überzeugt, wenn man statt $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ die $\tang(\varphi)$ einführt.

Es ist jetzt noch übrig, die sechs Cooefficienten der Substitution zu bestimmen. Es sind dazu fünf Gleichungen zwischen denselben gegeben, man kann also über einen Cooefficienten noch willkührlich bestimmen und diese Freiheit dazu benutzen, Eliminationsgleichungen von möglichst niedrigem Grade zu erhalten. Dies habe ich auf folgendem Wege auszuführen gesucht:

Wegen der Form der Bedingungsgleichungen (8.), die dieselbe ist wie die der Gleichung eines dreiaxigen Ellipsoids, auf seine Hauptaxen bezogen, wurde ich auf den Gedanken geleitet, für die sechs Coefficienten solche Winkelfunctionen einzuführen, dass die beiden Bedingungen (8.), nämlich:

$$\Sigma ma^2 = 1, \quad \Sigma mb^2 = 1$$

identisch erfüllt und sie selbst durch die drei noch übrigen Bedingungsgleichungen bestimmt werden könnten, so dass ich also nur drei neue Unbekannte einzuführen hatte. Dies erreichte ich durch folgende Substitution:

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 = \dfrac{\cos\vartheta}{\sqrt{m_1}}, & b_1 = \dfrac{\cos\vartheta_1}{\sqrt{m_1}} \\ a_2 = \dfrac{\sin\vartheta\cos\omega}{\sqrt{m_2}}, & b_2 = \dfrac{\sin\vartheta_1\cos\omega}{\sqrt{m_2}} \\ a_3 = \dfrac{\sin\vartheta\sin\omega}{\sqrt{m_3}}, & b_3 = -\dfrac{\sin\vartheta_1\sin\omega}{\sqrt{m_3}} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots 24.$$

Diese Werthe erfüllen die Gleichungen $\Sigma ma^2 = 1$ und $\Sigma mb^2 = 1$ identisch und ϑ, ϑ_1, ω werden dann bestimmt dadurch, dass sie den drei Gleichungen:

$$\Sigma ma = 0, \quad \Sigma mb = 0, \quad \Sigma mab = 0$$

genügen müssen, die identisch mit den Gleichungen (7.) und (9.) sind. Man erhält:

$$\sqrt{m_1}\cos\vartheta + (\sqrt{m_2}\cos\omega + \sqrt{m_3}\sin\omega)\sin\vartheta = 0,$$
$$\sqrt{m_1}\cos\vartheta_1 + (\sqrt{m_2}\cos\omega - \sqrt{m_3}\sin\omega)\sin\vartheta_1 = 0.$$
$$\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos 2\omega = 0;$$

welche Gleichungen leicht folgende Form annehmen:

$$\sqrt{m_1} + (\sqrt{m_2}\cos\omega + \sqrt{m_3}\sin\omega)\operatorname{tang}\vartheta = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots 25.$$

$$\sqrt{m_1} + (\sqrt{m_2}\cos\omega - \sqrt{m_3}\sin\omega)\operatorname{tang}\vartheta_1 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots 26.$$

$$1 + \operatorname{tang}\vartheta . \operatorname{tang}\vartheta_1 . \cos 2\omega = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots 27.$$

Um zunächst ω zu bestimmen, zieht man leicht folgende Gleichung:

$$\operatorname{tang}\vartheta\operatorname{tang}\vartheta_1 = -\frac{1}{\cos 2\omega} = \frac{m_1}{m_2\cos^2\omega - m_3\sin^2\omega},$$

woraus:

$$m_1(\cos^2\omega - \sin^2\omega) + m_2\cos^2\omega - m_3\sin^2\omega = 0,$$
$$(m_1 + m_2)\cos^2\omega - (m_1 + m_3)\sin^2\omega\; 0;$$

mithin:

$$\operatorname{tang}^2\omega=\frac{m_1+m_2}{m_1+m_3}\ \ldots\ldots\ldots\ 28.$$

woraus:

$$\sin\omega=\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1+M}},\quad \cos\omega=\sqrt{\frac{m_1+m_3}{m_1+M}}\ \ldots\ldots\ldots\ 29.$$

Diese Werthe in (25.) und (26.) eingesetzt, ergeben leicht:

$$\operatorname{tang}\vartheta=-\frac{\sqrt{m_1(m_1+M)}}{\sqrt{m_2(m_1+m_3)}+\sqrt{m_3(m_1+m_2)}}=\tau,$$

$$\operatorname{tang}\vartheta_1=-\frac{\sqrt{m_1(m_1+M)}}{\sqrt{m_2(m_1+m_3)}-\sqrt{m_3(m_1+m_2)}}=\tau_1.$$

Man sieht, dass die ganze Substitution immer eine reelle ist. Entwickelt man nun noch $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta_1$, $\cos\vartheta_1$, so erhält man folgende Werthe für die sechs Substitutionscoefficienten:

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{m_1(1+\tau^2)}},$$

$$a_2=\sqrt{\frac{\tau^2(m_1+m_3)}{m_2(1+\tau^2)(m_1+M)}}$$

$$a_3=\sqrt{\frac{\tau^2(m_1+m_2)}{m_3(1+\tau^2)(m_1+M)}};$$

$$b_1=\frac{1}{\sqrt{m_1(1+\tau_1^2)}},$$

$$b_2=\sqrt{\frac{\tau_1^2(m_1+m_3)}{m_2(1+\tau_1^2)(m_1+M)}},$$

$$b_3=-\sqrt{\frac{\tau_1^2(m_1+m_2)}{m_3(1+\tau_1^2)(m_1+M)}}.$$

XXVI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Aufgaben aus „The Mathematician."

Mitgetheilt von dem Herrn Doctor August Wiegand, Oberlehrer an der Realschule zu Halle.

(Fortsetzung von XVIII.)

---

1) Sind a, b, c, d vier harmonische Strahlen, und α, β, γ die drei Winkel, welche bezüglich a und b, c und d, b und c einschliessen, so ist

$$\cos(\alpha+\gamma)\cos(\beta+\gamma)=\cos(\alpha+\beta).$$

2) Ist r der Radius des in ein Dreieck beschriebenen Kreises, und sind r_1, r_2, r_3 die Radien dreier anderer, von denen jeder zwei Dreiecksseiten und den ersteren Kreis berührt, so findet folgende Relation statt:

$$r=\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_1r_3}+\sqrt{r_2r_3}.$$

3) Sind ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4, ϱ_5, ϱ_6 die Radien der Kreise, welche in die sechs Dreiecke beschrieben sind, die entstehen, wenn man die Spitzen eines Dreiecks mit den Mittelpunkten ihrer Gegenseiten verbindet; sind ferner r_1, r_2, r_3 die Radien der drei äusseren Berührungskreise und r_4, r_5, r_6 die Radien der Kreise, welche in die Dreiecke beschrieben sind, die entstehen, wenn man die auf einander folgenden Ecken der über den Dreiecksseiten beschriebenen Quadrate verbindet, so findet folgende Relation Statt:

$$\Sigma\frac{1}{\varrho}=2\Sigma\frac{1}{r}.$$

4) Wenn ein Tetraeder, dessen sechs Kanten a, b, c, d, e, f sind, von drei Ebenen so geschnitten wird, dass jeder Schnitt einen Rhombus bildet; so findet, wenn m_1, m_2, m_3 die Seiten der Rhomben bezeichnen, folgende Relation Statt:

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}.$$

5) Wenn jede Ternion nicht anstossender Seiten eines Sechsecks einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt hat, so haben auch die Diagonalen, welche zwei gegenüberliegende Winkelspitzen verbinden, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

Ankündigung

einer neuen unter dem Titel:

Beiträge

zur

meteorologischen Optik

und

zu verwandten Wissenschaften

in zwanglosen Heften erscheinenden Zeitschrift.

Wenn auch schon in sehr alter Zeit die Lichterscheinungen in der Atmosphäre unseres Wohnorts die Aufmerksamkeit nicht bloss der Naturforscher, sondern der Menschen überhaupt, auf sich gezogen haben, und wegen des durch diese Erscheinungen uns öfters eröffneten prachtvollen Schauspiels nothwendig auf sich ziehen mussten: so gehört doch die Entstehung einer mit der Erklärung dieser Erscheinungen im weitesten Sinne sich beschäftigenden besonderen Wissenschaft unter dem Namen: „Meteorologische Optik“ einer ganz neuen Zeit an. Wenn man den Fortschritten, welche diese jedenfalls das grösste Interesse darbietende und auch in allgemein-naturwissenschaftlicher Beziehung höchst wichtige Wissenschaft bis jetzt gemacht hat, eine unbefangene Betrachtung widmet, so wird man leider zu dem Geständnisse geführt, dass noch keine der in ihren Kreis gehörenden Naturerscheinungen ihre vollständige Erklärung gefunden hat, und dass rücksichtlich der weiteren Ausbildung der Theorie, ferner rücksichtlich der Anstellung, namentlich mit scharfen Messungen verbundener Beobachtungen, an denen es noch fast gänzlich fehlt, so wie der sorgfältigen Durchführung auf die Beobachtungen, Behufs der aus denselben zu ziehenden Resultate, gegründeter Rechnungen, endlich auch rücksichtlich

der Auffindung allgemeiner Gesichtspunkte über die nahe Verbindung, in welcher die Lichterscheinungen in der Atmosphäre mit den übrigen in derselben vorgehenden Erscheinungen nothwendig stehen müssen, noch sehr Vieles zu thun übrig ist, wenn die meteorologische Optik nach und nach ihrer so sehr zu wünschenden Vollkommenheit näher geführt werden soll. Für die schnellere Förderung solcher Wissenschaften, welche noch auf einer niedrigeren Stufe der Ausbildung stehen, ganz besonders aber solcher, die der Anstellung verdienstlicher Beobachtungen und der genauen Durchführung auf dieselben zu gründender Rechnungen noch ein weites Feld der Wirksamkeit darbieten, sind aber von jeher die Journale ein sehr wichtiges und kräftiges Hülfsmittel gewesen, und ich bin daher — im reinen Interesse für die betreffende Wissenschaft und nach mehrjähriger eifriger Beschäftigung mit derselben — durch die obigen Betrachtungen zu dem Entschlusse geführt worden, den Versuch zu wagen, ein eigenes der meteorologischen Optik gewidmetes, in zwanglosen Heften herauszugebendes Journal zu gründen, durch welches ich, nach der mir selbst gestellten Aufgabe, den folgenden Anforderungen zu genügen suchen werde.

1) Durch streng wissenschaftliche, die Hülfe der Geometrie und Analysis, wo es nöthig ist, im weitesten Sinne in Anspruch nehmende Abhandlungen soll die Theorie der Lichterscheinungen in der Atmosphäre immer mehr gefördert werden.

2) Durch mehr populär und überhaupt möglichst elementar gehaltene Aufsätze soll der Versuch gemacht werden, die Theorie der verschiedenen Lichterscheinungen in der Atmosphäre einem grösseren Kreise von Lesern näher zu führen, was ich im vorliegenden Falle bei so wichtigen, fast alltäglich unseren Augen sich darbietenden prachtvollen Naturerscheinungen, namentlich in der gegenwärtigen Zeit, wo die Kenntniss der Naturwissenschaften einen递Haupttheil der allgemeinen Bildung mit Recht schon ausmacht und fernerhin gewiss immer mehr ausmachen wird, mit zu den Hauptaufgaben der neu zu begründenden Zeitschrift rechne; auch werde ich deshalb durch Mittheilung in dieser Weise gehaltener Aufsätze von dazu vorzugsweise geeigneten Gelehrten mich denselben jederzeit zu ganz besonderem Danke verpflichtet fühlen, und in dieser Beziehung auch bestimmte Verbindungen anzuknüpfen suchen.

3) Die in den beiden vorhergehenden Nummern näher bezeichneten Abhandlungen sollen theils Originalabhandlungen sein, theils in Uebersetzungen oder Bearbeitungen von im Auslande erschienenen Abhandlungen bestehen, und ich werde es mir zu einer ganz besonderen Aufgabe machen, *in letzterer Beziehung absolute Vollständigkeit zu erreichen, so dass die Zeitschrift ihren Besitzern zugleich ein vollständiges Repertorium alles Wichtigen darbietet, was im Auslande auf dem Gebiete der meteorologischen Optik erscheint oder schon erschienen ist.*

4) Ferner soll die Zeitschrift Aufsätze liefern, welche sich mit der genauen Beschreibung wichtiger Phänomene der meteorologischen Optik beschäftigen und daher schon von selbst in die Klasse der mehr populären Aufsätze gehören, weshalb denselben auch jederzeit treue Abbildungen der betreffenden Erscheinungen beigegeben werden sollen. Dabei werde ich nicht bloss neuere Phänomene berücksichtigen, sondern vielmehr bis auf die ältesten Zeiten und immer *auf die ursprünglichen Quellen*, in denen sich ältere wichtige Phänomene beschrieben finden, zurückgehen, weil ich die Bemerkung gemacht zu haben glaube, dass die neueren Beschreiber solcher älteren Phänomene, denen deshalb die höchste Wichtigkeit für alle Zeiten stets gesichert bleibt, weil dergleichen Phänomene nicht, wie z. B. die meisten astronomischen Erscheinungen, periodisch wiederkehren, sondern ein ganz besonderes Zusammentreffen günstiger Umstände erfordern, wenn sie sich in gleich prachtvoller Weise wieder zeigen sollen, sich häufig bloss abgeleiteter Quellen bei ihren Beschreibungen bedient haben, was gewiss in keiner Weise gebilligt werden kann. Daher sollen, wie gesagt, genaue *aus den ursprünglichen Quellen geschöpfte*, dabei aber zugleich möglichst populär gehaltene Beschreibungen älterer wichtiger Phänomene mit zu den Hauptaufgaben der Zeitschrift gehören, was freilich die Herbeischaffung eines grossen literarischen Apparates nöthig machen wird. Ueberhaupt soll auch die in vielen Beziehungen höchst interessante Geschichte der meteorologischen Optik ganz besonders mit in den Kreis dieser Zeitschrift gezogen werden.

5) Leider enthalten aber die bis jetzt bekannt gemachten Beschreibungen wichtiger Phänomene der meteorologischen Optik an den-

selben angestellte **genaue Messungen** fast gar nicht. Deshalb gehört es zu den dringendsten Bedürfnissen, dass solche Messungen künftig in möglichst reichem Maasse angestellt werden, und dass sich mit den nöthigen lokalen und instrumentalen Hülfsmitteln ausgerüstete geschickte Beobachter finden, welche sich diesen Beobachtungen und Messungen vorzugsweise widmen. Ja ich halte es selbst für sehr wünschenswerth, dass, wenn auch nicht eigene zu diesem Zwecke bestimmte Observatorien errichtet, doch die schon bestehenden meteorologischen Observatorien mit den zu genauen Messungen der Lichterscheinungen in der Atmosphäre erforderlichen Instrumenten ausgerüstet und die bei diesen Anstalten beschäftigten Gelehrten veranlasst werden, diesen Beobachtungen neben den übrigen meteorologischen Beobachtungen künftig ihre besondere Aufmerksamkeit und ihren besondern Fleiss zu widmen. Solche Beobachtungen werde ich, wenn man die Güte hat, sie mir mitzutheilen, ganz nach Art der vortrefflichen „**Astronomischen Nachrichten**" in meiner Zeitschrift immer schleunigst abdrucken lassen, weil ich dieselben für eins der wichtigsten Beförderungsmittel der meteorologischen Optik halte.

6) Dass nun auch ferner die Mittheilung genauer Berechnungen solcher Beobachtungen mit zu den Hauptaufgaben der Zeitschrift gehört, brauche ich wohl nicht erst noch besonders zu bemerken. Ziehen es die Beobachter nicht vor, die oft ziemlichen Zeitaufwand in Anspruch nehmende Berechnung ihrer Beobachtungen selbst auszuführen, was freilich in den meisten Fällen das Beste sein wird, so stehen mir hier hinreichende Kräfte zu Gebote, dieselben unter meiner Aufsicht ausführen zu lassen, und, wohl wissend, ein wie grosser Schatz astronomischer Beobachtungen z. B. gegenwärtig vorliegt, die auf ihre Berechnung warten, werde ich mir es zu einer besonderen Aufgabe machen, die mir eingesandten, in den Kreis der Zeitschrift fallenden Beobachtungen jederzeit so schleunig als möglich einer genauen Bearbeitung auf dem Wege der Rechnung unterwerfen zu lassen, und die Resultate in der Zeitschrift bekannt zu machen, in welcher Rücksicht ich kein Opfer scheuen werde.

7) Ein besonderes Interesse bietet ferner auch die künstliche Nachbildung der Lichterscheinungen in der Atmosphäre durch Versuche dar, welcher mit sehr anerkennungswerthem Eifer einige neuere Phy-

siker, wie z. B. **Babinet**, **Bravais**, **Brewster** und andere, denen die meteorologische Optik schon so Vieles, wohl auch ihren Namen, verdankt, ihre Bemühungen gewidmet haben. Daher werden auch diesen Gegenstand betreffende Abhandlungen, so wie Beschreibungen der dahin gehörenden und anderer zu Beobachtungen der Lichterscheinungen in der Atmosphäre erforderlicher Instrumente und dergl., in die Zeitschrift bereitwilligst aufgenommen werden.

8) Eben so sollen endlich auch besondere Abhandlungen über den Zusammenhang der Lichterscheinungen in der Atmosphäre mit den übrigen in derselben vorgehenden Erscheinungen, und über die gewiss in mehrfacher Beziehung wichtige Bedeutung der ersteren für die letzteren, so wie überhaupt Alles, was die Verbindung der meteorologischen Optik mit der Meteorologie überhaupt nur im Entferntesten berührt und zur Erweiterung einer dieser Wissenschaften beitragen kann, in den Kreis der Zeitschrift, der absichtlich so viel als möglich zu erweitern gesucht worden ist, gezogen werden, um in derselben Alles zu vereinigen, was für die meteorologische Optik von Wichtigkeit sein kann, und das Zurückgehen auf andere Werke in den meisten Fällen ganz unnöthig zu machen, so weit wenigstens meine Kräfte reichen werden, um dieser jedenfalls sehr schwierigen Aufgabe genügend zu entsprechen.

Vielleicht könnte es auffallend erscheinen, dass diese in zwanglosen Heften erscheinen sollende Zeitschrift nicht einen der gewöhnlichen Titel, wie Journal, Archiv, Annalen u. s. w., sondern den Titel: „**Beiträge zur meteorologischen Optik und zu verwandten Wissenschaften**" erhalten hat. Dies ist aber absichtlich und mit gutem Vorbedacht geschehen. Wie lange nämlich dieses Unternehmen, so sehr ich auch entschlossen bin, Alles aufzubieten, um dasselbe in jeder Beziehung möglichst zu fördern, Bestand haben wird, lässt sich für jetzt noch gar nicht voraussehen, und ich selbst hege in dieser Beziehung desto mehr einige Zweifel, je weniger ich mir die mit der Herausgabe nothwendig verbundenen Schwierigkeiten verhehlen darf. Deshalb habe ich den mehr als irgend ein anderer jeden beliebigen Abschluss gestattenden Titel: „**Beiträge zur meteorologischen Optik**" gewählt, wenn auch in der That das Werk ganz den Charakter einer in zwanglosen Heften erscheinenden Zeitschrift haben soll. Den Zusatz: „**und zu verwandten Wissenschaften**" hat aber

der Titel deshalb erhalten, weil ich mir dadurch die Freiheit sichern wollte, den Kreis der Zeitschrift im Interesse der Leser noch mehr zu erweitern und noch mehr Gegenstände, welche meistens nach allen vier Winden hin zerstreuet werden, an einem und demselben Orte zu concentriren. Zu näherer Erläuterung des erwähnten Zusatzes bemerke ich, dass ich in den Kreis der Zeitschrift, in theoretischer und praktischer Rücksicht, auch Erscheinungen wie z. B. das Nordlicht, das noch fast mit einem ganz undurchdringlichen Dunkel umhüllte Zodiacallicht, selbst auch, wenigstens zum Theil, die Sternschnuppen u. dgl., ferner die für die Theorie der Höfe so höchst wichtige Krystallisation des Eises u. s. w. zu ziehen beabsichtige, und daher auch Mittheilungen über alle diese Gegenstände gern einen Platz in den Beiträgen einräumen werde. Mit Rücksicht auf diese Erklärung bitte ich nur, den Zusatz: „und zu verwandten Wissenschaften" nicht in zu strengem Sinne zu nehmen, sondern mir im Interesse der Sache eine möglichst weite Ausdehnung desselben zu gestatten.

Originalabhandlungen, welche mir in deutscher, lateinischer, französischer, englischer und italienischer Sprache mitgetheilt werden, erscheinen in der Regel, wenn nicht besondere Umstände eine Uebersetzung nöthig oder wünschenswerth machen, in derselben Sprache, in welcher sie mir mitgetheilt werden. Bei in andern Sprachen mir eingesandten Originalabhandlungen werde ich für treue Uebersetzungen, nach Beschaffenheit der Umstände in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache, Sorge tragen, und nur diese Uebersetzungen den Beiträgen einverleiben. Für die scandinavische Literatur wird es mir in dieser Beziehung besonders am hiesigen Orte nicht an hinreichender Unterstützung fehlen, weshalb ich auch namentlich die scandinavischen Naturforscher zu Beiträgen und zur Einsendung betreffender Schriften auffordere.

Welche Erscheinungen in's Gebiet der eigentlichen meteorologischen Optik gehören, darf ich zwar als bekannt voraussetzen; ich werde mich jedoch bemühen, so bald als möglich über den Umfang dieser Wissenschaft und die Umstände, auf welche die Aufmerksamkeit zu richten besonders wünschenswerth sein möchte, eine besondere Abhandlung zu liefern, wünsche aber sehr, dass sich dieser in methodischer und allgemein-wissenschaftlicher Rücksicht höchst wichtigen

Arbeit ein dazu mehr als ich selbst geeigneter Gelehrter unterziehen möchte; sollte der Zeitschrift dazu ein Arago oder Alexander von Humboldt im Interesse der Wissenschaft seine Feder zu leihen geneigt sein, so würde einer meiner grössten Wünsche erfüllt werden und die Beiträge eine ihrer grössten Zierden erhalten. Da aus den angeführten Gründen eine solche mehr allgemein-wissenschaftliche Abhandlung über den Umfang und die Bedeutung unserer Wissenschaft erst späterhin zu liefern möglich sein wird *), so hat der Herausgeber das erste Heft mit einer ausführlichen geometrisch-analytischen Abhandlung über den Regenbogen begonnen, um dadurch zugleich den, ohne populär gehaltene Aufsätze auszuschliessen, doch im Allgemeinen streng wissenschaftlichen Charakter der Beiträge anzudeuten, und hat in dieser Abhandlung den Versuch gemacht, die Theorie der genannten prachtvollen Erscheinung, ohne sich jedoch für jetzt absichtlich viel auf die neuere Theorie des Lichts, die späterhin weitere Berücksichtigung finden wird, einzulassen, so weit zu führen, als dies bei dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft überhaupt möglich sein dürfte; sehr fühlbar ist ihm aber schon bei dieser Untersuchung der fast gänzliche Mangel genauer und mit der nöthigen Vollständigkeit angestellter Messungen gewesen, weshalb er sich gleich hier erlaubt, die Leser der Beiträge zu solchen Messungen, und zu deren Einsendung zur Bekanntmachung in den Beiträgen dringend aufzufordern.

Die mir für die Beiträge zu machenden Mittheilungen bitte ich in der Regel unter meiner Adresse, mit der auf dem Couvert zu machenden Bemerkung: Für die Beiträge zur meteorologischen Optik, auf dem Wege des Buchhandels an die löbliche Schwickert'sche Buchhandlung in Leipzig zu schicken, durch

---

*) Vorläufig vergleiche man in dem Repertoire d'Optique moderne ou Analyse complète des travaux modernes relatifs aux phenomènes de la lumière; par etc. l'Abbé Moigno. Première Partie. Paris. 1847. die **Troisième section.** Résumé d'Optique météorologique. p. 290 — p. 321. Nur bemerke ich hierzu, dass die astronomische und terrestrische Refraction natürlich auch in's Gebiet der meteorologischen Optik gehört, und daher in dieser Zeitschrift auch ganz besonders berücksichtigt werden wird.

welche sie dann schon so schleunig und sicher als möglich weiter an mich gelangen werden; Gelehrte, denen Greifswald näher als Leipzig ist, können indess solche Mittheilungen auch direct an mich schicken, entweder auf dem Wege des Buchhandels, oder in dringenden Fällen auch durch die Post.

Hiermit empfehle ich, zu reichlichen Beiträgen die Gelehrten aller Länder auffordernd, diese neue Zeitschrift der wohlwollenden und nachsichtigen Aufnahme von Seiten des betreffenden Publikums; nur erst nach dem Erscheinen einiger Hefte wird, wenn ich auch Alles, was in meinen Kräften steht, thun werde, um dem vorgesteckten Ziele baldigst möglichst nahe zu kommen, sich über den Gehalt und die eigendliche Tendenz der Zeitschrift ein sicheres Urtheil fällen lassen, weshalb ich für die ersten Hefte die Nachsicht des Publikums besonders in Anspruch nehmen muss.

Greifswald, im April 1848.

J. A. Grunert.

Zu dem Vorstehenden erlaubt sich der Verleger noch hinzuzufügen, dass die Beiträge zur meteorologischen Optik in zwanglosen Heften erscheinen werden, von denen vier einen Band bilden. Der Preis eines Bandes von 30 Druckbogen mit den dazu gehörigen Abbildungen wird den Betrag von 3 Thlr. nicht übersteigen. Das zweite Heft befindet sich unter der Presse und wird baldigst nachfolgen.

Leipzig, im Mai 1848.

E. B. Schwickert.

Druck von C. P. Melzer in Leipzig.

XXVII.

Ueber Asymptotenchorden.

Von

Herrn O. Bermann,

Candidaten des höheren Schulamts zu Coblenz.

---

§. 1. Zieht man von der allgemeinen Kegelschnitts-Gleichung

$$(1)\qquad y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon=0$$

$$(2)\qquad y^2+2\alpha xy+\beta x^2=0,$$

die Gleichung eines Systemes zweier den Asymptoten paralleler und sich im Anfangspunkte schneidender Graden, ab, so bleibt

$$(3)\qquad \gamma y+\delta x+\tfrac{1}{2}\varepsilon=0$$

für diejenige Grade, welche die Durchschnittspunkte dieses Systems mit dem Kegelschnitte unter sich verbindet und die, da die Gleichung der Berührungschorde des Anfangspunktes (oder der Polaren, die den Anfangspunkt zum Pole hat) $\gamma y+\delta x+\varepsilon=0$ ist, dieser in der halben Entfernung von ihrem Pole parallel sein wird. Obgleich daher im eigentlichen Sinne bloss bei der Hyperbel von einer Asymptotenchorde die Rede sein könnte, werden wir dennoch die unter (3) dargestellte Grade, welche sich nach dem zuletzt Gesagten für jeden Kegelschnitt leicht construiren lässt, unter diesem Namen allgemein betrachten.

Eliminirt man eine der Variabeln zwischen (1) und (2), so ergeben sich als Coordinaten der Durchschnittspunkte:

$$x=\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{\gamma(\alpha\mp\sqrt{\alpha^2-\beta})-\delta},\qquad y=\frac{\frac{1}{2}(\pm\sqrt{\alpha^2-\beta}-\alpha)\varepsilon}{\gamma(\alpha\mp\sqrt{\alpha^2-\beta})-\delta};$$

welche Werthe für die Hyperbel, wo $\alpha^2-\beta>0$, reell, für die Ellipse, wo $\alpha^2-\beta<0$, imaginär, für die Parabel eindeutig sind.

Bei der Ellipse ist die Asymptotenchorde die Halbirungslinie des Tangentenpaares eines beliebigen Poles, und daher beim Kreise mit der Chordalen des letzteren identisch. Bei der Parabel, deren Asymptoten in unendlicher Entfernung der Axe parallel sind, fällt das System (2) in einen einzigen Durchmesser zusammen, wie auch die Gleichung desselben zeigt, indem sie, da $\alpha^2=\beta$, in $(y+\alpha x)^2=0$ übergeht: die Asymptotenchorde ist bei ihr also die Tangente im Durchschnittspunkte jenes Durchmessers*), woraus, da sie die Entfernung zwischen Pol und Berührungschorde, also auch das zugehörige Tangentenpaar halbirt, der Satz (in Hr. Prof. Plücker's „Analytischen Entwickelungen" §. 269.) folgt:

„Zieht man von einem Punkte in der Ebene einer Parabel Tangenten an dieselbe und legt durch denselben Punkt einen Durchmesser, so ist die Berührungschorde parallel der Tangente im Scheitel des Durchmessers und also auch den zugeordneten Ordinaten desselben. Das zwischen dem beliebigen Punkte und der Berührungschorde liegende Stück des Durchmessers wird im Durchschnitte mit der Curve halbirt."

§. 2. Haben Kegelschnitte dieselben γ und ε, so schneiden sie sich in zwei festen Punkten der Ordinatenaxe oder berühren sie, wenn $\gamma^2-\varepsilon=0$, in einem festen Punkte. Aus Gleichung (3) folgt, dass in diesem Falle sich auch die Asymptotenchorden in einem festen Punkte derselben Axe schneiden, dessen Coordinaten $x=0$, $y=\frac{-\frac{1}{2}\varepsilon}{\gamma}$ oder für den Berührungsfall $x=0$, $y=-\frac{1}{2}\gamma$ sind. Mit andern Worten:

(I) „Die Asymptotenchorden aller durch zwei feste Punkte gehender Kegelschnitte schneiden sich für einen Pol, welcher auf der durch diese Punkte bestimmten Graden liegt, in einem festen Punkte derselben."

Für γ oder $\delta=0$ wird die Gleichung der Asymptotenchorde $x=\frac{-\frac{1}{2}\varepsilon}{\delta}$, resp. $y=\frac{-\frac{1}{2}\varepsilon}{\gamma}$. Deuten wir dieses geometrisch, so erhalten wir, da für $\gamma=0$ die Ordinatenaxe, für $\delta=0$ die Abscissenaxe die Curve in zwei nach entgegengesetzten Richtungen gleich weit vom Anfangspunkte abstehenden Punkten schneidet, auf Hyperbeln angewendet, den Satz:

„Zieht man zu Punkten desselben Durchmessers einer Hyperbel als Polen die Asymptotenchorden, so sind dieselben dem zugeordneten Durchmesser parallel."

---

*) Die Coordinaten dieses Punktes sind:

$$x=\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{\alpha\gamma-\delta},\quad y=\frac{-\frac{1}{2}\alpha\varepsilon}{\alpha\gamma-\delta}$$

Schneiden sich Kegelschnitt in vier festen Punkten, so lassen sie sich durch $\Omega + \mu\Omega_1 = 0$ darstellen, wo μ eine beliebige Constante, $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$ die Gleichungen zweier Kegelschnitte bezeichnen. Nehmen wir für $\Omega = 0$ die allgemeine Gleichung (I) und accentuiren zur Unterscheidung die Constanten von $\Omega_1 = 0$, so sind die Asymptotenchorden dieser Kegelschnitte für den Anfangspunkt als Pol durch

$$\text{(II)} \quad y + \frac{\delta + \mu\delta'}{\gamma + \mu\gamma'} x + \tfrac{1}{2} \frac{\varepsilon + \mu\varepsilon'}{\gamma + \mu\gamma'} = 0$$

oder

$$(\gamma y + \delta x + \tfrac{1}{2}\varepsilon) + \mu(\gamma' y + \delta' x + \tfrac{1}{2}\varepsilon') = 0$$

ausgedrückt, schneiden sich demnach alle in demselben Punkte, dessen Coordinaten sich als Durchschnitt der beiden Asymptotenchorden von $\Omega = 0$ und $\Omega_1 = 0$ ergeben:

$$x = \tfrac{1}{2} \frac{\gamma'\varepsilon - \gamma\varepsilon'}{\gamma'\delta - \gamma\delta'}, \quad y = \tfrac{1}{2} \frac{\delta'\varepsilon - \delta\varepsilon'}{\gamma'\delta - \gamma\delta'}$$

(cfr. „Entwickelungen" §. 380.).

Dasselbe gilt natürlich von den zugehörigen Berührungschorden: die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes sind doppelt so gross.

Sind γ und δ oder γ' und $\delta' = 0$, so werden diese Coordinaten unendlich, d. h.

(III) „Liegt der Pol im Mittelpunkte einer der durch vier feste Punkte gehenden Kegelschnitte, so sind die Asymptotenchorden einander parallel."

Ist $\varepsilon = \varepsilon' = 0$, d. h. wählt man zum Pole einen der vier festen Punkte selbst, so reduciren sich obige Coordinaten auf $x = 0$, $y = 0$, d. h. der fragliche Punkt ist selbst Durchschnittspunkt der Asymptotenchorden (und der Berührungschorden), wie auch daraus erhellt, dass, wenn der Pol auf der Curve selbst liegt, diese Linien sich auf die Tangente in demselben Punkte reduciren. Hieraus geht zugleich hervor, dass, wenn man den Pol in einem der durch vier feste Punkte gehenden Kegelschnitte verschiebt, jene Durchschnittspunkte sich mit den zugehörigen Tangenten und in einer gleichfalls durch die vier Punkte gehenden Curve bewegen.

Wählt man zwei durch dieselben vier Punkte gehende Grade, was auf dreifache Weise geschehen kann, zu Axen, in welchem Falle man also bloss $\mu xy = 0$ zur Gleichung (I) zu addiren hat, um alle möglichen durch diese vier Punkte gehenden Kegelschnitte darzustellen, so unterscheiden sich letztere (cfr. „Entwickelungen" §. 264.) bloss durch das veränderliche α und haben demnach auch

(IV) eine und dieselbe Asymptoten- und Berührungschorde des Anfangspunktes, d. h. eines der drei Durchschnittspunkte jener sechs Graden als Poles.

Hierauf gründet sich die folgende einfache Construction einer gemeinschaftlichen Tangente an zwei sich in vier Punkten schneidende Parabeln: Vom Durchschnittspunkte zweier durch dieselben vier Punkte gehender Graden aus ziehe man für jede der beiden Parabeln einen Durchmesser. Die Verbindungslinie der Punkte, wo diese Durchmesser die zugehörigen Parabeln schneiden, ist die zu construirende gemeinschaftliche Tangente.

Addirt man zu der allgemeinen Gleichung (1) die eines Systemes von zwei durch den Anfangspunkt gehenden Graden

$$my^2+2nxy+px^2=0,$$

so bleibt die Gleichung der Asymptoten- und Berührungschorden ungeändert. Das vorhin Gesagte erweitert sich also zum folgenden Satze:

(V) „Zieht man von einem beliebigen Punkte aus Secanten eines Kegelschnittes, so haben alle durch vier Durchschnittspunkte, wovon je zwei auf derselben Secante liegen, gehende Kegelschnitte eine und dieselbe Asymptotenchorde (und Berührungschorde) in Bezug auf jenen Punkt als Pol.“

(VI) Aehnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte haben dieselben α und β; zieht man die Gleichungen zweier derselben von einander ab, so ist leicht ersichtlich, dass die resultirende gemeinschaftliche Chordale immer durch den Durchschnitt zweier Asymptotenchorden dieser Kegelschnitte für einen beliebigen Pol gehen muss. Zwei Pole bestimmen demnach die Chordale. Sie ist für solche Paare ähnlicher Kegelschnitte der geometrische Ort der Durchschnittspunkte der Asymptotenchorden ganz beliebiger Pole. Für die Parabel z. B. giebt dies den Satz:

„Hat man zwei sich schneidende Parabeln, deren Axen parallel sind, und zieht von einem beliebigen Punkte aus zu diesen eine dritte Parabel, so vereinigen sich die in den Punkten, wo sie die beiden Curven trifft, an letztere gezogenen Tangenten auf dem gemeinschaftlichen Durchmesser beider Parabeln.“

§. 3. Das im vorigen Paragraphen Gesagte lässt sich auf Systeme zweier Graden, indem wir solche ebenfalls als Kegelschnitte in der allgemeinen Gleichung (1) einbegriffen denken können, unmittelbar übertragen, was der eigentliche Gegenstand dieser Abhandlung ist.

Ein solches System

$$(y+a_1x-y_1)(y+a_2x-y_2)\,^{*)}\equiv$$
$$y^2+(a_1+a_2)xy+a_1a_2x^2-(y_1+y_2)y-(a_1y_2+a_2y_1)x+y_1y_2=0$$

---

*) y_1 und y_2 bezeichnen offenbar die Segmente, welche diese Geraden von der Ordinatenaxe abschneiden.

hat zur Asymptotenchorde des Anfangspunktes

$$(4)\qquad y-\frac{a_1y_2+a_2y_1}{y_1+y_2}\,x+\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=0,$$

eine Grade, welche sowohl durch den Durchschnitt der Linien $y+a_2x-y_2=0$ und $y+a_1x=0$, als auch der Linien $y+a_1x-y_1=0$, $y+a_2x=0$ geht. Deuten wir dies geometrisch, so sehen wir dass sich die Asymptotenchorde eines Systemes zweier Geraden für einen beliebigen Pol (Taf. VIII. Fig. 1.) als die Verbindingungslinie pq derjenigen Punkte ergiebt, wo die von diesem Pole der beiden Graden des Systemes parallel gezogenen Linien diese selbst schneiden. Sind daher für die beiden Graden als Coordinatenaxen die Coordinaten des Poles x_0, y_0, so ist die Gleichung der Asymptotenchorde, als einer Diagonale des Coordinatenparallelogramms,

$$(5)\qquad \frac{y}{y_0}+\frac{x}{x_0}=1,$$

die der zugehörigen Berührungschorde $y=\frac{-y_0}{x_0}x$, so dass diese eine der ersteren im Anfangspunkte parallele Linie ist. — Für $x=0$ gibt Gleichung (4) $y=\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}$, einen von a unabhängigen Werth, der für constante y_1 und y_2 constant ist. Hieraus ergibt sich das im folgenden Paragraphen weiter Entwickelte, die Uebertragung von (I) des vorigen Paragraphen. Sind die beiden Graden einander parallel, so seien ihre Gleichungen $y=y_1$, $y=y_2$; die Asymptotenchorde des Anfangspunktes hat dann die Gleichung $y=\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}$ und ist daher eine Parallele zu denselben. In der Figur (Taf. VIII. Fig. 2.) sind AB, CD die primitiven Graden des Systems, P ist der Pol, ST die Asymptotenchorde, und man hat die Proportion $Pm:mn=Pq:Pn$. Ist $y_2=ny_1$, so erhält man $y=\frac{n}{n+1}y_1$. Für $n=-1$, in welchem Falle der Pol in der Mitte zwischen den beiden Parallelen des Systemes liegt, existirt keine Asymptotenchorde; für $n=+1$ oder $y_1=y_2$, wo also beide in eine einzige Linie zusammenfallen, halbirt die Asymptotenchorde die Entfernung derselben vom Pole.

§. 4. Die Uebertragung des Hauptsatzes (I) in §. 2. auf gerade Linien gibt das Folgende:

„Schneiden sich Systeme zweier Graden in zwei festen Punkten, so schneiden sich auch ihre Asymptotenchorden in Bezug auf einen beliebigen Punkt derjenigen Graden, welche durch jene beiden Punkte bestimmt ist, auf derselben Graden in einem festen Punkte"

oder:

„Errichtet man auf einer und derselben Basis (AB) (Taf. VIII. Fig. 4.) beliebige Dreiecke, nimmt in derselben oder deren Ver-

längerung einen Punkt (P) an, von dem aus man mit den beiden übrigen Seiten der Dreiecke Parallelogramme bildet, so schneiden sich diejenigen Diagonalen derselben, welche nicht durch P gehen, in einem festen Punkte (p) der Basis."

Als Coordinaten dieses Durchschnittspunktes ergeben sich, wenn man die gemeinschaftliche Basis als Ordinatenaxe annimmt, nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$x=0, \; y=\frac{y_1 y_2}{y_1+y_2};$$

was auch dann noch gültig ist, wenn die beiden Graden, statt mit der Basis ein Dreieck zu bilden, einander parallel sind.

Dies giebt ein Mittel an die Hand, die Asymptotenchorde zweier Parallelen für einen beliebigen Pol zu construiren:

Man lege (Taf. VIII. Fig. 3.) durch letzteren eine die beiden Parallelen schneidende Grade, ziehe durch die beiden Durchschnittspunkte n und q zwei beliebige sich schneidende Linien und construire die Asymptotenchorde des Systemes derselben für den gegebenen Pol P. Durch ihren Durchschnitt m mit der zuerst gezogenen Graden ziehe man eine den beiden gegebenen parallele Linie, welche die gesuchte ist.

Denkt man sich auf derselben Basis Paare von Dreiecken so, dass eine Seite des einen die Verlängerung einer Seite des andern ist, so erhält man den folgenden Satz:

„Hat man beliebige Dreiecke (Taf. VIII. Fig. 5.), die eine gemeinschaftliche Winkelspitze haben und deren Grundlinien durch einen festen Punkt gehen, so werden die Diagonalen aller der Paare von Parallelogrammen, welche man auf die Weise erhält, dass man von einem Punkte derjenigen Linie aus, welche die gemeinschaftliche Winkelspitze (B) mit dem festen Punkte (A) verbindet, Parallelen zu den Seiten jener Dreiecke zieht, durch einen festen Punkt (p) gehen, welcher auf derselben Linie (AB) liegt."

Fallen auch die Grundlinien dieser Dreiecke (der Richtung nach) in einander, so reducirt sich dieser Satz auf den folgenden:

„Zieht man durch den Scheitel (B) (Taf. VIII. Fig. 6.) eines Dreiecks (ABC) beliebige Linien und ihnen parallele durch einen willkührlich angenommenen Punkt (P), so werden die Diagonalen der von diesen Linien einerseits, von der Basis und einer ihr durch jenen Punkt parallel gezogenen Linie andrerseits gebildeten Parallelogramme alle durch einen und denselben Punkt gehen, welcher mit P und dem Scheitel des Dreiecks in derselben Geraden liegt."

Beschränkt man diesen Satz auf die Seiten des ersteren Dreiecks, so folgt:

„Zieht man (Taf. VIII. Fig. 7.) von einem beliebigen Punkte aus Parallelen zu den drei Seiten eines Dreiecks, so bilden die Diagonalen der dadurch entstehenden Parallelogramme ein neues Dreieck, dessen Winkelspitzen auf denjenigen Graden liegen.

welche die drei Winkelspitzen des primitiven Dreiecks mit jenem willkührlich angenommenen Punkte (P) verbinden"

oder

„Zieht man aus einem Punkte einer der parallelen Seiten eines Paralleltrapezes Parallelen zu den beiden andern Seiten, so liegen der Durchschnittspunkt beider letztern, der Diagonalen der entstehenden zwei Parallelogramme und der gegebene Punkt in gerader Linie."

Folgendes ist der analytische Beweis desselben Satzes:

Die Gleichungen der drei Seiten seien:

$$\text{für } AB: x-a=0,$$
$$AC: y-b=0,$$
$$BC: y-mx-n=0;$$

dann sind die der Systeme

$$AB \text{ und } AC: (x-a)(y-b) \equiv xy-ay-bx+ab=0,$$
$$AB \text{ und } BC: (x-a)(y-mx-n) \equiv mx^2-xy+ay+(n-am)x-an=0,$$
$$AC \text{ und } BC: (y-b)(y-mx-n) \equiv y^2-mxy-(b+n)y+bmx+bn=0;$$

mithin die ihrer Asymptotenchorden:

$$(1)\quad \frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1,$$

$$(2)\quad \frac{y}{n}+\frac{x}{\frac{an}{n-am}}=1,$$

$$(3)\quad \frac{y}{\frac{bn}{b+n}}-\frac{x}{\frac{n}{m}}=1.$$

Coordinaten von

$$A: x=a,\ y=b;$$
$$B: x=a,\ y=ma+n;$$
$$C: x=\frac{b-n}{m},\ y=b:$$

also Gl. von

$$PA: (\mathrm{I})\quad y-\frac{b}{a}x=0,$$

$$PB: (\mathrm{II})\quad y-\frac{am+n}{a}x=0,$$

$$PC: (\mathrm{III})\quad y-\frac{bm}{b-n}x=0.$$

Subtrahirt man nun Gleichung (I) von (2), so resultirt (III),

„ „ „ „ (1) „ (3), „ (II),

„ „ „ „ (2) „ (3), „ (I);

woraus das zu Beweisende folgt.

Denkt man sich auf derselben Basis Paare von congruenten, in entgegengesetzter Richtung liegenden Dreiecken, so ergibt sich der Satz:

„Hat man beliebige Parallelogramme, die eine gemeinschaftliche Diagonale haben, und denkt sich von einem beliebigen Punkte der letzteren Parallelen zu den Seiten jener gezogen, so entstehen Parallelogramme, die in vier kleinere getheilt sind, und es schneiden sich die Diagonalen der entstehenden kleineren Parallelogramme, sowohl derjenigen, die von zwei Seiten und zwei Theilungslinien, als auch derjenigen, die von drei Seiten und einer Theilungslinie eingeschlossen sind, auf einem und demselben Punkte der gemeinschaftlichen Diagonale."

In Taf. VIII. Fig. 8. ist dieser Satz für ein einzelnes Parallelogramm dargestellt: im ersten Falle liegt der Durchschnittspunkt in der Verlängerung der Diagonale, im zweiten innerhalb des Parallelogrammes. (*P* bedeutet in beiden Fällen den Pol, *ABCD* das von den beiden Systemen, von denen wir ursprünglich ausgingen, gebildete Parallelogramm).

Die zweite, in §. 2. folgende, die Hyperbel betreffende Aussage gibt in ihrer Uebertragung, da einer Hyperbel ein System zweier sich schneidenden Graden entspricht, den Satz, dass die Diagonalen eines Parallelogrammes sich gegenseitig halbiren.

§. 5. Durch vier Punkte lassen sich drei Systeme von Linienpaaren die Seiten und Diagonalen eines Vierecks (mit concaven Winkeln) legen. In Bezug auf einen beliebigen Punkt (*P*) (Taf. VIII. Fig. 9.) als Pol schneiden sich also die drei Asymptotenchorden dieser Systeme in einem einzigen Punkte (*p*)*). Da, wenn der Pol in einer der Graden eines Systems liegt, die Asymptotenchorde des letzteren mit dieser Graden selbst zusammenfällt, wie auch aus Gleichung (5) erhellt, indem diese für $x_0=0$ oder $y_0=0$ in $x=0$, resp. $y=0$ übergeht, so müssen in unserem Falle (Taf. VIII. Fig. 10.), wenn der Pol in einer Seite oder Diagonale des Vierecks liegt, auch die beiden andern Asymptotenchorden sich in derselben schneiden. Liegt endlich der Po in einem der Durchschnittspunkte der Diagonalen oder der gegenüberstehenden Seiten, so haben die drei Systeme eine einzige gemeinschaftliche Asymptotenchorde. Wählt man z. B. den Durchschnittspunkt der Diagonalen zum Pol, so hat man den Satz:

---

*) Vier einander in vier Punkten schneidende Grade lassen sich auf dreifache Weise zu zwei combiniren, so dass man also, wenn man jedesmal die Diagonalen zieht, für einen und denselben Pol drei verschiedene Durchschnittspunkte der Asymptotenchorden erhält.

„Zieht man (Taf. IX. Fig. 11.) vom Durchschnittspunkte der Diagonalen eines Vierecks aus Parallellinien zu den Seiten derselben Figur, so schneiden sie die Verlängerungen der Seiten in vier Punkten, die in gerader Linie liegen.“

Man hat also dreimal vier in gerader Linie liegende Punkte.

Ist das Viereck ein Paralleltrapez, so muss jede dieser drei gemeinschaftlichen Asymptotenchorden eine dritte Parallele sein. Also hat man den Satz:

„Zieht man (Taf. IX. Fig. 12.) vom Durchschnittspunkte der Diagonalen eines Paralleltrapezes aus zwei Parallelen zu den beiden einander nicht parallelen Seiten der Figur, so schneiden sie die Verlängerungen dieser Seiten in zwei Punkten, deren Verbindungslinie eine dritte Parallele zu den beiden der Figur ist.“

Es gründet sich hierauf auch eine zweite Construction der Asymptotenchorde eines Systems zweier Parallelen für einen gegebenen Pol:

Seien nämlich AB und CD die beiden Parallelen, P der gegebene Pol, der zwischen denselben oder ausserhalb liegen kann, so ziehe man von ihm aus zwei beliebige Linien, verbinde die Punkte, worin sie das System schneiden, mit einander und ziehe von dem Durchschnittspunkte dieser Verbindungslinien aus zwei Parallelen zu den durch P gehenden Graden. Die Diagonale des auf diese Weise entstandenen Parallelogramms ist die gesuchte Asymptotenchorde.

Bei einem Parallelogramme lässt sich keine solche denken, indem dann der Durchschnittspunkt der Diagonale in die Mitte zwischen zwei Parallellinien fällt, also der Ausnahmefall eintritt.

§. 6. Es ergibt sich aus dem Vorhergehenden folgende Tangentenconstruction an einen Kegelschnitt in einem gegebenen Punkte:

Man nehme auf der Curve vier Punkte an, lege durch dieselben zwei Systeme von Graden und ziehe zum gegebenen Tangentialpunkte als Pol die Asymptotenchorden derselben. Die Verbindungslinie ihres Durchschnittspunktes mit dem gegebenen Punkte ist die gesuchte Tangente.

Denken wir uns einen von zwei Parallellinien durchsetzten Kegelschnitt, so werden für den Punkt, wo sich die durch ihre Intersectionen gezogenen Sehnen schneiden, als Pol der Kegelschnitt und dieses System eine und dieselbe Asymptotenchorde haben. Nähern sich die beiden Parallelen einander, so nähert sich auch eines der erwähnten Secantenpaare immer mehr Tangenten des Kegelschnittes. Fallen sie endlich zusammen, so geht jenes System in eine einzige Grade, die Berührungschorde, über; dann muss nach §. 3. (Schluss) die Asymptotenchorde eine derselben in der halben Entfernung vom Pole parallele Linie sein. Weil aber dieselbe jetzt auch Asymptotenchorde des Kegelschnittes ist, so folgt hieraus das im Anfange der Abhandlung aus der Gleichung Gedeutete, dass sie bei jedem Kegelschnitte der Berührungschorde in der halben Entfernung vom Pole parallel ist.

Aus dem Satze (III) des §. 2. ergibt sich, wenn wir ihn auf einen Kreis und Systeme von Geraden anwenden:

„Zieht man (Taf. IX. Fig. 13. I.) vom Mittelpunkte eines Kreises als Pol die Asymptotenchorden zu den Seiten und Diagonalen eines in denselben beschriebenen Vierecks, so laufen diese einander parallel."

Geht eine Diagonale durch den Mittelpunkt, so sind die beiden übrigen Asymptotenchorden diesem Durchmesser parallel.

Ist das Viereck (wie in Taf. IX. Fig. 13. II.) ein Paralleltrapez, so sind diese Asymptotenchorden den beiden parallelen Seiten desselben parallel.

Bei einer oder zwei Seiten des Vierecks kann man statt der Sehnen auch Tangenten an den Kreis nehmen, wodurch sich der Satz modificirt.

§. 7. Der Hauptsatz (V) des §. 2. lässt sich ebenfalls unmittelbar auf grade Linien übertragen und lautet in dieser Uebertragung folgendermassen:

Legt man (Taf. IX. Fig. 14.) durch zwei Grade beliebig viele sich in einem Punkte, dem Pole P, schneidende Linien, so werden, wenn man die Diagonalen der entstehenden Vierecke bis zu ihrem Durchschnitte mit denjenigen Linien verlängert, welche man vom Pole aus den zusammengehörigen Diagonalen parallel gezogen hat, alle diese Durchschnittspunkte auf einer und derselben Graden, der gemeinschaftlichen Asymptotenchorde, liegen, die, im Falle der Parallelität jener beiden Linien eine dritte Parallele ist und sich überhaupt in jedem Falle unmittelbar a priori als Asymptotenchorde des gegebenen Systemes selbst construiren lässt. Da unter diesen Verhältnissen auch die Polare aller auf Systeme gerader Linien reducirter Kegelschnitte eine und dieselbe Grade und in unserer Figur nichts anders ist, als die durch den Durchschnitt der beiden Graden des gegebenen Systems der Asymptotenchorde parallel gezogene Linie, welche nach dem Früheren alle Durchschnittspunkte der Diagonalen unter sich enthalten muss, so haben wir folgende Sätze:

1) Zieht man von einem Punkte aus Secanten durch zwei Gerade, so liegen die Durchschnittspunkte der Diagonalen der entstehenden Vierecke auf einer und derselben Geraden. Sind jene zwei parallel, so ist es auch diese.

2) Zieht man (Taf. IX. Fig. 15.) von einem innerhalb eines Winkels liegenden Punkte (P) aus beliebige Linien, wovon also je zwei die Schenkel in vier Punkten treffen, so liegen die Durchschnittspunkte der Verbindungslinien dieser letzteren auf einer und derselben, durch die Winkelspitze gehenden Geraden (Cn), welche parallel der Diagonale des von den Schenkeln und dem Punkte P als viertem Eckpunkte gebildeten Parallelogrammes ist.

3) Zieht man (Taf. IX. Fig. 16.) von einem willkührlichen Punkte aus nach einer festen Linie (AB) beliebige Gerade und vervollständigt die dadurch entstehenden Dreiecke zu Parallelogrammen, so liegen die vierten Winkelspitzen derselben in einer Geraden (mn), welche der gegebenen (AB) parallel ist.

Aus dem in (VI) §. 2. von ähnlichen Kegelschnitten Gesagten folgt, da man Systeme von Parallellinien mit Hyperbeln und unter sich zusammenordnen kann, wo dann diejenige Diagonale des entstehenden Parallelogrammes, welche die beiden Durchschnittspunkte des ersten Systems mit dem zweiten unter sich verbindet, die Stelle der Chordalen vertritt, dass die Asymptotenchorden derselben für einen ganz willkührlichen Pol sich auf dieser Diagonale schneiden.

Setzt man zur Abkürzung z. B. I. 1. für den Durchschnittspunkt der Geraden I mit der Geraden 1, so hat man in Taf. IX. Fig. 17:

Die Verbindungslinie von I. 3 mit III. 1,
„ „ II. 3 mit III. 2,
„ „ I. 2 mit II. 1

schneiden sich in einem Punkte, oder man erhält allgemein den Satz:

„Theilt man (Taf. IX. Fig. 18.) ein Parallelogramm durch zwei den Seiten parallele Linien in vier kleinere, so gehen die Diagonalen dieser letzteren und die dazwischen liegende des ersteren entweder durch einen und denselben Punkt oder sind einander parallel", eine Verallgemeinerung des durch Taf. VIII. Fig. 8. I. versinnlichten Satzes.

Es würde zu complicirt sein, die allgemeine Gleichung derjenigen Curve zu entwickeln, welche von den Asymptotenchorden eines Kegelschnittes umhüllt wird, wenn sich ihr Pol ebenfalls auf einem Kegelschnitte bewegt. Den ersteren Kegelschnitt wollen wir die Directrix, den letzteren die Bahn des Poles nennen. Wir wissen aus §. 2., dass die in Rede stehende Curve immer durch die Punkte geht, wo die Bahn die Directrix schneidet.

Ist die Directrix ein System zweier Geraden, so hat man, wenn $y_1 = f(x_1)$ die Bahn des Poles darstellt, aus den beiden Gleichungen

$$\frac{y}{f(x_1)} + \frac{x}{x_1} = 1$$

und ihrer ersten Differenzialgleichung

$$\frac{y}{f(x_1)^2} \frac{d f(x_1)}{dx_1} + \frac{x}{x_1^2} = 0$$

x_1 zu eliminiren, um die Gleichung der Curve zu finden.

Hat die Bahn die Gleichung $xy = a^2$, d. h. ist sie eine Hyperbel, welche das System der beiden Graden der Directrix zu Asymptoten hat, so findet man auf diese Weise für die gesuchte

Curve die Gleichung $xy=\frac{a^2}{4}$, woraus erhellt, dass sie eine der vorigen parallele Hyperbel mit denselben Asymptoten ist und von letzteren bloss halb so weit absteht, als jene.

Hat sie die Gleichung einer Parabel $y^2=px$, so ist die der Curve $y^2=-4px$, verhält sich also, bei vierfachem Parameter, im entgegengesetzten Winkel ganz analog zu den beiden Geraden der Directrix, d. h. hat die eine zur Tangente, die andere, durch den Tangentialpunkt gehende, zum Durchmesser.

Für den Kreis $y^2+x^2=1$ resultirt die Curve

$$y^2+x^2=1-3\sqrt[3]{x^2y^2}.$$

Für eine Gerade $y=ax+b$ ergibt sich die Gleichung der Parabel

$$(y+ax)^2-2b(y-ax)+b^2=0,$$

welche das System der Directrix in den beiden Punkten tangirt, wo es von der Bahn des Poles geschnitten wird.

Wird in diesem Falle $b=0$, d. h. geht der Weg des Poles durch den Anfangspunkt (seine Gleichung wird $y=ax$), so ist die Gleichung der eingehüllten Linie $y=-ax$. In diesem Falle laufen aber die Asymptotenchorden parallel oder schneiden sich in unendlicher Entfernung. Um also, wenn die Linie $y=ax$ gegeben ist, die Gerade $y=-ax+n$ für einen beliebigen Coordinatenwinkel und ein beliebiges n zu construiren, hat man bloss die Asymptotenchorde eines ihrer Punkte zu verzeichnen; ist die Gerade $y=ax+m$ gegeben, so lege man durch den Punkt, wo sie die eine Axe schneidet, eine Parallele zu der andern und verfahre sodann ganz wie vorhin für diese neue Axe, d. h. man construire zu einem beliebigen Punkte der Geraden das Coordinatenparallelogramm und ziehe die andere Diagonale desselben.

Es ist demnach (cfr. §. 3.) die Linie $y=-ax$ die Polare eines jeden Punktes der Linie $y=ax$, welche Beziehung, wie sich durch Construction des Coordinatenparallelogrammes für einen beliebigen Punkt der ersteren leicht geometrisch nachweisen lässt, reciprok ist, und wir können folglich die durch Taf. IX. Fig. 14. und Taf. IX. Fig. 15. vorgestellten Sätze in einen allgemeineren zusammenfassen, der in §. 64 der „Entwickelungen" aufgeführt ist. Doch auch dieser letztere lässt sich noch erweitern. Nimmt man nämlich die beiden Geraden $y=ax$, $y=-ax$ zu Coordinatenaxen, so werden die ursprünglichen Axen sich jetzt eben so zu einander verhalten, wie jene früher, und daher auch durch die Gleichungen $y=bx$, $y=-bx$ dargestellt werden, wo b leicht aus a zu berechnen ist*). Alles

*) Es reducirt sich dieses nämlich auf die trigonometrische Lösung der Aufgabe: Wenn die beiden Winkel gegeben sind, welche die eine Diagonale eines Parallelogrammes mit den Seiten bildet, die analogen der andern Diagonale zu berechnen.

dieses lässt sich durch Construction des Coordinatenparallelogrammes und seiner Diagonalen ohne Mühe geometrisch zeigen. — Hieraus ergiebt sich schliesslich der Satz:

„Die Diagonalen eines Parallelogrammes und die durch ihren Durchschnittspunkt den Seiten der Figur parallel gezogenen Geraden bilden ein System von vier Linien, welches die Eigenschaft hat, dass, wenn man von einem beliebigen Punkte einer derselben aus zwei Gerade zieht, welche entweder die beiden zu jeder Seite zunächst liegenden oder die erste und dritte, nach derselben Richtung hin auf sie folgenden Linien in vier Punkten schneiden, die Durchschnittspunkte der Verbindungslinien der letzteren Punkte auf der zweitfolgenden liegen.“ (Taf. IX. Fig. 19.).

Dieser Satz muss auch dann noch gelten, wenn diese Verbindungslinien parallel sind. Betrachten wir in Taf. IX. Fig. 19. das Dreieck Omn, dessen Basis mn offenbar in q durch OB halbirt ist, so erhalten wir, da, wenn $m'n'$ dieser Basis parallel gezogen ist, die Geraden $m'n$ und mn' sich in einem Punkte p der Halbirungslinie Oq schneiden, den bekannten Satz (Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. §. 8.):

„Bewegt sich auf einem gegebenen Dreiecke eine Gerade so, dass sie fortwährend einer Seite parallel ist und verbindet man die Endpunkte der letzteren mit den Punkten, wo jene die beiden andern Seiten schneidet, so ist der Ort des Durchschnittspunktes dieser Verbindungslinien eine gerade Linie, welche den Halbirungspunkt jener Seite mit der gegenüberstehenden Winkelspitze verbindet.“

Lässt man die bewegliche, der Basis parallele, Linie die beiden andern Seiten des Dreiecks halbiren, so hat man den Elementarsatz, dass die drei Seitenhalbirungslinien des Dreiecks sich in einem Punkte schneiden.

XXVIII.

Théorèmes généraux qui conduisent à la résolution des équations simultanées du premier degré.

Par
Monsieur Ubbo H. Meyer
de Groningue.

Lorsqu'on aura un nombre quelconque d'équations entre un pareil nombre d'inconnues, on pourra éliminer autant d'inconnues qu'on voudra, et il restera enfin une équation dans laquelle il n'y a qu'une seule inconnue qui sera déterminée par cette équation. La méthode qu'on suit ordinairement pour résoudre des équations linéaires devient impraticable pour un grand nombre d'inconnues, puisqu'il faut repéter le même procédé autant de fois qu'il y a d'inconnues. D'ailleurs elle ne conduit pas à une expression générale des inconnues. Or ce sont des expressions générales qu'on cherche dans l'analyse. C'est pour cela que M. Cauchy a exposé une autre méthode dans son Cours d'analyse Part. I. chap. III. La valeur des inconnues y est représentée par le rapport de deux produits dont les facteurs sont des binomes au nombre égal à $\frac{n(n-1)}{2}$, lorsque n est le nombre des inconnues. Cette expression est très simple, mais il faut observer que ces produits ne sont pas pris dans le sens ordinaire: pour que ce rapport donne la valeur exacte des inconnues, il faut développer les produits et remplacer dans chaque développement les exposant des lettres par des indices. On ne pourra donc guère profiter de cette méthode, à moins qu'on ne soit préalablement parvenu à l'expression générale des développements nommés.

A cause de cet inconvénient j'ai quitté cette route pour en suivre une autre, qui, en principe, se rattache plus à la marche tracée par Bezout, et que l'on rencontre souvent sous le nom de

méthode des multiplicateurs. D'après cette méthode on multiplie chaque équation par une quantité indéterminée, et, après avoir pris la somme de toutes les équations, on détermine les quantités de manière qu'il ne reste qu'une seule des inconnues. Les équations propres à déterminer les quantités indéterminées étant du premier degré par rapport à ces quantités, et leur nombre étant un de moins que celui des équations données, on conçoit qu'en repétant le même procédé on parviendra à la détermination des inconnues, toutes les fois que le nombre des équations est limité. Mais en laissant ce nombre arbitraire on rencontre plusieurs obstacles, si l'on veut trouver par cette voie l'expression générale des inconnues. En tâchant de surmonter ces obstacles je suis parvenu à quelques théorèmes remarquables par leur généralité. Je m'occuperai d'abord de ces théorèmes pour revenir ensuite à la résolution des équations linéaires.

§. I.

Soit n un nombre entier et positif. Supposons que chacun des lettres h, k, m, p, q représente un des nombres $1, 2, 3, \dots n$.

Faisons, pour abréger,

$$(1) \qquad \Sigma_p A_p = \sum_{p=1}^{p=n+1} A_p = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n .$$

Posons

$$\Sigma_p P_{p,m} Q_{p,k} = H_{m,k}, \qquad \Sigma_q P_{m,q} Q_{k,q} = J_{m,k};$$

on aura, quelque soit ϖ_m,

$$\Sigma_m \Sigma_p P_{p,m} Q_{p,k} \varpi_m = \Sigma_m H_{m,k} \varpi_m ,$$

et

$$\Sigma_k \Sigma_m \Sigma_p P_{h,k} P_{p,m} Q_{p,k} \varpi_m = \Sigma_k \Sigma_m P_{h,k} H_{m,k} \varpi_m :$$

mais des équations posées on tire

$$\Sigma_k P_{h,k} Q_{p,k} = J_{h,p};$$

donc la précédente se changera en

$$\Sigma_m \Sigma_p J_{h,p} P_{p,m} \varpi_m = \Sigma_k \Sigma_m P_{h,k} H_{m,k} \varpi_m .$$

Posons de plus

$$H_{h,k} = 0, \quad H_{m,m} = C,$$

h et k étant des nombres distincts, et C étant indépendant de m, on trouvera

$$\Sigma_m \Sigma_p J_{h,p} P_{p,m} \varpi_m = C \ \Sigma_m P_{h,m} \varpi_m,$$

et, si l'on fait

$$\Sigma_m P_{h,m} \varpi_m = \varphi_h,$$

il suivra

$$\Sigma_p J_{h,p} \varphi_p = \varphi_h.$$

Or, ϖ_m étant arbitraire, l'équation précédente subsistera quel que soit φ_p: il faut donc qu'on ait

$$J_{h,k}=0, \ J_{m,m}=C;$$

ce qui conduit au théorème suivant

Théorème I. Soit

$$\Sigma_p P_{p,h} Q_{p,k}=0, \qquad \Sigma_p P_{p,m} Q_{p,m}=C,$$

h et k étant des nombres distincts et C étant indépendant de m; on aura de même

$$\Sigma_q P_{h,q} Q_{k,q}=0, \qquad \Sigma_q P_{m,q} Q_{m,q}=C.$$

Supposons que α, β représentent des nombres entiers y compris le zéro, $m+n\beta$ représentera un nombre entier quelconque, de manière qu'on poura faire $m+n\beta=\alpha$. Maintenant si les fonctions f_m, F_m, assujetties à la condition

$$f_{m+n}=f_m, \ F_{m+n}=F_m,$$

ont entre elles la relation

$$f_m=F_m,$$

on aura aussi

$$f_{m+n\beta}=F_{m+n\beta},$$

ou

$$f_\alpha=F_\alpha.$$

Donc on aura

Théorème II. Si α représente un nombre entier et m un des nombres $1,2,3,\ldots n$. Si l'on a

$$f_{m+n}=f_m, \ F_{m+n}=F_m,$$

et

$$f_m=F_m;$$

on aura plus généralement

$$f_\alpha=F_\alpha.$$

§. II.

Soient, pour tout ce qui suit, n, m, m', h_m, k_m, p_m, q_m, r, r', r_1, s, s', s_1, t, t', t_1 des nombres entiers et positifs assujettis aux conditions

$$(2)\quad \begin{cases} n+1>m>0, \quad n+1>m'>m-1; \\ m+1>h_m>0, \; m+1>k_m>0, \; m+1>p_m>0, \; m+1>q_m>0; \\ n>r>0, \quad n>r'>r-1, \quad r>r_1>0; \\ n-1>s>0, \quad n-1>s'>s-1, \quad s>s_1>0; \\ n-2>t>0, \quad n-2>t'>t-1, \quad t>t_1>0. \end{cases}$$

Posons, pour abréger,

$$(3)\qquad \overset{m}{U}_p = \overset{m}{U}_{p_m,\ p_{m+1},\ p_{m+2}, \ldots p_n}.$$

Cette fonction $\overset{m}{U}_p$, liée aux conditions

$$(4)\qquad \overset{m}{U}_p = \overset{m}{U}_{p_m,\ p_{m+1}, \ldots p_{m'}+m', \ldots p_n},$$

$$(5)\qquad \overset{r}{U}_p = \overset{r+1}{U}_{p_r+p_{r+1},\ p_{r+2},\ p_{r+3} \ldots p_n},$$

sera appelée fonction distribuée par rapport à p. Pareillement la fonction

$$(6)\qquad \overset{m}{U}_{p,q} = \overset{m}{U}_{p_m,\ p_{m+1}, \ldots p_n,\ q_m,\ q_{m+1}, \ldots q_n}$$

sera fonction distribuée par rapport à p, q, si l'on a

$$(7)\quad \begin{cases} \overset{m}{U}_{p,q} = \overset{m}{U}_{p_m,\ p_{m+1}, \ldots p_{m'}+m', \ldots p_n,\ q_m,\ q_{m+1}, \ldots q_n}, \\ \overset{m}{U}_{p,q} = \overset{m}{U}_{p_m,\ p_{m+1}, \ldots p_n,\ q_m+q_{m+1}, \ldots q_{m'}+m', \ldots q_n}, \end{cases}$$

$$(8)\quad \overset{r}{U}_{p,q} = \overset{r+1}{U}_{p_r+p_{r+1},\ p_{r+2}, \ldots p_n,\ q_r+q_{r+1},\ q_{r+2}, \ldots q_n}.$$

Il est évident par ce qui précède ce que sera une fonction distribuée par rapport à p, q, h, k,... Ces fonctions distribuées jouissent de plusieurs proprietés dont nous allons signaler quelques-unes.

En vertu du théorème II. les équations (4) et (7) subsisteront également lorsqu'on substitue à p_m, $p_{m+1}, \ldots p_n$, q_m, $q_{m+1}, \ldots q_n$ des nombres entiers quelconques. Il en sera de même par rapport à $p_{r+1}, \ldots p_n$, $q_{r+1}, \ldots q_n$ dans les équations (7) et (8), mais

les lettres p_r, q_r dans les mêmes équations doivent rester assujetties aux relations (2), puisque pour elles les conditions du théorème II. ne sont pas remplies. Une pareille extension sera applicable à plusieurs des équations suivantes, et, comme le théorème II. suffira pour indiquer dans quel cas cette extension sera permise, il ne sera pas nécessaire de le rappeler pour chaque formule.

L'équation (5) fournit le moyen de réduire la fonction $\overset{m}{U}$ à $\overset{m'}{U}$ et, par suite, à $\overset{n}{U}$. En effet, soient $a_{m',m}$ et $\alpha_{m',m}$ des nombres entiers, dont $a_{m',m}$ vérifie la condition

$$(9) \qquad m'+1 > a_{m',m} > 0;$$

alors $a_{m',m} + m'\alpha_{m',m}$ pourra représenter tout nombre entier. Donc il sera permis de poser

$$(10) \qquad a_{m'-1,m} + p_{m'} = a_{m',m} + m'\alpha_{m',m};$$

et, si, en particulier, on suppose $\alpha_{m,m}=0$, et qu'on fait $a_{m-1,m}=0$, on aura encore

$$p_m = a_{m,m}.$$

A l'aide de ces relations, jointes aux équations (3), (4), on déduit aisément de l'équation (5)

$$(11) \qquad \overset{m}{U}_p = \overset{m'}{U}_{a_{m',m},\ p_{m'+1},\ p_{m'+2},\dots p_n} = \overset{n}{U}_{a_{n,m}};$$

et, si l'on pose en outre

$$(12) \qquad \begin{cases} m'+1 > b_{m',m} > 0, \quad b_{m'-1,m} + q_{m'} = b_{m',m} + m'\beta_{m',m} \\ \qquad\qquad b_{m-1,m} = 0, \quad \beta_{m,m} = 0 \end{cases}$$

$b_{m',m}$, $\beta_{m',m}$ étant des nombres entiers, on trouvera également, au moyen des équations (6), (7), (8),

$$(13) \qquad \overset{m}{U}_{p,q} = \overset{m'}{U}_{a_{m',m},\ p_{m'+1},\dots p_n,\ b_{m',m},\ q_{m'+1},\dots q_n} = \overset{n}{U}_{a_{n,m},\ b_{n,m}}.$$

Suivant les relations (2) on a

$$2s+2 > p_s + p_{s+1} > 1,$$

et, lorsque θ représente 0 ou 1, on a de même

$$2s+2 > k_s + 1 + s\theta > 1:$$

on pourra, par suite, déterminer k_s de manière qu'on ait

$$p_s + p_{s+1} = k_s + 1 + s\theta,$$

d'où l'on tire

$$p_s + \theta = k_s + 1 - p_{s+1} + \overline{s+1}\theta.$$

De plus, on a

$$s+2 > k_s + 1 - \theta > 0:$$

donc on pourra poser

$$k_{s+1} = k_s + 1 - \theta,$$

ce qui donnera

$$p_s + p_{s+1} = k_{s+1} + \overline{s+1}\,\theta.$$

En observant qu'en vertu des relations (2) l'équation (5) subsistera si l'on change r en s, on en déduit

$$\overset{s}{U}_p = \overset{s+1}{U}_{p_s+p_{s+1},\; p_{s+2},\dots p_n},$$

ou, suivant l'équation précédente,

$$\overset{s}{U}_p = \overset{s+1}{U}_{k_{s+1}+\overline{s+1}\theta,\; p_{s+2},\dots p_n},$$

et, ayant égard à l'équation (4), on aura

$$\overset{s}{U}_p = \overset{s+1}{U}_{k_{s+1},\, p_{s+2},\dots p_n}.$$

En se servant de retour de l'équation (5), qui subsistera encore si l'on change r en $s+1$, il suivra

$$\overset{s}{U}_p = \overset{s+2}{U}_{k_{s+1}+p_{s+2},\; p_{s+3},\dots p_n}:$$

mais on a

$$k_{s+1} = p_s + p_{s+1} - \overline{s+1}\theta = p_s + \theta + p_{s+1} - \overline{s+2}\theta,$$

donc il viendra, en égard à l'équation (4)

$$\overset{s}{U}_p = \overset{s+2}{U}_{p_s+\theta+p_{s+1}+p_{s+2},\; p_{s+3},\dots p_n}.$$

Nous avons déja remarqué qu'en vertu du théorème II. il sera permis de substituer un nombre entier quelconque à p_{r+1} dans l'équation (5), en y joignant que l'on a

$$s+2 > p_s + \theta > 0,$$

on déduit de la précédente

$$\overset{s}{U}_p = \overset{s+1}{U}_{p_s+\theta,\; p_{s+1}+p_{s+2},\; p_{s+3},\dots p_n},$$

et, suivant les suppositions faites ci dessus,

$$\overset{s}{U}_p = \overset{s+1}{U}_{k_s+1-p_{s+1},\ p_{s+1}+p_{s+2},\ p_{s+3},\dots p_n}.$$

En y appliquant encore l'équation (5), on obtiendra

$$\overset{s}{U}_p = \overset{s}{U}_{k_s,\ 1-p_{s+1},\ p_{s+1}+p_{s+2},\ p_{s+3},\dots p_n}:$$

Or, on a posé

$$p_s + p_{s+1} = k_s + 1 + s\theta,$$

d'où

$$k_s = p_s + p_{s+1} - 1 - s\theta;$$

donc, à l'aide de l'équation (4), on arrivera enfin à

$$\overset{s}{U}_p = \overset{s}{U}_{p_s+p_{s+1}-1,\ 1-p_{s+1},\ p_{s+1}+p_{s+2},\ p_{s+3},\dots p_n}.$$

De cette équation on déduit, non seulement

$$\overset{s'}{U}_p = \overset{s'}{U}_{p_{s'}+p_{s'+1}-1,\ 1-p_{s'+1},\ p_{s'+1}+p_{s'+2},\ p_{s'+3},\dots p_n},$$

mais encore

$$\overset{s'}{U}_{a_{s',s},p_{s'+1},p_{s'+2},\dots p_n}$$

$$= \overset{s'}{U}_{a_{s',s}+p_{s'+1}-1,\ 1-p_{s'+1},\ p_{s'+1}+p_{s'+2},\ p_{s'+3},\dots p_n},$$

ou, suivant l'équation (11),

$$\overset{s}{U}_p = \overset{s}{U}_{p_s,p_{s+1},\dots p_{s'}+p_{s'+1}-1,\ 1-p_{s'+1},\ p_{s'+1}+p_{s'+2},\ p_{s'+3},\dots p_n}. \tag{14}$$

Nous ferons dans la suite un fréquent usage de cette équation, c'est pour cela que nous remarquons qu'en vertu du théorème II., joint aux équations (3) et (4), elle subsistera, lorsqu'on substitue des nombres entiers quelconques à

$$p_s,\ p_{s+1},\dots p_{s'},\ p_{s'+2},\dots p_n,$$

mais quil faut que le nombre entier $p_{s'+1}$ reste lié à la relation

$$s'+2 > p_{s'+1} > 0.$$

§. III.

Soit

$$(15)\qquad \overset{m}{P}=\overset{m}{P}_{p,q}=\overset{m}{P}_{p_m,\ p_{m+1},\ldots p_n,\ q_m,\ q_{m+1},\ldots q_n}$$

une fonction distribuée par rapport à p, q; on aura, non seulement

$$(16)\quad\begin{cases}\overset{m}{P}=\overset{m}{P}_{p_m,\ p_{m+1},\ \ldots p_{m'}+m',\ldots p_n,\ q_m,\ q_{m+1},\ldots q_n},\\ \overset{m}{P}=\overset{m}{P}_{p_m,\ p_{m+1},\ldots p_n,\ q_m,\ q_{m+1},\ldots q_{m'}+m',\ldots q_n},\\ \overset{r}{P}=\overset{r+1}{P}_{p_r+p_{r+1},\ p_{r+2},\ldots p_n,\ q_r+q_{r+1},\ q_{r+2},\ldots q_n},\end{cases}$$

mais encore, suivant l'équation (14),

(17)

$$\overset{s}{P}=\overset{s}{P}_{p_s,\ p_{s+1},\ldots p_{s'}+p_{s'+1}-1,\ 1-p_{s'+1},\ p_{s'+1}+p_{s'+2},\ p_{s'+3},\ldots p_n,\ q_s,\ q_{s+1},\ldots q_n},$$

$$\overset{s}{P}=\overset{s}{P}_{p_s,\ p_{s+1},\ldots p_n,\ q_s,\ q_{s+1},\ \ldots q_{s'}+q_{s'+1}-1,\ 1-q_{s'+1},\ q_{s'+1}+q_{s'+2},\ q_{s'+3},\ldots q_n}.$$

Déterminons la fonction

$$\overset{m}{\overline{\omega}}=\overset{m}{\overline{\omega}}_{p_m,\ p_{m+1},\ldots p_n,\ q_1,\ q_2,\ldots q_n}$$

par les équations

$$(18)\qquad\begin{cases}\overset{1}{\overline{\omega}}=(-1)^{(p_2+q_2)+2(p_3+q_3)+\ldots+(n-1)(p_n+q_n)}\\ \overset{r+1}{\overline{\omega}}=\Sigma_{p_r}\overset{r}{P}\overset{r}{\overline{\omega}}.\end{cases}$$

De ces équations on déduit

$$(19)\qquad\begin{cases}\overset{r+1}{\overline{\omega}}=\Sigma_{p_r}\Sigma_{p_{r-1}}\ldots\Sigma_{p_{r_1}}\overset{r}{P}\overset{r-1}{P}\ldots\overset{r_1}{P}\overset{r_1}{\overline{\omega}},\\ \overset{r+1}{\overline{\omega}}=\Sigma_{p_r}\Sigma_{p_{r-1}}\ldots\Sigma_{p_1}\overset{r}{P}\overset{r-1}{P}\ldots\overset{1}{P}\overset{1}{\overline{\omega}};\end{cases}$$

puis, en observant qu'il suit des équations

$$\overset{1}{\overline{\omega}}=\overset{1}{\overline{\omega}}_{p_1,\ p_2,\ldots p_m+m,\ldots p_n,\ q_1,\ q_2,\ldots q_n},$$

$$\overset{1}{\overline{\omega}}=\overset{1}{\overline{\omega}}_{p_1,\ p_2,\ldots p_n,\ q_1,\ q_2,\ldots q_m+m,\ldots q_n},$$

on tire de l'équation (19)

$$\overset{r+1}{\overline{\omega}} = \overset{r+1}{\overline{\omega}}_{p_{r+1},\ p_{r+2},\ldots p_{r'+1}+r'+1,\ldots p_n,\ q_1,\ q_2,\ldots q_n},$$

$$\overset{r+1}{\overline{\omega}} = \overset{r+1}{\overline{\omega}}_{p_{r+1},\ p_{r+2},\ldots p_n,\ q_1,\ q_2,\ldots q_m+m,\ldots q_n},$$

équations qui, conjointement avec les deux précédentes, sont renfermées dans les suivantes:

$$(20)\quad \begin{cases} \overset{m}{\overline{\omega}} = \overset{m}{\overline{\omega}}_{p_m,\ p_{m+1},\ldots p_{m'}+m',\ldots p_n,\ q_1,\ q_2,\ldots q_n}, \\ \overset{m}{\overline{\omega}} = \overset{m}{\overline{\omega}}_{p\ ,\ p_{m+1},\ldots p_n,\ q_1,\ q_2,\ldots q_m+m,\ldots q_n}; \end{cases}$$

d'où l'on conclut, en vertu du théorème II., qu'il sera permis de substituer des nombres entiers quelconques à $p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$ dans les équations (18) et (19).

Substituons en conséquence $p_{t'+1}+p_{t'+2}-1$, $1-p_{t'+2}$, $p_{t'+2}+p_{t'+3}$ à $p_{t'+1}$, $p_{t'+2}$, $p_{t'+3}$ et ensuite $q_{t'+1}+q_{t'+2}-1$, $1-q_{t'+2}$, $q_{t'+2}+q_{t'+3}$ à $q_{t'+1}$, $q_{t'+2}$, $q_{t'+3}$ dans l'équation

$$\overset{t+1}{\overline{\omega}} = \Sigma_{p_t}\Sigma_{p_{t-1}}\ldots\Sigma_{p_1}\overset{t}{P}\overset{t-1}{P}\ldots\overset{1}{P}\overset{1}{\overline{\omega}};$$

observons que, suivant les équations (17), $\overset{t}{P}, \overset{t-1}{P}, \ldots \overset{1}{P}$ restent inaltérées par ces substitutions, et que, suivant l'équation (18) on a

$$\overset{1}{\overline{\omega}} = -\overset{1}{\overline{\omega}}_{p_1,\ p_2,\ldots p_s+p_{s+1}-1,\ 1-p_{s+1},\ p_{s+1}+p_{s+2},\ p_{s+3},\ldots p_n,\ q_1,\ q_2,\ldots q_n},$$

$$\overset{1}{\overline{\omega}} = -\overset{1}{\overline{\omega}}_{p_1,\ p_2,\ldots p_n,\ q_1,\ q_2,\ldots q_s+q_{s+1}-1,\ 1-q_{s+1},\ q_{s+1}+q_{s+2},\ q_{s+3},\ldots q_n};$$

on obtiendra

$$\overset{t+1}{\overline{\omega}} = -\overset{t+1}{\overline{\omega}}_{p_{t+1},p_{t+2},\ldots p_{t'+1}+p_{t'+2}-1,1-p_{t'+2},p_{t'+2}+p_{t'+3},p_{t'+4},p_n,q_1,q_2,\ldots q_n},$$

$$\overset{t+1}{\overline{\omega}} = -\overset{t+1}{\overline{\omega}}_{p_{t+1},p_{t+2},\ldots p_n,q_1,q_2,\ldots q_{t'+1}+q_{t'+2}-1,1-q_{t'+2},q_{t'+2}+q_{t'+3},q_{t'+4},\ldots q_n},$$

ou, en combinant ces équations avec les deux précédentes,

$$(21)$$

$$\overset{s}{\overline{\omega}} = -\overset{s}{\overline{\omega}}_{p_s,p_{s+1},\ldots p_{s'}+p_{s'+1}-1,1-p_{s'+1},p_{s'+1}+p_{s'+2},p_{s'+3},\ldots p_n,q_1,q_2,\ldots q_n},$$

$$\overset{s}{\overline{\omega}} = -\overset{s}{\overline{\omega}}_{p_s,p_{s+1}\ldots p_n,q_1,q_2,\ldots q_{s'}+q_{s'+1}-1,1-q_{s'+1},q_{s'+1}+q_{s'+2},q_{s'+3},\ldots q_n}.$$

Lorsque la fonction F_p satisfait à l'équation

$$F_p = F_{p+m}$$

on vérifiera aisément la formule

$$(22) \qquad \Sigma_{p_m} F_{p_m} = \Sigma_{p_m} F_{\alpha+p_m} = \Sigma_{p_m} F_{\alpha-p_m}$$

pour tout nombre entier α. En vertu de cette formule l'équation

$$\overset{s+2}{\varpi} = \Sigma_{p_{s+1}} \Sigma_{p_s} \ldots \Sigma_{p_{s_1}} \overset{s+1}{P} \overset{s}{P} \ldots \overset{s_1+2}{P} \overset{s_1+1}{P} \overset{s_1}{P} \overset{s_1}{\varpi}$$

ne sera pas altérée, si l'on substitue $p_{s_1} + p_{s_1+1} - 1$, $1 - p_{s_1+1}$, $p_{s_1+1} + p_{s_1+2}$ à p_{s_1}, p_{s_1+1}, p_{s_1+2}. Si outre cette substitution on remplace q_{s_1}, q_{s_1+1}, q_{s_1+2} par $q_{s_1} + q_{s_1+1} - 1$, $1 - q_{s_1+1}$, $q_{s_1+1} + q_{s_1+2}$ dans l'équation précédente, on reconnaîtra que dans le second membre $\overset{s_1}{\varpi}$ se changera en $-\overset{s_1}{\varpi}$ par la première substitution en vertu des équations (21), puis $-\overset{s}{\varpi}$ deviendra de retour $\overset{s_1}{\varpi}$ par la seconde substitution, de manière que le facteur $\overset{s_1}{\varpi}$ restera le même par la double substitution. Le facteur $\overset{s_1}{P}$ ne changera non plus suivant les équations (17). En observant encore que l'on a

$$s_1 + 2 > s_1 + 2 - p_{s_1+1} > 0,$$

et ayant égard au théorème II. et aux équations (16), on trouvera sucessivement

$$\overset{s_1+1}{P}_{1-p_{s_1+1},\, p_{s_1+1}+p_{s_1+2},\, p_{s_1+3}, \ldots p_n,\, 1-q_{s_1+1},\, q_{s_1+1}+q_{s_1+2},\, q_{s_1+3}, \ldots q_n}$$

$$= \overset{s_1+1}{P}_{s_1+2-p_{s_1+1},\, p_{s_1+1}+p_{s_1+2},\, p_{s_1+3}, \ldots p_n,\, s_1+2-q_{s_1+1},\, q_{s_1+1}+q_{s_1+2},\, q_{s+3}, \ldots q_n}$$

$$= \overset{s_1+2}{P}_{s_1+2+p_{s_1+2},\, p_{s_1+3}, \ldots p_n,\, s_1+2+q_{s_1+2},\, q_{s_1+3}, \ldots q_n} = \overset{s_1+2}{P},$$

et

$$\overset{s_1+2}{P}_{p_{s_1+1}+p_{s_1+2},\, p_{s_1+3}, \ldots p_n,\, q_{s_1+1}+q_{s_1+2},\, q_{s_1+3}, \ldots q_n} = \overset{s_1+1}{P};$$

doù il suit que par la double substitution le produit $\overset{s_1+2}{P} \overset{s_1+1}{P}$ ne changera pas. Enfin, les autres facteurs $\overset{s+1}{P}$, $\overset{s}{P}$, $\ldots \overset{s_1+3}{P}$ ne contenant pas p_{s_1}, p_{s_2+1}, p_{s_1+2}, q_{s_1}, q_{s_1+1}, q_{s_1+2}, resteront les mêmes. On voit donc que par les substitutions indiquées le second membre ne changera pas, tandisque le premier membre deviendra

$$\overset{s+2}{\varpi}_{p_{s+2}, p_{s+3}, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_{s_1}+q_{s_1+1}-1, 1-q_{s_1+1}, q_{s_1+1}+q_{s_1+2}, q_{s_1+3}, \dots q_n}:$$

on aura par conséquent

$$(23) \qquad \overset{s+2}{\varpi} = \overset{s+2}{\varpi}_{p_{s+2}, p_{s+3}, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_{s_1}+q_{s_1+1}-1, 1-q_{s_1+1}, q_{s_1+1}+q_{s_1+2}, q_{s_1+3}, \dots q_n}.$$

On démontre de la même manière l'équation

$$\overset{s+2}{\varpi} = \overset{s+2}{\varpi}_{p_{s+2}, p_{s+3}, \dots p_n, 1-q_1, q_1+q_2, q_3, \dots q_n},$$

et, puisqu'il suit des équations (19) que la fonction $\overset{s+2}{\varpi}$ est indépendante de q_1, on aura encore

$$\overset{s+2}{\varpi} = \overset{s+2}{\varpi}_{p_{s+2}, p_{s+3}, \dots p_n, q_1, q_1+q_2, q_3, \dots q_n},$$

d'où l'on conclut que $\overset{s+2}{\varpi}$ sera également indépendante de q_2. Maintenant il suit de l'équation (23) que $\overset{s+2}{\varpi}$ sera indépendante de q_{s_1+2} toutes les fois qu'elle est indépendante de q_{s_1} et q_{s_1+1}. Or $\overset{s+2}{\varpi}$ est indépendante de q_1, q_2: donc elle en sera pareillement par rapport à q_3, $q_4, \dots q_{s_1+2}$ ou par rapport à q_3, $q_4, \dots q_{s+1}$, puisqu'on a $s > s_1 > 1$. En y joignant que $\overset{2}{\varpi}$ est indépendante de q_1, on en conclut que $\overset{r+1}{\varpi}$ est indépendante de q_1, $q_2, \dots q_r$. Donc lorsqu'on pose

$$(24) \qquad \overset{m}{\mathfrak{p}} = \overset{m}{\mathfrak{p}}_{p,q} = \overset{m}{\mathfrak{p}}_{p_m, p_{m+1}, \dots p_n, q_m, q_{m+1}, \dots q_n},$$

$$\overset{r+1}{\mathfrak{p}} = \overset{r+1}{\varpi}_{p_{r+1}, p_{r+2}, \dots p_n, 1, 2, 3, \dots r, q_{r+1}, q_{r+2}, \dots q_n},$$

on aura aussi

$$\overset{r+1}{\mathfrak{p}} = \overset{r+1}{\varpi},$$

ou

$$\overset{m}{\mathfrak{p}} = \overset{m}{\varpi},$$

si l'on fait en outre $\overset{1}{\mathfrak{p}} = \overset{1}{\varpi}$.

Il suit de ce qui précède, en ayant égard aux équations (18), (19), (20), (21), (24), que, lorsque $\overset{m}{\mathfrak{p}}$ sera déterminé par les équations



$$(25)\begin{cases}\overset{1}{\mathfrak{p}}=(-1)^{(p_2+q_2)+2(p_3+q_3)+\dots+(n-1)(p_n+q_n)}\\ \overset{r+1}{\mathfrak{p}}=\Sigma_{p_r}\overset{r}{P}_{p_r,p_{r+1},\dots p_n,r,q_{r+1},\dots q_n}\overset{r}{\mathfrak{p}}_{p_r,p_{r+1},\dots p_n,r,q_{r+1},\dots q_n},\end{cases}$$

on aura de même

$$(26)\qquad \overset{r+1}{\mathfrak{p}}=\Sigma_{p_r}\overset{r}{P}\,\overset{r}{\mathfrak{p}},$$

$$(27)\qquad\begin{cases}\overset{m}{\mathfrak{p}}=\overset{m}{\mathfrak{p}}_{p_m,\,p_{m+1},\dots p_{m'}+m',\dots p_n,\,q_m,\,q_{m+1},\dots q_n}.\\ \overset{m}{\mathfrak{p}}=\overset{m}{\mathfrak{p}}_{p_m,\,p_{m+1},\dots p_n,\,q_m,\,q_{m+1},\dots q_{m'}+m',\dots q_n};\end{cases}$$

(28)

$$\overset{s}{\mathfrak{p}}=-\overset{s}{\mathfrak{p}}_{p_s,p_{s+1},\dots p_{s'}+p_{s'+1}-1,\,1-p_{s'+1},\,p_{s'+1}+p_{s'+2},\,p_{s'+3},\dots p_n,q_s,q_{s+1},\dots q_n},$$

$$\overset{s}{\mathfrak{p}}=-\overset{s}{\mathfrak{p}}_{p_s,p_{s+1},\dots p_n,q_s,\,q_{s+1},\dots q_{s'}+q_{s'+1}-1,\,1-q_{s'+1},\,q_{s'+1}+q_{s'+2},\,q_{s'+3},\dots q_n}.$$

Ajoutons que par suite de la formule (22), on déduit de l'équation (26)

$$\overset{s+1}{\mathfrak{p}}=\Sigma_{p_s}\overset{s}{P}_{p_s+p_{s+1}-1,p_{s+1},\dots p_n,q_s,q_{s+1},\dots q_n}\overset{s}{\mathfrak{p}}_{p_s+p_{s+1}-1,p_{s+1},\dots p_n,q_s,q_{s+1},\dots q_n},$$

et, en observant, que $\overset{s+1}{\mathfrak{p}}$ est indépendant de q_s, on en tire aussi

$$\overset{s+1}{\mathfrak{p}}=\Sigma_{p_s}\overset{s}{P}_{p_s,p_{s+1},\dots p_n,q_s+q_{s+1}-1,q_{s+1},\dots q_n}\overset{s}{\mathfrak{p}}_{p_s,p_{s+1},\dots p_n,q_s+q_{s+1}-1,q_{s+1},\dots q_n}.$$

Puis, lorsqu'on change p_{s+1}, p_{s+2} en $1-p_{s+1}$, $p_{s+1}+p_{s+2}$ dans la première de ces équations, et q_{s+1}, q_{s+2} en $1-q_{s+1}$, $q_{s+1}+q_{s+2}$ dans l'autre, il viendra, en profitant des équations (17), (28),

$$\overset{s+1}{\mathfrak{p}}=-\overset{s+1}{\mathfrak{p}}_{1-p_{s+1},\,p_{s+1}+p_{s+2},\,p_{s+3},\dots p_n,\,q_{s+1},\,q_{s+2},\dots q_n},$$

$$\overset{s+1}{\mathfrak{p}}=-\overset{s+1}{\mathfrak{p}}_{p_{s+1},\,p_{s+2}\dots,p_n,\,1-q_{s+1},\,q_{s+1}+q_{s+2},\,q_{s+3},\dots q_n}:$$

et, comme des relations (2) il suit

$$2>p_1>0,\ 2>q_1>0$$

de manière que $p_1=1$, $q_1=1$, on déduira de la première des équations (25)

$$\overset{1}{\mathfrak{p}}=-\overset{1}{\mathfrak{p}}_{1-p_1,\,p_1+p_2,\,p_3,\dots p_n,\,q_1,\,q_2,\dots q_n},$$

$$\overset{1}{\mathfrak{p}}=-\overset{1}{\mathfrak{p}}_{p_1,\,p_2,\dots p_n,\,1-q_1,\,q_1+q_2,\,q_3,\dots q_n},$$

équations qui, jointes aux deux précédentes, donneront

$$(29)\quad\begin{cases}\overset{r}{\mathrm{p}}=-\overset{r}{\mathrm{p}}_{1-p_r,\,p_r+p_{r+1},\,p_{r+2},\dots p_n,\,q_r,\,q_{r+1},\dots q_n},\\ \overset{r}{\mathrm{p}}=-\overset{r}{\mathrm{p}}_{p_r,\,p_{r+1},\dots p_n,\,1-q_r,\,q_r+q_{r+1},\,q_{r+2},\dots q_n}.\end{cases}$$

Posons, pour abréger,

$$\omega=\Sigma_{p_{r+1}}\overset{r+1}{P}_{p_{r+1},\,p_{r+2},\dots p_n,\,q_r+q_{r+1},\,q_{r+2},\dots q_n}\overset{r+1}{\mathrm{p}};$$

on aura suivant (26)

$$\omega=\Sigma_{p_{r+1}}\Sigma_{p_r}\overset{r+1}{P}_{p_{r+1},\,p_{r+2},\dots p_n,\,q_r+q_{r+1},\,q_{r+2},\dots q_n}\overset{r}{P}\overset{r}{\mathrm{p}}.$$

En vertu de l'équation (22), cette équation ne sera pas altérée en remplaçant p_r, p_{r+1} par $1-p_r$, p_r+p_{r+1}. Faisant cela et observant que, selon les équations (16), (29) jointes au théor. II, on aura

$$\overset{r+1}{P}_{p_r+p_{r+1},\,p_{r+2},\dots p_n,\,q_r+q_{r+1},\,q_{r+2},\dots q_n}=\overset{r}{P},$$

$$\overset{r}{P}_{1-p_r,\,p_r+p_{r+1},\,p_{r+2},\dots p_n,\,q_r,\,q_{r+1},\dots q_n}$$
$$=\overset{r+1}{P}_{p_{r+1},\,p_{r+2},\dots p_n,\,q_r+q_{r+1},\,q_{r+2},\dots q_n},$$

$$\overset{r}{\mathrm{p}}_{1-p_r,\,p_r+p_{r+1},\,p_{r+2},\dots p_n,\,q_r,\,q_{r+1},\dots q_n}=-\overset{r}{\mathrm{p}},$$

il viendra

$$\omega=-\Sigma_{p_{r+1}}\Sigma_{p_r}\overset{r+1}{P}_{p_{r+1},\,p_{r+2},\dots p_n,\,q_r+q_{r+1},\,q_{r+2},\dots\dots q_n}\overset{r}{P}\overset{r}{\mathrm{p}}.$$

donc on aura

$$\omega=-\omega$$

d'où

$$\omega=0$$

ou

$$(30)\quad 0=\Sigma_{p_{r+1}}\overset{r+1}{P}_{p_{r+1},\,p_{r+2},\dots p_n,\,q_r+q_{r+1},\,q_{r+2},\dots q_n}\overset{r+1}{\mathrm{p}}.$$

Ajoutons que, lorsqu'on fait

$$q_r+q_{r+1}=k_{r+1}+\overline{r+1}\,\theta,$$

θ étant 0 ou 1 suivant que $q_r + q_{r+1}$ est inférieur ou supérieur à $r+1$, il faut que q_{r+1} et k_{r+1} soient des nombres distincts, puisque q_r n'est ni 0 ni $r+1$. Sous cette condition l'équation (30) se réduira à

$$(31)\qquad 0 = \Sigma_{p_{r+1}} \overset{r+1}{P}_{p_{r+1},\, p_{r+2},\dots p_n,\; k_{r+1},\, q_{r+2},\dots q_n} \overset{r+1}{\mathfrak{p}}.$$

Posons enfin

$$\overset{n+1}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{p_n} \overset{n}{P}_{p_n,\,n} \overset{n}{\mathfrak{p}}_{p_n,\,n};$$

on aura, suivant l'équation (26),

$$\overset{n+1}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{p_n} \Sigma_{p_{n-1}} \overset{n}{P}_{p_n,n} \overset{n-1}{P}_{p_{n-1},\,p_n,\,q_{n-1},\,n} \overset{n-1}{\mathfrak{p}}_{p_{n-1},\,p_n,\,q_{n-1},\,n},$$

ou, suivant l'équation (22),

$$\overset{n+1}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{p_n} \Sigma_{p_{n-1}} \overset{n}{P}_{p_{n-1}+p_n,\,n} \overset{n-1}{P}_{1-p_{n-1},\,p_{n-1}+p_n,\,q_{n-1},\,n} \overset{n-1}{\mathfrak{p}}_{1-p_{n-1},\,p_{n-1}+p_n,\,q_{n-1},\,n}.$$

Mais des équations (16) on déduit

$$\overset{n}{P}_{p_{n-1}+p_n,\,n} = \overset{n-1}{P}_{p_{n-1},\,p_n,\,1-q_{n-1},\,q_{n-1}},$$

$$\overset{n-1}{P}_{1-p_{n-1},\,p_{n-1}+p_n,\,q_{n-1},\,n} = \overset{n}{P}_{p_n,\,q_{n-1}},$$

et, à l'aide des équations (27), (29), on trouvera

$$\overset{n-1}{\mathfrak{p}}_{1-p_{n-1},\,p_{n-1}+p_n,\,q_{n-1},\,n} = -\overset{n-1}{\mathfrak{p}}_{p_{n-1},\,p_n,\,q_{n-1},\,n} = \overset{n-1}{\mathfrak{p}}_{p_{n-1},\,p_n,\,1-q_{n-1},\,q_{n-1}}$$

donc l'équation précédente se réduira à

$$\overset{n+1}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{p_n} \Sigma_{p_{n-1}} \overset{n}{P}_{p_n,\,q_{n-1}} \overset{n-1}{P}_{p_{n-1},\,p_n,\,1-q_{n-1},\,q_{n-1}} \overset{n-1}{\mathfrak{p}}_{p_{n-1},\,p_n,\,1-q_{n-1},\,q_{n-1}},$$

ou, à cause de l'équation (26),

$$\overset{n+1}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{p_n} \overset{n}{P}_{p_n,\,q_{n-1}} \overset{n}{\mathfrak{p}}_{p_n,\,q_{n-1}}.$$

Nous avons par conséquent

$$\Sigma_{p_n} \overset{n}{P}_{p_n,\,n} \overset{n}{\mathfrak{p}}_{p_n,\,n} = \Sigma_{p_n} \overset{n}{P}_{p_n,\,q_{n-1}} \overset{n}{\mathfrak{p}}_{p_n,\,q_{n-1}},$$

d'où il suit que la somme

$$\Sigma_{p_n} \overset{n}{P}_{p_n,\,q_n} \overset{n}{\mathfrak{p}}_{p_n,\,q_n}$$

sera indépendante de q_n, et si l'on pose

$$\overset{n+1}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{p_n} \overset{n}{P}_{p_n,n} \overset{n}{\mathfrak{p}}_{p_n,n},$$

on aura aussi

$$\overset{n+1}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{p_n} \overset{n}{P}_{p_n,q_n} \overset{n}{\mathfrak{p}}_{p_n,q_n} = \Sigma_{p_n} \overset{n}{P}\overset{n}{\mathfrak{p}},$$

équation qui, jointe à l'équation (26), donnera

$$\overset{m+1}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{p_m} \overset{m}{P}\overset{m}{\mathfrak{p}}.$$

Suivant cette équation et l'équation (31) on aura, par suite,

$$\overset{r+2}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{p_{r+1}} \overset{r+1}{P}\overset{r+1}{\mathfrak{p}},$$

$$0 = \Sigma_{p_{r+1}} \overset{r+1}{P}_{p_{r+1},\ p_{r+2},\dots p_n,\ k_{r+1},\ q_{r+2},\dots q_n} \overset{r+1}{\mathfrak{p}},$$

k_{r+1} et q_{r+1} étant des nombres distincts, et $\overset{r+2}{\mathfrak{p}}$ étant indépendant de q_{r+1}: donc on aura de même, en vertu du théorème I.,

$$\overset{r+2}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{q_{r+1}} \overset{r+1}{P}\overset{r+1}{\mathfrak{p}},$$

$$0 = \Sigma_{q_{r+1}} \overset{r+1}{P}_{h_{r+1},\ p_{r+2},\dots p_n,\ q_{r+1},\ q_{r+2},\dots q_n} \overset{r+1}{\mathfrak{p}},$$

h_{r+1} et p_{r+1} étant des nombres distincts, de sorte qu'on pourra faire

$$p_r + p_{r+1} = h_{r+1} + \overline{r+1}\,\eta,$$

η étant 0 ou 1, ce qui changera l'équation précédente en

$$0 = \Sigma_{q_{r+1}} \overset{r+1}{P}_{p_r+p_{r+1},\ p_{r+2},\dots p_n,\ q_{r+1},\ q_{r+2},\dots q_n} \overset{r+1}{\mathfrak{p}}.$$

Ajoutons encore que, puisque des relations (2) il suit $p_1 = 1$, $q_1 = 1$, on aura, en vertu de l'équation (1),

$$\Sigma_{p_1} \overset{1}{P}\overset{1}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{q_1} \overset{1}{P}\overset{1}{\mathfrak{p}},$$

et, par suite,

$$\overset{2}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{q_1} \overset{1}{P}\overset{1}{\mathfrak{p}}.$$

En combinant celle-ci à l'équation

$$\overset{r+2}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{q_{r+1}} \overset{r+1}{P} \overset{r+1}{\mathfrak{p}},$$

on trouvera enfin

$$\overset{m+1}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{q_r} \overset{m}{P} \overset{m}{\mathfrak{p}}.$$

En résumant les résultats auxquels nous sommes parvenus, on pourra énoncer le théorème suivant.

Théorème III. Soit n un nombre entier et positif. Soient m, r, s, m', s', des nombres entiers assujettis aux conditions

$$n+1 > m > 0, \quad n > r > 0, \quad n-1 > s > 0,$$
$$n+1 > m' > m-1, \quad n-1 > s' > s-1.$$

Soit

$$\overset{m}{P} = \overset{m}{P}_{p,q} = \overset{m}{P}_{p_m,\ p_{m+1}, \dots p_n,\ q_m,\ q_{m+1}, \dots q_n}$$

une fonction distribuée par rapport à p, q. Déterminons les fonctions

$$\overset{n+1}{\mathfrak{p}} \text{ et } \overset{m}{\mathfrak{p}} = \overset{m}{\mathfrak{p}}_{p,q} = \overset{m}{\mathfrak{p}}_{p_m,\ p_{m+1}, \dots p_n,\ q_m,\ q_{m+1}, \dots q_n}$$

par les équations

$$(32) \quad \begin{cases} \overset{1}{\mathfrak{p}} = (-1)^{(p_2+q_2)+2(p_3+q_3)+\dots+(n-1)(p_n+q_n)} \\ \overset{m+1}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{p_m} \overset{m}{P}_{p_m, p_{m+1}, \dots p_n, m, q_{m+1}, \dots q_n} \overset{m}{\mathfrak{p}}_{p_m,\ p_{m+1}, \dots p_n,\ m,\ q_{m+1}, \dots q_n}. \end{cases}$$

On aura

$$(33) \quad \begin{cases} \overset{m}{\mathfrak{p}} = \overset{m}{\mathfrak{p}}_{p_m,\ p_{m+1}, \dots p_{m'}+m', \dots p_n, q_m, q_{m+1}, \dots q_n} \\ \quad = \overset{m}{\mathfrak{p}}_{p_m,\ p_{m+1}, \dots p_n, q_m, q_{m+1}, \dots q_{m'}+m', \dots q_n}, \end{cases}$$

$$(34) \quad \begin{cases} \overset{r}{\mathfrak{p}} = -\overset{r}{\mathfrak{p}}_{1-p_r,\ p_r+p_{r+1}, p_{r+2}, \dots p_n, q_r, q_{r+1}, \dots q_n} \\ \quad = -\overset{r}{\mathfrak{p}}_{p_r, p_{r+1}, \dots p_n, 1-q_r, q_r+q_{r+1}, q_{r+2}, \dots q_n}, \end{cases}$$

$$(35)\quad \begin{cases} \overset{s}{\mathfrak{p}} = -\overset{s}{\mathfrak{p}}_{p_s,\, p_{s+1},\, \dots p_{s'}+p_{s'+1}-1,\, 1-p_{s'+1},\, p_{s'+1}+p_{s'+2},\, p_{s'+3}, \dots p_n, q_s, q_{s+1}, \dots} \\ \quad = -\overset{s}{\mathfrak{p}}_{p_s, p_{s+1}, \dots p_n, q_s, q_{s+1}, \dots q_{s'}+q_{s'+1}-1,\, 1-q_{s'+1},\, q_{s'+1}+q_{s'+2},\, q_{s'+3}, \dots} \end{cases}$$

$$(36)\quad \begin{cases} 0 = \Sigma_{p_{r+1}} \overset{r+1}{P}_{p_{r+1},\, p_{r+2}, \dots p_n,\, q_r+q_{r+1},\, q_{r+2}, \dots q_n} \overset{r+1}{\mathfrak{p}} \\ \quad = \Sigma_{q_{r+1}} \overset{r+1}{P}_{p_r+p_{r+1},\, p_{r+2}, \dots p_n,\, q_{r+1},\, q_{r+2}, \dots q_n} \overset{r+1}{\mathfrak{p}}, \end{cases}$$

$$(37)\quad \begin{cases} \overset{m+1}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{p_m} \overset{m}{P} \overset{m}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{p_m} \Sigma_{p_{m-1}} \dots \Sigma_{p_1} \overset{m}{P} \overset{m-1}{P} \dots \overset{1}{P} \overset{1}{\mathfrak{p}} \\ \quad = \Sigma_{q_m} \overset{m}{P} \overset{m}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{q_m} \Sigma_{q_{m-1}} \dots \Sigma_{q_1} \overset{m}{P} \overset{m-1}{P} \dots \overset{1}{P} \overset{1}{\mathfrak{p}}. \end{cases}$$

§. IV.

Il suit du théorème précédent que, lorsque

$$\overset{m}{Q} = \overset{m}{Q}_{p,q} = \overset{m}{Q}_{p_m,\, p_{m+1}, \dots p_n,\, q_m,\, q_{m+1}, \dots q_n}$$

représente une fonction distribuée par rapport à p, q, et qu'on détermine les fonctions

$$\overset{n+1}{\mathfrak{Q}} \text{ et } \overset{m}{\mathfrak{Q}} = \overset{m}{\mathfrak{Q}}_{p,q} = \overset{m}{\mathfrak{Q}}_{p_m,\, p_{m+1}, \dots p_n,\, q_m,\, q_{m+1}, \dots q_n}$$

par les équations

(38)

$$\overset{1}{\mathfrak{Q}} = \overset{1}{\mathfrak{p}}$$

$$\overset{m+1}{\mathfrak{Q}} = \Sigma_{p_m} \overset{m}{\mathfrak{Q}}_{p_m, p_{m+1}, \dots p_n, m, q_{m+1}, \dots q_n} \overset{m}{\mathfrak{Q}}_{p, p_{m+1}, \dots p_n, m, q_{m+1}, \dots q_n}$$

on aura pareillement

$$(39)\quad \begin{cases} \overset{m}{\mathfrak{Q}} = \overset{m}{\mathfrak{Q}}_{p_m,\, p_{m+1}, \dots p_{m'}+m', \dots p_n,\, q_m,\, q_{m+1}, \dots q_n} \\ \quad = \overset{m}{\mathfrak{Q}}_{p,\, p_{m+1}, \dots p_n,\, q_m,\, q_{m+1}, \dots q_{m'}+m', \dots q_n}, \end{cases}$$

$$(40)\quad \begin{cases} \overset{r}{\mathfrak{Q}} = -\overset{r}{\mathfrak{Q}}_{1-p_r,\ p_r+p_{r+1},\ p_{r+2},\dots p_n,\ q_r,\ q_{r+1},\dots q_n} \\ \quad = -\overset{r}{\mathfrak{Q}}_{p_r,\ p_{r+1},\dots p_n,\ 1-q_r,\ q_r+q_{r+1},\ q_{r+2},\dots q_n}, \end{cases}$$

(41)

$$\overset{s}{\mathfrak{Q}} = -\overset{s}{\mathfrak{Q}}_{p_s,p_{s+1},\dots p_{s'}+p_{s'+1}-1,\ 1-p_{s'+1},\ p_{s'+1}+p_{s'+2},\ p_{s'+3},\dots p_n,\ q_s,\ q_{s+1},\dots q_n}$$
$$= -\overset{s}{\mathfrak{Q}}_{p_s,p_{s+1},\dots p_n,\ q_s,\ q_{s+1},\dots q_{s'}+q_{s'+1}-1,\ 1-q_{s'+1},\ q_{s'+1}+q_{s'+2},\ q_{s'+3},\dots q_n},$$

$$(42)\quad \begin{cases} 0 = \Sigma_{p_{r+1}} \overset{r+1}{Q}_{p_{r+1},\ p_{r+2},\dots p_n,\ q_r+q_{r+1},\ q_{r+2},\dots q_n} \overset{r+1}{\mathfrak{Q}} \\ \quad = \Sigma_{q_{r+1}} \overset{r+1}{Q}_{p_r+p_{r+1},\ p_{r+2},\dots p_n,\ q_{r+1},\ q_{r+2},\dots q_n} \overset{r+1}{\mathfrak{Q}}, \end{cases}$$

$$(43)\quad \begin{cases} \overset{m+1}{\mathfrak{Q}} = \Sigma_{p_m} \overset{m}{Q}\,\overset{m}{\mathfrak{Q}} = \Sigma_{p_m}\Sigma_{p_{m-1}}\dots\Sigma_{p_1} \overset{m}{Q}\,\overset{m-1}{Q}\dots\overset{1}{Q}\,\overset{1}{\mathfrak{Q}} \\ \quad = \Sigma_{q_m} \overset{m}{Q}\,\overset{m}{\mathfrak{Q}} = \Sigma_{q_m}\Sigma_{q_{m-1}}\dots\Sigma_{q_1} \overset{m}{Q}.\overset{m-1}{Q}\dots\overset{1}{Q}\,\overset{1}{\mathfrak{Q}}. \end{cases}$$

Maintenant faisons, pour abréger,

$$\overset{m}{U} = \overset{m}{U}_{k,p,q} = \overset{m}{U}_{k_m,\ k_{m+1},\dots k_n,\ p_m,\ p_{m+1},\dots p_n,\ q_m,\ q_{m+1},\dots q_n},$$

$$\overset{m}{\mathfrak{U}} = \overset{m}{\mathfrak{U}}_{k,p,q} = \overset{m}{\mathfrak{U}}_{k_m,\ k_{m+1},\dots k_n,\ p_m,\ p_{m+1},\dots p_n,\ q_m,\ q_{m+1},\dots q_n},$$

et posons

$$(44)\quad \begin{cases} \overset{m}{U} = \overset{m}{P}_{p,k}\ \overset{m}{Q}_{q,k}, \\ \overset{m}{\mathfrak{U}} = \overset{m}{\mathfrak{P}}_{p,k}\ \overset{m}{\mathfrak{Q}}_{q,k},\quad \overset{n+1}{\mathfrak{U}} = \overset{n+1}{\mathfrak{P}}\ \overset{n+1}{\mathfrak{Q}}. \end{cases}$$

On reconnaîtra que $\overset{m}{U}$ sera une fonction distribuée par rapport à k, p, q, et, en vertu des équations (36), (37), (43), on aura

$$0 = \Sigma_{p_{r+1}} \overset{r+1}{U}_{k_r+k_{r+1},\ k_{r+2},\dots k_n,\ p_{r+1},\ p_{r+2},\dots p_n,\ q_{r+1},\ q_{r+2},\dots q_n} \overset{r+1}{\mathfrak{U}},$$

$$\overset{m+1}{\mathfrak{U}} = \Sigma_{p_m}\Sigma_{k_m} \overset{m}{U}\,\overset{m}{\mathfrak{U}},$$

d'où l'on déduit encore, en ayant égard à l'équation (22),

$$\overset{m+1}{\mathfrak{U}}=\Sigma_{p_m}\Sigma_{k_m}\Sigma_{h_m}\overset{m}{U}_{h_m,k_{m+1},\ldots k_n,p_m,p_{m+1},\ldots p_n,q_m,q_{m+1},\ldots q_n}\overset{m}{\mathfrak{U}}.$$

De plus, si l'on fait, pour abréger,

(45)

$$S_{m',m}=\Sigma_{k_n}\Sigma_{k_{n-1}}\ldots\Sigma_{k_m}\overset{m'}{U}_{k_{m'},k_{m'+1},\ldots k_n,a_{m',m},p_{m'+1}\ldots p_n,b_{m',m},q_{m'+1},\ldots q_n}\overset{m}{\mathfrak{U}},$$

(46)

$$T_{m',m}=\Sigma_{k_n}\Sigma_{k_{n-1}}\ldots\Sigma_{k_m}\Sigma_{h_{m'}}\overset{m'}{U}_{h_{m'},k_{m'+1},\ldots k_n,a_{m',m},p_{m'+1},\ldots p_n,b_{m',m},q_{m'+1},\ldots q_n}$$

$a_{m',m}$, $b_{m',m}$ étant assujettis aux conditions (9), (10), (12), on tirera des deux précédentes

$$(47)\qquad \Sigma_{k_n}\Sigma_{k_{n-1}}\ldots\Sigma_{k_{m+1}}\overset{m+1}{\mathfrak{U}}=\Sigma_{p_m}S_{m,m}=\Sigma_{p_m}T_{m,m}.$$

Ce n'est pas tout: en observant que des équations (34), (35), (40), (41), (44) il suit

$$\overset{r}{\mathfrak{U}}=\overset{r}{\mathfrak{U}}_{1-k_r,\,k_r+k_{r+1},\,k_{r+2},\ldots k_n,\;p_r,\;p_{r+1},\ldots p_n,\;q_r,\;q_{r+1},\ldots q_n},$$

$$\overset{s}{\mathfrak{U}}=\overset{s}{\mathfrak{U}}_{k_s,k_{s+1}\ldots k_{s'}+k_{s'+1}-1,1-k_{s'+1},k_{s'+1}+k_{s'+2},k_{s'+3},\ldots k_n,p_s,p_{s+1},\ldots p_n,q_s,q_{s+1},\ldots}$$

et ayant égard à l'équation (22), on déduit aisément de l'équation (45)

$$S_{r+1,r}=S_{r,r},$$

$$S_{s'+2,s}=S_{s'+1,s}$$

d'où l'on tire, non seulement

$$S_{s'+2,s}=S_{s+1,s},$$

mais encore

$$S_{m',m}=S_{m,m}.$$

Ensuite on trouvera, au moyen des équations (1), (22),

$$\Sigma_{h_{r'+1}} \overset{r+1}{U}_{h_{r'+1},\, k_{r'+2}, \ldots k_n,\, a_{r'+1},\, r,\, p_{r'+2}, \ldots p_n,\, b_{r'+1},\, r,\, q_{r'+2}, \ldots q_n}$$

$$= \Sigma_{h_{r'+1}} \overset{r'+1}{U}_{h_{r'+1}+k_{r'+1},\, k_{r'+2}, \ldots k_n,\, a_{r'+1},\, r,\, p_{r'+2}, \ldots p_n,\, b_{r'+1},\, r,\, q_{r'+2}, \ldots q_n}$$

$$= \Sigma_{h_{r'}} \overset{r'+1}{U}_{h_{r'}+k_{r'+1},\, k_{r'+2}, \ldots k_n,\, a_{r'+1},\, r,\, p_{r'+2}, \ldots p_n,\, b_{r'+1},\, r,\, q_{r'+2}, \ldots q_n}$$

$$+ \overset{r'+1}{U}_{h_{r'+1}+k_{r'+1},\, k_{r'+2}, \ldots k_n,\, a_{r'+1},\, r,\, p_{r'+2}, \ldots p_n,\, b_{r'+1},\, r,\, q_{r'+2}, \ldots q_n}$$

$$= \Sigma_{h_{r'}},\, \overset{r'}{U}_{h_{r'},\, k_{r'+1}, \ldots k_n,\, a_{r'},\, r,\, p_{r'+1}, \ldots p_n,\, b_{r'},\, r,\, q_{r'+1}, \ldots q_n}$$

$$+ \overset{r'+1}{U}_{k_{r'+1},\, k_{r'+2}, \ldots k_n,\, a_{r'+1},\, r,\, p_{r'+2}, \ldots p_n,\, b_{r'+1},\, r,\, q_{r'+2}, \ldots q_n}:$$

donc on aura, en vertu des équations (45), (46),

$$T_{r'+1,\, r} = T_{r',r} + S_{r'+1,\, r};$$

puis, en observant que $S_{m',m} = S_{m,m}$ et, par suite, $S_{r'+1,r} = S_{r,r}$, il viendra

$$\Delta r'\, T_{r',r} = S_{r,r}$$

On aura par conséquent, non seulement

$$T_{r',r} - T_{r,r} = (r'-r)\, S_{r,r},$$

mais encore

$$T_{m',m} - T_{m,m} = (m'-m)\, S_{m,m};$$

ce qui conduit à

$$\Sigma_{p_m} T_{m',m} = \Sigma_{p_m} T_{m,m} + (m'-m)\, \Sigma_{p_m} S_{m.m},$$

ou, suivant l'équation (47),

$$\Sigma_{p_m} T_{m',m} = (m'-m+1)\, \Sigma_{p_m} S_{m,m},$$

et, en particulier,

$$\Sigma_{p_m} T_{n,m} = (n-m+1)\, \Sigma_{p_m} S_{m,m};$$

d'ou encore

$$(48) \qquad \frac{1}{(n-m)!} \Sigma_{p_m} S_{m,m} = \frac{1}{(n-m+1)!} \Sigma_{p_m} T_{n,m},$$

ayant posé, pour abréger,

$$m! = 1.2.3 \ldots m.$$

Remarquons que l'on a, suivant l'équation (22),

$$\Sigma_{h_n} \overset{n}{U}_{h_n, a_{n,m}, b_{n,m}} = \Sigma_{h_n} \overset{m}{U}_{\alpha+h_n, a_{n,m}, b_{n,m}}$$

pour tout nombre entier α: donc on pourra déterminer α de manière qu'on ait

$$\Sigma_{h_n} \overset{n}{U}_{h_n, a_{n,m}, b_{n,m}} = \Sigma_{h_n} \overset{m}{U}_{h,p,q},$$

et, si l'on détermine la fonction

$$\overset{m}{K} = \overset{m}{K}_{p,q} = \overset{m}{K}_{p_m, p_{m+1}, \ldots p_n, q_m, q_{m+1}, \ldots q_n}$$

par l'équation

$$\overset{m}{K} = \Sigma_{h_n} \overset{m}{U}_{h,p,q},$$

on aura en même temps

$$\overset{m}{K} = \Sigma_{h_n} \overset{n}{U}_{h_n, a_{n,m}, b_{n,m}}; \tag{49}$$

d'où l'on voit que $\overset{m}{K}$ sera indépendant de $h_m, h_{m+1}, \ldots h_n$, et, en observant que $\overset{m}{U}_{h,p,q}$ est une fonction distribuée par rapport à h, p, q, il résulte que $\overset{m}{K}$ en sera pareillement par rapport à p, q.

Maintenant on tire de l'équation (46)

$$T_{n,m} = \Sigma_{k_n} \Sigma_{k_{n-1}} \ldots \Sigma_{k_m} \Sigma_{h_n} \overset{n}{U}_{h_n, a_{n,m}, b_{n,m}} \overset{m}{\mathfrak{U}},$$

équation qui par l'équation (49) se réduit à

$$T_{n,m} = \Sigma_{k_n} \Sigma_{k_{n-1}} \ldots \Sigma_{k_m} \overset{m}{K} \overset{m}{\mathfrak{U}},$$

ou, $\overset{m}{K}$ ne contenant pas $k_m, k_{m+1}, \ldots k_n$,

$$T_{n,m} = \overset{m}{K} \Sigma_{k_n} \Sigma_{k_{n-1}} \ldots \Sigma_{k_m} \overset{m}{\mathfrak{U}}.$$

Si donc on détermine les fonctions

$$\overset{n+1}{\mathfrak{K}} \text{ et } \overset{m}{\mathfrak{K}} = \overset{m}{\mathfrak{K}}_{p,q} = \overset{m}{\mathfrak{K}}_{p_m, p_{m+1}, \ldots p_n, q_m, q_{m+1}, \ldots q_n}$$

par les équations

$$\begin{cases} \overset{n+1}{\mathfrak{K}} = \overset{n+1}{\mathfrak{U}} \\ \overset{m}{\mathfrak{K}} = \dfrac{1}{(n-m+1)!} \Sigma_{k_n} \Sigma_{k_{n-1}} \ldots \Sigma_{k_m} \overset{m}{\mathfrak{U}}, \end{cases} \tag{50}$$

il viendra

$$\frac{1}{(n-m+1)!}\,T_{n,m} = \overset{m}{K}\,\overset{m}{\mathfrak{K}},$$

tandis que l'équation (47) donnera

$$\frac{1}{(n-m)!}\,\Sigma_{p_m}\,S_{m,m} = \overset{m+1}{\mathfrak{K}};$$

ce qui change l'équation (48) en

$$\overset{m+1}{\mathfrak{K}} = \Sigma_{p_m}\,\overset{m}{K}\,\overset{m}{\mathfrak{K}}. \tag{51}$$

Ajoutons enfin que l'on tire de la seconde des équations (44)

$$\overset{1}{\mathfrak{U}} = \overset{1}{\mathfrak{P}}_{p,k}\,\overset{1}{\mathfrak{Q}}_{q,k}:$$

or on a

$$\overset{1}{\mathfrak{P}}_{p,k} = (-1)^{(p_2+k_2)+2(p_3+k_3)+\dots+(n-1)(p_n+k_n)},$$

$$\overset{1}{\mathfrak{Q}}_{q,k} = (-1)^{(q_2+k_2)+2(q_3+k_3)+\dots+(n-1)(q_n+k_n)},$$

et par suite

$$\overset{1}{\mathfrak{P}}_{p,k}\,\overset{1}{\mathfrak{Q}}_{q,k} = \overset{1}{\mathfrak{P}}_{p,q} = \overset{1}{\mathfrak{P}}:$$

donc on aura

$$\overset{1}{\mathfrak{U}} = \overset{1}{\mathfrak{P}},$$

et l'on voit que $\overset{1}{\mathfrak{U}}$ est indépendant de $k_1, k_2, \dots k_n$; d'où il suit que l'équation

$$\overset{1}{\mathfrak{K}} = \frac{1}{n!}\,\Sigma_{k_n}\,\Sigma_{k_{n-1}} \dots \Sigma_{k_1}\,\overset{1}{\mathfrak{U}}$$

donnera

$$\overset{1}{\mathfrak{K}} = \overset{1}{\mathfrak{U}} = \overset{1}{\mathfrak{P}}. \tag{52}$$

En comparant les équations (51), (52), jointes à l'observation que $\overset{m}{K}$ représente une fonction distribuée par rapport à p, q, aux relations posées dans le théorème III., il résultera que $\mathfrak{K}$ dépend de K de la même manière que $\mathfrak{P}$ de P, ou que $\mathfrak{K}$ se déduit de $\mathfrak{P}$ en changeant P en K; ensorte que les équations (33), (34), (35), (36), (37) subsisteront en remplaçant P par K et $\mathfrak{P}$ par $\mathfrak{K}$.

Remarquons encore que, lorsque les fonctions

$$\overset{n+1}{\mathcal{K}} \text{ et } \overset{m}{\mathcal{K}} = \mathcal{K}_{p,q} = \mathcal{K}_{p_m,\,p_{m+1},\,\dots p_n,\,q_m,\,q_{m+1},\,\dots q_n}$$

seront déterminées par les équations

$$\overset{1}{\mathcal{K}} = \overset{1}{\mathfrak{p}}, \quad \overset{m+1}{\mathcal{K}} = \Sigma_{p_m} \overset{m}{K} \overset{m}{\mathcal{K}}.$$

on aura suivant les équations (51), (52),

$$\overset{n+1}{\mathcal{K}} = \overset{m}{\mathfrak{K}}, \quad \overset{m}{\mathcal{K}} = \overset{'m}{\mathfrak{K}};$$

d'où il suit, en vertu des équations (50),

$$\overset{n+1}{\mathcal{K}} = \overset{n+1}{\mathfrak{U}}$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{(n-m+1)!} \Sigma_{k_n} \Sigma_{k_{n-1}} \ldots \Sigma_{k_m} \overset{m}{\mathfrak{U}}.$$

On conclut donc que réciproquement les équations (50) subsisteront, lorsqu'on aura posé les équations (51), (52).

En éliminant U et $\mathfrak{U}$ à laide des équations (44), les formules trouvées conduisent au théorème suivant.

Théorème IV. Soient $\overset{m}{P}_{p,q}$, $\overset{m}{Q}_{p,q}$ des fonctions distribuées par rapport à p, q, et déterminons la fonction

$$\overset{m}{K} = \overset{m}{K}_{p,q} = \overset{m}{K}_{p_m, p_{m+1}, \ldots p_n, q_m, q_{m+1}, \ldots q_n}$$

par l'équation

$$\overset{m}{K} = \Sigma_{h_n} \overset{m}{P}_{p,h} \overset{m}{Q}_{q,h};$$

alors $\overset{m}{K}$ ne dépendra pas de h_m, $h_{m+1}, \ldots h_n$, et elle sera une fonction distribuée par rapport à p, q.

Déterminons de plus les fonctions $\overset{n+1}{\mathfrak{p}}$, $\overset{m}{\mathfrak{p}}_{p,q}$, $\overset{n+1}{\mathfrak{Q}}$, $\overset{m}{\mathfrak{Q}}_{p,q}$ par les équations (32), (38). Faisons, pour abréger,

$$\overset{m}{\mathfrak{K}} = \overset{m}{\mathfrak{K}}_{p,q} = \overset{m}{\mathfrak{K}}_{p_m, p_{m+1}, \ldots p_n, q_m, q_{m+1}, \ldots q_n},$$

et posons

$$\overset{n+1}{\mathfrak{K}} = \overset{n+1}{\mathfrak{p}} \overset{n+1}{\mathfrak{Q}},$$

$$\overset{m}{\mathfrak{K}} = \frac{1}{(n-m+1)!} \Sigma_{k_n} \Sigma_{k_{n-1}} \ldots \Sigma_{k_m} \overset{m}{\mathfrak{p}}_{p,k} \overset{m}{\mathfrak{Q}}_{q,k}. \tag{53}$$

On aura

$$\overset{1}{\mathfrak{K}}=\overset{1}{\mathfrak{P}},\ \overset{m+1}{\mathfrak{K}}=\Sigma_{p_m}\overset{m}{K}\overset{m}{\mathfrak{K}},$$

ou $\mathfrak{K}$ se déduit de $\mathfrak{P}$ en changeant P en K. Réciproquement, lorsque $\mathfrak{K}$ se déduit de $\mathfrak{P}$ en remplaçant P par K, en sorte qu'on aura les deux dernières équations, les deux équations précédentes suivront en conséquence.

§. V.

La somme multiple dans le second membre de l'équation (53) contiendra plusieurs termes égaux à cause des équations (34), (35), (40), (41). Le nombre de ces termes sera précisément égal à $(n-m+1)!$: donc cette équation n'aura atteint la forme la plus simple que lorsque le diviseur $(n-m+1)!$ aura disparu.

Déterminons à cet effet le nombre entier l_m par les équations

$$(54)\qquad l_n=n+1,\ l_{r+1}=l_r+k_{r+1};$$

et, ayant fait, pour abréger,

$$\overset{m}{\mathfrak{V}}=\overset{m}{\mathfrak{V}}_{k_m k_{m+1},\dots k_n},$$

posons

$$M_{r',r}=\sum_{k_n=1}^{k_n=l_n}\ \sum_{k_{n-1}=1}^{k_{n-1}=l_{n-1}}\dots\sum_{k_{r+1}=1}^{k_{r+1}=l_{r+1}}\ \sum_{k_r=r'+2+l_r-l_{r'+1}}^{k_r=r'+1+l_r-l_{r'}}\overset{r}{\mathfrak{V}},$$

ou

$$(55)\qquad M_{r',r}=\Phi_{r+1}\sum_{k_r=r'+2+l_r-l_{r'+1}}^{k_r=r'+1+l_r-l_{r'}}\overset{r}{\mathfrak{V}},$$

Φ_m étant un signe d'operation déterminé par l'équation

$$(56)\qquad \Phi_m=\sum_{k_n=1}^{k_n=l_n}\ \sum_{k_{n-1}=1}^{k_{n-1}=l_{n-1}}\dots\sum_{k_m=1}^{k_m=l_m}.$$

En posant de plus

$$(57)\qquad M_{n,r}=\Phi_r\overset{r}{\mathfrak{V}},$$

ou, suivant (54), (56),

$$M_{n,r}=\Phi_{r+1}\sum_{k_r=1}^{k_r=l_r}\overset{r}{\mathfrak{V}}=\Phi_{r+1}\sum_{k_r=1}^{k_r=n+1+l_r-l_n}\overset{r}{\mathfrak{V}},$$

et ayant égard à la formule

$$\sum_{p=h}^{p=k}A_p+\sum_{p=k}^{p=l}A_p=\sum_{p=h}^{p=l}A_p,$$

on trouvera

$$M_{n,r}+M_{n-1,r}+\ldots+M_{r,r}=\Phi_{r+1}\sum_{k_r=1}^{k_r=r+1}\overset{r}{\mathfrak{V}}. \tag{58}$$

Ensuite on vérifiera aisément les deux formules

$$\sum_{p=1}^{p=l}\sum_{q=1}^{q=l-p}A_{p,q}=\sum_{p=1}^{p=l}\sum_{q=1}^{q=l-p}A_{q,p}, \tag{59}$$

$$\sum_{p=1}^{p=l}\sum_{q=1}^{q=p}A_{p,q}=\sum_{p=1}^{p=l}\sum_{q=1}^{q=l-p}A_{p+q,q}, \tag{60}$$

l étant un nombre entier et positif. Ajoutons que, les différences Δp et Δq étant égales à l'unité, p, $l-p$, q représenteront des nombres entiers et positifs, et dans la formule (59) ils seront liés aux conditions

$$l>p>0,\ l>l-p>0,\ l-p>q>0.$$

Donc dans l'expression

$$\sum_{k_n=1}^{k_n=l_n}\sum_{k_{n-1}=1}^{k_{n-1}=l_{n-1}}\ldots\sum_{k_r=1}^{k_r=l_r}\overset{r}{\mathfrak{V}}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Phi_r\overset{r}{\mathfrak{V}}$$

l_m et k_m seront des nombres entiers et positifs vérifiant les conditions

$$l_m>k_m>0,\ l_{r'+1}>l_{r'}>0; \tag{61}$$

et, en vertu de la formule (59) jointe à l'équation (54), l'expression précédente ne sera pas altérée, si dans la fonction

$$\overset{r}{\mathfrak{V}}=\overset{r}{\mathfrak{V}}_{k_r,k_{r+1},\ldots k_n}$$

deux termes consecutifs de la suite

$$k_r,\ k_{r+1},\ldots k_n$$

seront permutés; et puisqu'on pourra repéter la permutation autant de fois qu'on voudra, il sera permis de permuter deux termes quelconques.

Si maintenant, en observant que $l_{r'}=l_{r'+1}-k_{r'+1}$, on déduit de l'équation (55)

$$(62)\qquad M_{r',r}=\Phi_{r+1}\sum_{k_r=1}^{k_r=k_{r'+1}}\overset{r}{\mathfrak{Y}}_{r'+1+k_r+l_r-l_{r'+1},\,k_{r+1},\,k_{r+2},\ldots k_n},$$

d'où

$$M_{s'+1,s}=\Phi_{s+1}\sum_{k_s=1}^{k_s=k_{s'+2}}\overset{s}{\mathfrak{Y}}_{s'+2+k_s+l_s-l_{s'+2},\,k_{s+1},\,k_{s+2},\ldots k_n},$$

on reconnaitra qu'il sera permis de permuter dans l'expression

$$\sum_{k_s=1}^{k_s=k_{s'+2}}\overset{s}{\mathfrak{Y}}_{s'+2+k_s+l_s-l_{s'+2},\ k_{s+1},\ k_{s+2},\ldots k_n}$$

du second membre de l'équation précédente deux termes de la suite

$$k_{s+1},\ k_{s+2},\ldots k_n.$$

Donc, en permutant k_{s+1} et $k_{s'+2}$, et observant que par cela

$$l_{s'+2}-l_s=k_{s+1}+k_{s+2}+\ldots+k_{s'+2}$$

ne sera pas altéré, il viendra

$$M_{s'+1,s}=\Phi_{s+1}\sum_{k_s=1}^{k_s=k_{s+1}}\overset{s}{\mathfrak{Y}}_{s'+2+k_s+l_s-l_{s'+2},k_{s'+2},k_{s+2},\ldots k_{s'+1},k_{s+1},k_{s'+3},\ldots k_n}.$$

Puis, comme $k_s+l_s-l_{s'+2}$ se changera en $l_s-l_{s'+2}$ lorsque k_{s+1} sera remplacé par k_s+k_{s+1}, on déduit de la précédente, à l'aide de la formule (60) jointe à l'équation (56),

$$M_{s'+1,s}=\Phi_{s+1}\sum_{k_s=1}^{k_s=l_{s+1}-k_{s+1}}\overset{s}{\mathfrak{Y}}_{s'+2+l_s-l_{s'+2},k_{s'+2},k_{s+2},\ldots k_{s'+1},k_s+k_{s+1},k_{s'+3},\ldots k_n},$$

ou, suivant les équations (54), (56),

$$M_{s'+1,s}=\Phi_s\overset{s}{\mathfrak{Y}}_{s'+2+l_s-l_{s'+2},k_{s'+2},k_{s+2},\ldots k_{s'+1},k_s+k_{s+1},k_{s'+3},\ldots k_n}.$$

D'après ce qui a été dit, cette équation ne sera pas altérée si dans la fonction



$$\overset{s}{\mathfrak{V}}_{s'+2+l_s-l_{s'+2},\,k_{s'+2},\,k_{s+2},\ldots k_{s'+1},\,k_s+k_{s+1},\,k_{s'+3},\ldots k_n}$$

les termes de la suite

$$k_s,\,k_{s+1},\,k_{s+2},\ldots k_{s'+1},\,k_{s'+2},\,k_{s'+3},\ldots k_n$$

seront permutés d'une manière quelconque. Si donc on remplace, au moyen de permutations successives, les termes de cette suite respectivement par les suivantes

$$k_{s'+2},\,k_{s'+1},\,k_{s+1},\ldots k_{s'},\,k_s,\,k_{s'+3},\ldots k_n,$$

ce qui changera

$$l_{s'+2}-l_s=k_{s+1}+k_{s+2}+\ldots+k_{s'+1}+k_{s'+2}$$

en

$$k_{s'+1}+k_{s+1}+\ldots+k_{s'}+k_s=k_s+l_{s'+1}-l_s,$$

l'équation précédente se réduira à

$$M_{s'+1,\,s}=\Phi_s\overset{s}{\mathfrak{V}}_{s'+2-k_s+l_s-l_{s'+1},\,k_s,\,k_{s+1},\ldots k_{s'},\,k_{s'+1}+k_{s'+2},\,k_{s'+3}\ldots k_n}. \tag{63}$$

En particulier on déduit encore de l'équation (62) jointe à l'équation (54)

$$M_{r,r}=\Phi_{r+1}\sum_{k_r=1}^{k_r=k_{r+1}}\overset{r}{\mathfrak{V}}_{r+1+k_r-k_{r+1},\,k_{r+1},\,k_{r+2},\ldots k_n};$$

d'où l'on tire, en se servant conjointement des formules (59), (60),

$$M_{r,r}=\Phi_{r+1}\sum_{k_r=1}^{k_r=l_{r+1}-k_{r+1}}\overset{r}{\mathfrak{V}}_{r+1-k_r,\,k_r+k_{r+1},\,k_{r+2},\ldots k_n},$$

ou

$$M_{r,r}=\Phi_r\overset{r}{\mathfrak{V}}_{r+1-k_r,\,k_r+k_{r+1},\,k_{r+2},\ldots k_n}. \tag{64}$$

Avant d'aller plus loin, revenons aux limites entre lesquelles les nombres entiers l_m et k_m sont reserrés.

On trouvera d'abord que les relations (61) subsisteront également pour les équations (63) et (64). Or de $l_{r+1}>l_r$ on déduit $l_{r+2}>l_r+1$, $l_{r+3}>l_r+2$, etc.: donc on aura généralement

$$l_{m'}>l_m+m'-m-1;$$

et, comme on a $k_m>0$, il s'en suit

$$k_m+l_{m'}>l_m+m'-m,$$

d'où

$$k_m + l_{m'} - l_m - \overline{m' - m} > 0.$$

Puis on déduit de l'inégalité

$$l_{m'} > l_m + m' - m - 1,$$

en observant que $l_n = n + 1$,

$$n + 1 > l_m + n - m - 1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$m + 2 > l_m.$$

On aura par suite

$$m' + 2 > l_m,$$
$$l_m > k_m;$$

d'ou l'on tire

$$l_m + m' + 1 > k_m + l_{m'},$$

et

$$m + 1 > k_m + l_{m'} - l_m - \overline{m' - m}:$$

en sorte qu'on ait

$$m + 1 > k_m + l_{m'} - l_m - m' - m > 0. \tag{65}$$

Attribuons maintenant à la fonction $\overset{m}{\mathfrak{V}}$ la proprieté de satisfaire aux èquations

$$\overset{m}{\mathfrak{V}} = \overset{m}{\mathfrak{V}}_{k_m, k_{m+1}, \ldots k_{m'} + m', \ldots k_n}, \tag{66}$$

$$\overset{r}{\mathfrak{V}} = \overset{r}{\mathfrak{V}}_{1 - k_r, k_r + k_{r+1}, k_{r+2}, \ldots k_n}, \tag{67}$$

$$\overset{s}{\mathfrak{V}} = \overset{s}{\mathfrak{V}}_{k_s, k_{s+1}, \ldots k_{s'} + k_{s'+1} - 1, 1 - k_{s'+1}, k_{s'+1} + k_{s'+2}, k_{s'+3}, \ldots k_n}, \tag{68}$$

dans lesquelles k_m représente un nombre entier vérifiant la condition

$$m + 1 > k_m > 0:$$

ajoutons cependent que de l'équation (66) jointe au théorème II. on conclut que les équations (67) et (68) subsisteront également, lorsque k_m représente un nombre entier quelconque, pourvu que dans la première k_r reste lié à la condition

$$r+1>k_r>0,$$

et que dans l'autre $k_{s'+1}$ soit assujetti à la condition

$$s'+2>k_{s'+1}>0.$$

Si donc s'' représente un nombre entier vérifiant la condition

$$s'+1>s''>s-1,$$

alors, en observant que, suivant la relation (65), on a

$$s''+1>k_{s''}+l_{s'+1}-l_{s''}-\overline{s'-s''+1}>0,$$

et ayant égard à l'équation (68), on démontre aisément par induction l'exactitude de l'équation

$$\overset{s}{\mathfrak{V}}=$$

$$\overset{s}{\mathfrak{V}}_{k_s,k_{s+1},\ldots k_{s''}+l_{s'+1}-l_{s''}-\overline{s'-s''+1},\overline{s'-s''+1}+l_{s''}-l_{s'+1},k_{s''+1},\ldots k_{s'},k_{s'+1}+k_{s'+2},k_{s'+3},\ldots k_n},$$

et, en particulier

$$\overset{s}{\mathfrak{V}}=\overset{s}{\mathfrak{V}}_{k_s+l_{s'+1}-l_s-\overline{s'-s+1},\overline{s'-s+1}+l_s-l_{s'+1},k_{s+1},\ldots k_{s'},k_{s'+1}+k_{s'+2},k_{s'+3},\ldots k_n};$$

d'où l'on déduit, suivant les équations (66), (67),

$$\overset{s}{\mathfrak{V}}=\overset{s}{\mathfrak{V}}_{s'+2-k_s+l_s-l_{s'+1},\,k_s,\,k_{s+1},\,\ldots\,k_{s'},\,k_{s'+1}+k_{s'+2},\,k_{s'+3},\,\ldots\,k_n},$$

tandis qu'on tire immédiatement des équations (66), (67)

$$\overset{r}{\mathfrak{V}}=\overset{r}{\mathfrak{V}}_{r+1-k_r,\,k_r+k_{r+1},\,k_{r+2},\ldots k_n}.$$

Les équations (63), (64) seront donc réduites à

$$M_{s'+1,s}=\Phi_s\overset{s}{\mathfrak{V}},\quad M_{r,r}=\Phi_r\overset{r}{\mathfrak{V}},$$

équations qui sont renfermées dans la seule

$$M_{r',r}=\Phi_r\overset{r}{\mathfrak{V}},$$

ou, suivant l'équation (57),

$$M_{r',r}=M_{n,r}:$$

ce qui montre que $M_{r',r}$ ne dépend pas de r' de manière qu'on ait

$$M_{n,r}+M_{n-1,r}+\ldots+M_{r,r}=(n-r+1)\,\Phi_r\overset{r}{\mathfrak{V}},$$

ou, selon l'équation (58) jointe à l'équation (1),

$$\Phi_{r+1}\, \Sigma_{k_r} \overset{r}{\mathfrak{V}} = (n-r+1)\, \Phi_r \overset{r}{\mathfrak{V}}.$$

ou bien

$$(n-r)!\, \Phi_{r+1}\, \Sigma_{k_r} \overset{r}{\mathfrak{V}} = (n-r+1)!\, \Phi_r \overset{r}{\mathfrak{V}}.$$

Ajoutons que, en égard à l'équation (22), les équations (66), (67), (68) subsisteront encore, lorsque les fonctions

$$\overset{m}{\mathfrak{V}},\ \overset{r}{\mathfrak{V}},\ \overset{s}{\mathfrak{V}}$$

seront remplacées par

$$\Sigma_{k_{m-1}}\, \Sigma_{k_{m-2}} \ldots \Sigma_{k_{m_1}} \overset{m_1}{\mathfrak{V}},\ \Sigma_{k_{r-1}}\, \Sigma_{k_{r-2}} \ldots \Sigma_{k_{r_1}} \overset{r_1}{\mathfrak{V}},\ \Sigma_{k_{s-1}}\, \Sigma_{k_{s-2}} \ldots \Sigma_{k_{s_1}} \overset{s_1}{\mathfrak{V}},$$

m_1, r_1, s_1, étant des nombres entiers et positifs respectivement inférieurs à m, r, s. On aura donc aussi

$$(n-r)!\, \Phi_{r+1} \Sigma_{k_r} \Sigma_{k_{r-1}} \ldots \Sigma_{k_{r_1}} \overset{r_1}{\mathfrak{V}} = (n-r+1)!\, \Phi_r \Sigma_{k_{r-1}}\, \Sigma_{k_{r-2}} \ldots \Sigma_{k_{r_1}} \overset{r_1}{\mathfrak{V}};$$

d'où l'on tire

$$(n-r)!\, \Phi_{r+1} \Sigma_{k_r} \Sigma_{k_{r-1}} \ldots \Sigma_{k_1} \overset{r_1}{\mathfrak{V}} = (n-r_1+1)!\, \Phi_{r_1} \overset{r_1}{\mathfrak{V}},$$

et, en particulier,

$$1!\, \Phi_n \Sigma_{k_{n-1}}\, \Sigma_{k_{n-2}} \ldots \Sigma_{k_{r_1}} \overset{r_1}{\mathfrak{V}} = (n-r_1+1)!\, \Phi_{r_1} \overset{r}{\mathfrak{V}}.$$

Or, cette équation subsistant encore lorsqu'on attribue à r_1 la valeur particulière n, on aura de plus

$$1!\, \Phi_n \Sigma_{k_{n-1}}\, \Sigma_{k_{n-2}} \ldots \Sigma_{k_m} \overset{m}{\mathfrak{V}} = (n-m+1)!\, \Phi_m \overset{m}{\mathfrak{V}}.$$

Enfin, en eliminant le signe d'opération Φ_m par l'équation (56), et observant que, par suite de cette équation jointe aux équations (1), (54), on a

$$\Phi_n = \sum_{k_n=1}^{k_n=l_n} = \sum_{k_n=1}^{k_n=n+1} = \Sigma_{k_n},$$

et que d'ailleurs

$$1! = 1,$$

il viendra

$$\Sigma_{k_n}\Sigma_{k_{n-1}}\ldots\Sigma_{k_m}\overset{m}{\mathfrak{V}}=(n-m+1)!\sum_{k_n=1}^{k_n=l_n}\sum_{k_{n-1}=1}^{k_{n-1}=l_{n-1}}\ldots\sum_{k_m=1}^{k_m=l_m}\overset{m}{\mathfrak{V}}.$$

On est donc conduit au théorème suivant:

Théorème V. Soit l_m un nombre entier déterminé par les équations

$$l_n=n+1,\ l_{r+1}=l_r+k_{r+1}.$$

Supposons que la fonction

$$\overset{m}{\mathfrak{V}}=\overset{m}{\mathfrak{V}}_{k_m,k_{m+1},\ldots k_n}$$

satisfasse aux équations

$$\overset{m}{\mathfrak{V}}=\overset{m}{\mathfrak{V}}_{k_m,k_{m+1},\ldots k_{m'}+m',\ldots k_n}$$

$$\overset{r}{\mathfrak{V}}=\overset{r}{\mathfrak{V}}_{1-k_r,k_r+k_{r+1},k_{r+2},\ldots k_n}$$

$$\overset{s}{\mathfrak{V}}=\overset{s}{\mathfrak{V}}_{k_s,k_{s+1},\ldots k_{s'}+k_{s'+1}-1,1-k_{s'+1},k_{s'+1}+k_{s'+2},k_{s'+3},\ldots k_n}.$$

On aura

$$\frac{1}{(n-m+1)!}\Sigma_{k_n}\Sigma_{k_{n-1}}\ldots\Sigma_{k_m}\overset{m}{\mathfrak{V}}=\sum_{k_n=1}^{k_n=l_n}\sum_{k_{n-1}=1}^{k_{n-1}=l_{n-1}}\ldots\sum_{k_m=1}^{k_m=l_m}\overset{m}{\mathfrak{V}}.$$

Corollaire. En observant que, par suite des équations (33), (34), (35), (39), (40), (41) le produit

$$\overset{m}{\mathfrak{P}}_{p.k}\,\overset{m}{\mathfrak{Q}}_{q,k}$$

jouit par rapport, à k de la proprieté attribuée à la fonction $\overset{m}{\mathfrak{V}}$ dans le théorème V., il s'en suit

$$\frac{1}{(n-m+1)!}\Sigma_{k_n}\Sigma_{k_{n-1}}\ldots\Sigma_{k_m}\overset{m}{\mathfrak{P}}_{p,k}\overset{m}{\mathfrak{Q}}_{q,k}=\sum_{k_n=1}^{k_n=l_n}\sum_{k_{n-1}=1}^{k_{n-1}=l_{n-1}}\ldots\sum_{k_m=1}^{k_m=l_m}\overset{m}{\mathfrak{P}}_{p,k}\overset{m}{\mathfrak{Q}}_{q,k}$$

et le théorème IV. subsistera par conséquent si l'équation (53) sera remplacée par

$$\overset{m}{\mathfrak{R}}=\sum_{k_n=1}^{k_n=l_n}\sum_{k_{n-1}=1}^{k_{n-1}=l_{n-1}}\ldots\sum_{k_m=1}^{k_m=l_m}\overset{m}{\mathfrak{P}}_{p,k}\overset{m}{\mathfrak{Q}}_{q,k}.$$

XXIX.

Applications des théorèmes énoncés dans le Nro. XXVIII.

Par
Monsieur Ubbo H. Meyer
de Groningue.

Ce n'est pas mon dessein d'entrer en détail sur les applications qu'on saurait faire des théorèmes établis dans le No. cité: toutefois il sera bon d'en indiquer l'origine.

Dans la trigonométrie sphérique on se propose de déterminer les relations entre les cosinus ou sinus des angles formés par trois droites ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, qui ne se trouvent pas dans le même plan, et par trois droites σ_1, σ_2, σ_3 respectivement perpendiculaires aux droites ϱ_2 et ϱ_3, ϱ_3 et ϱ_1, ϱ_1 et ϱ_2. Si maintenant on conçoit un système rectangulaire de trois coordonnées X, Y, Z, et qu'on désigne par u_k, v_k, w_k les cosinus des angles formés par la droite ϱ_k avec les axes X, Y, Z, et par x_k, y_k, z_k les cosinus des angles formés par la droite σ_k avec les mêmes axes X, Y, Z. Si ensuite on désigne par $A_{h,k}$ le cosinus de l'angle formé par les droites ϱ_h et ϱ_k, et par $B_{h,k}$ le cosinus de l'angle formé par les droites σ_h et σ_k. Si enfin on nomme $D_{h,k}$ le cosinus de l'angle formé par les droites ϱ_h et σ_k. On aura, d'après les principes de la géométrie analytique, lorsque chacun des lettres h et k représente un des nombres 1, 2, 3:

$$A_{h,h}=1, \quad B_{h,h}=1,$$
$$A_{h,k}=u_h u_k+v_h v_k+w_h w_k,$$
$$B_{h,k}=x_h x_k+y_h y_k+z_h z_k,$$
$$D_{h,k}=u_h x_k+v_h y_k+w_h z_k,$$

tandis que

$$D_{h,k}=0,$$

lorsque h et k représentent des nombres distincts.

Voici les équations qui conduisent aux formules fondamentales de la trigonométrie sphérique. Dans la considération géométrique on est borné par les trois dimensions de l'espace, mais, le problème étant ainsi posé analytiquement, rien ne s'oppose à partir de données analogues à celles que nous venons de poser, avec cette distinction que le nombre 3 sera remplacé par un nombre quelconque: ce qui donnera lieu à un problème appartenant à ce qu'on pourrait appeler polygonométrie à degré quelconque, dont la trigonométrie sphérique sera un cas particulier, savoir, le cas où le degré sera réduit au troisième.

Cette considération m'a conduit d'abord à la résolution des équations simultanées du premier degré, et l'analyse de ce problème m'a porté au théorème III. Ensuite, pour achever la solution du problème de polygonométrie à degré quelconque, je suis parvenu au théorème IV., puis au théorème V.

En conservant les notations du No. cité, n sera un nombre entier et positif, h, k, m, p_m, q_m représenteront des nombres entiers et positifs, dont h, k, m seront inférieurs à $n+1$ et p_m, q_m inférieurs à $m+1$.

Soit

$$\overset{m}{P} = \overset{m}{P}_{p\,q} = \overset{m}{P}_{p_m,\ p_{m+1},\dots p_n,\ q_m,\ q_{m+1},\dots q_n}$$

une fonction distribuée par rapport à p, q, c'est-à-dire, une fonction liée aux équations

$$\overset{m}{P} = \overset{m}{P}_{p_m,\ p_{m+1},\dots p_{m'}+m',\dots p_n,\ q_m,\ q_{m+1},\dots q_n},$$

$$\overset{m}{P} = \overset{m}{P}_{p_m,\ p_{m+1},\dots p_n,\ q_m,\ q_{m+1},\dots q_{m'}+m',\dots q_n},$$

$$\overset{r}{P} = \overset{r+1}{P}_{p_r+p_{r+1},\ p_{r+2},\dots p_n,\ q_r+q_{r+1},\ q_{r+2},\dots q_n},$$

m' et r étant des nombres entiers assujettis aux conditions

$$n+1 > m' > m-1, \qquad n > r > 0.$$

Déterminons les fonctions

$$\overset{n+1}{\mathfrak{p}} \text{ et } \overset{m}{\mathfrak{p}} = \overset{m}{\mathfrak{p}}_{p,q} = \overset{m}{\mathfrak{p}}_{p_m,\ p_{m+1},\dots p_n,\ q_m,\ q_{m+1},\dots q_n}$$

par l'équation

$$(1) \qquad \overset{1}{\mathfrak{p}} = (-1)^{(p_2+q_2)+2(p_3+q_3)+\dots+(m-1)(p_n+q_n)}.$$

et par l'un ou l'autre des équations

$$(2) \qquad \begin{cases} \overset{m+1}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{p_m} \overset{m}{P}\overset{m}{\mathfrak{p}}, \\ \overset{m+1}{\mathfrak{p}} = \Sigma_{q_m} \overset{m}{P}\overset{m}{\mathfrak{p}}, \end{cases}$$

dont l'identité est demonstrée par le théorème III. On aura encore, en vertu de ce théorème,

$$(3)\qquad \begin{cases} \Sigma_p \overset{n}{P}_{p,h}\ \overset{n}{\mathfrak{p}}_{p,k}=0, \\ \Sigma_q \overset{n}{P}_{h,q}\ \overset{n}{\mathfrak{p}}_{k,q}=0, \end{cases}$$

h et k étant des nombres distincts.

A l'aide des principes établis, on sera promptement conduit à la résolution des équations linéaires

En effet, soient

$$(4).\qquad \begin{cases} a_1x_1+b_1x_2+\ldots+g_1x_n=H_1, \\ a_2x_1+b_2x_2+\ldots+g_2x_n=H_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx_1+b_nx_2+\ldots+g_nx_n=H_n \end{cases}$$

n équations linéaires entre les n inconnues

$$x_1,\ x_2,\ldots x_n,$$

et les quantités données

$$\begin{matrix} a_1,\ b_1,\ldots g_1,\ H_1, \\ a_2,\ b_2,\ldots g_2,\ H_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n,b_n,\ldots g_n,\ H_n. \end{matrix}$$

Faisons

$$(5)\qquad \begin{cases} a_1=\overset{n}{P}_{1,1},\ b_1=\overset{n}{P}_{1,2},\ldots g_1=\overset{n}{P}_{1,n}, \\ a_2=\overset{n}{P}_{2,1},\ b_2=\overset{n}{P}_{2,2},\ldots g_2=\overset{n}{P}_{2,n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n=\overset{n}{P}_{n,1},\ b_n=\overset{n}{P}_{n,2},\ldots g_n=\overset{n}{P}_{n,n}. \end{cases}$$

On pourra représenter les équations (4) par la seule

$$\Sigma_p\, P_{m,q}\, x_q=H_m;$$

d'ou l'on tire

$$\Sigma_p\, \Sigma_q\, \overset{n}{P}_{p,q}\, \overset{n}{\mathfrak{p}}_{p,k}\, x_q=\Sigma_p\, H_p\, \mathfrak{p}_{p,k}.$$

Or des équations (2), (3) il suit que la somme

$$\Sigma_p\, P_{p,q}\, \mathfrak{p}_{p,k}$$

est égale à zéro, lorsque q et k représentent des nombres distincts, et qu'elle est égale à $\overset{n+1}{\mathfrak{p}}$, lorsque $q=k$; donc on déduit de l'équation précédente

$$(6) \qquad \overset{n+1}{\mathfrak{p}} x_k = \Sigma_p H_p \overset{n}{\mathfrak{p}}_{p,k},$$

et, si $\overset{n+1}{\mathfrak{p}}$ n'est pas égal à zéro

$$x_k = \frac{1}{\overset{n+1}{\mathfrak{p}}} \Sigma_p H_p \overset{n}{\mathfrak{p}}_{p,k},$$

ou encore

$$x_k = \frac{\Sigma_p H_p \overset{n}{\mathfrak{p}}_{p,k}}{\Sigma_p \overset{n}{P}_{p,q} \overset{n}{\mathfrak{p}}_{p,q}}.$$

Telle est l'équation qui, à l'aide des équations (1), (2), (5), fera connaître la valeur des inconnues $x_1, x_2, \dots x_n$. Observons encore que

$$\overset{n+1}{\mathfrak{p}} = \Sigma_p \overset{n}{P}_{p,q} \overset{n}{\mathfrak{p}}_{p,q}$$

étant indépendant de q, on aura aussi

$$\overset{n+1}{\mathfrak{p}} = \Sigma_p \overset{n}{P}_{p,k} \overset{n}{\mathfrak{p}}_{p,k},$$

et que, par suite,

$$\Sigma_p H_p \overset{n}{\mathfrak{p}}_{p,k}$$

se déduira de $\overset{n+1}{\mathfrak{p}}$ en remplaçant $\overset{n}{P}_{p,k}$ par H_p.

Supposons p. e. qu'il s'agit de trouver la valeur des inconnues

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$$

par la résolution des équations

$$\begin{aligned}
a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_4 &= H_1,\\
a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4 &= H_2,\\
a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 + d_3x_4 &= H_3,\\
a_4x_1 + b_4x_2 + c_4x_3 + d_3x_4 &= H_4.
\end{aligned}$$

Dans ce cas n étant égal à 4, on aura

$$x_k = \frac{1}{\overset{5}{\mathfrak{p}}} \Sigma_{p_\cdot} H_{p_\cdot} \overset{4}{\mathfrak{p}}_{p_\cdot,k}.$$

Or des équations (1), (2) on déduit, en écrivant simplement P au lieu de $\overset{4}{\mathfrak{p}}$



$$\overset{5}{\mathfrak{P}} = P_{1,1}\{P_{2,2}[P_{3,3}P_{4,4} - P_{4,3}P_{3,4}] + P_{3,2}[P_{4,3}P_{2,4} - P_{2,3}P_{4,4}] + P_{4,2}[P_{2,3}P_{3,4} - P_{3,3}P_{2,4}]\}$$
$$- P_{2,1}\{P_{3,2}[P_{4,3}P_{1,4} - P_{1,3}P_{4,4}] + P_{4,2}[P_{1,3}P_{3,4} - P_{3,3}P_{1,4}] + P_{1,2}[P_{3,3}P_{4,4} - P_{4,3}P_{3,4}]\}$$
$$+ P_{3,1}\{P_{4,2}[P_{1,3}P_{2,4} - P_{2,3}P_{1,4}] + P_{1,2}[P_{2,3}P_{4,4} - P_{4,3}P_{2,4}] + P_{2,2}[P_{4,3}P_{1,4} - P_{1,3}P_{4,4}]\}$$
$$- P_{4,1}\{P_{1,2}[P_{2,3}P_{3,4} - P_{3,3}P_{2,4}] + P_{2,2}[P_{3,3}P_{1,4} - P_{1,3}P_{3,4}] + P_{3,2}[P_{1,3}P_{2,4} - P_{2,3}P_{1,4}]\}$$

ou

$$\overset{5}{\mathfrak{P}} = P_{1,1}\{P_{2,2}[P_{3,3}P_{4,4} - P_{3,4}P_{4,3}] + P_{2,3}[P_{3,4}P_{4,2} - P_{3,2}P_{4,4}] + P_{2,4}[P_{3,2}P_{4,3} - P_{3,3}P_{4,2}]\}$$
$$- P_{1,2}\{P_{2,3}[P_{3,4}P_{4,1} - P_{3,1}P_{4,4}] + P_{2,4}[P_{3,1}P_{4,3} - P_{3,3}P_{4,1}] + P_{2,1}[P_{3,3}P_{4,4} - P_{3,4}P_{4,3}]\}$$
$$+ P_{1,3}\{P_{2,4}[P_{3,1}P_{4,2} - P_{3,2}P_{4,1}] + P_{2,1}[P_{3,2}P_{4,4} - P_{3,4}P_{4,2}] + P_{2,2}[P_{3,4}P_{4,1} - P_{3,1}P_{4,4}]\}$$
$$- P_{1,4}\{P_{2,1}[P_{3,2}P_{4,3} - P_{3,3}P_{4,2}] + P_{2,2}[P_{3,3}P_{4,1} - P_{3,1}P_{4,3}] + P_{2,3}[P_{3,1}P_{4,2} - P_{3,2}P_{4,1}]\};$$

et, suivant les équations (5), on aura

$$\overset{5}{\mathfrak{P}} = a_1\{b_2[c_3d_4 - c_4d_3] + b_3[c_4d_2 - c_2d_4] + b_4[c_2d_3 - c_3d_2]\}$$
$$- a_2\{b_3[c_4d_1 - c_1d_4] + b_4[c_1d_3 - c_3d_1] + b_1[c_3d_4 - c_4d_3]\}$$
$$+ a_3\{b_4[c_1d_2 - c_2d_1] + b_1[c_2d_4 - c_4d_2] + b_2[c_4d_1 - c_1d_4]\}$$
$$- a_4\{b_1[c_2d_3 - c_3d_2] + b_2[c_3d_1 - c_1d_3] + b_3[c_1d_2 - c_2d_1]\},$$

ou

$$\overset{5}{\mathfrak{P}} = a_1\{b_2[c_3d_4 - d_3c_4] + c_2[d_3b_4 - b_3d_4] + d_2[b_3c_4 - c_3b_4]\}$$
$$- b_1\{c_2[d_3a_4 - a_3d_4] + d_2[a_3c_4 - c_3a_4] + a_2[c_3d_4 - d_3c_4]\}$$
$$+ c_1\{d_2[a_3b_4 - b_3a_4] + a_2[b_3d_4 - d_3b_4] + b_2[d_3a_4 - a_3d_4]\}$$
$$- d_1\{a_2[b_3c_4 - c_3b_4] + b_2[c_3a_4 - a_3c_4] + c_2[a_3b_4 - b_3a_4]\};$$

puis on trouvera successivement la valeur de

$$\Sigma_{p,} H_{p,} \overset{4}{\mathfrak{P}}_{p,,1}, \quad \Sigma_{p,} H_{p,} \overset{4}{\mathfrak{P}}_{p,,2}, \quad \Sigma_{p,} H_{p,} \overset{4}{\mathfrak{P}}_{p,,3}, \quad \Sigma_{p,} H_{p,} \overset{4}{\mathfrak{P}}_{p,,,},$$

en substituant dans la valeur de $\overset{5}{\mathfrak{P}}$

$$H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_4$$

ou à

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,$$

ou à

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,$$

ou à

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,$$

ou à

$$d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4.$$

Donc on aura tout ce qu'il faut pour la détermination des inconnues

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4.$$

Pour donner une application des théorèmes IV. et V., rappelons nous qu'en vertu de ces théoremes on a

$$\overset{n+1}{\mathfrak{K}} = \overset{n+1}{\mathfrak{P}}\,\overset{n+1}{\mathfrak{Q}},$$

$$(7)\qquad \overset{m}{\mathfrak{K}}_{p,q} = \sum_{k_n=1}^{k_n=l_n}\ \sum_{k_{n-1}=1}^{k_{n-1}=l_{n-1}} \dots \sum_{k_m=1}^{k_m=l_m} \overset{m}{\mathfrak{P}}_{p,k}\overset{m}{\mathfrak{Q}}_{q,k},$$

dans lesquelles k_m et l_m représentent des nombres entiers et positifs, dont l_m soit déterminé par les equations

$$l_n = n+1,\quad l_{r+1} = l_r + k_{r+1},$$

et $\overset{m}{\mathfrak{K}}_{p,q}$, $\overset{m}{\mathfrak{Q}}_{p,q}$ se déduisent de $\overset{m}{\mathfrak{P}}_{p,q}$ en remplaçant P par K, Q; $\overset{m}{K}_{p,q}$, $\overset{m}{Q}_{p,q}$ étant des fonctions distribuées par rapport à p, q, dont $\overset{m}{K}_{p,q}$ soit déterminé par l'équation

$$(8)\qquad \overset{m}{K}_{p,q} = \Sigma_{h_n} \overset{m}{P}_{p,h} \overset{m}{Q}_{q,h}.$$

Si p. e. on fait $n=4$, $m=4$, $p_4=4$, $q_4=4$, la formule (7) se réduira à

$$\overset{4}{\mathfrak{K}}_{4,4} = \overset{4}{\mathfrak{P}}_{4,1}\overset{4}{\mathfrak{Q}}_{4,1} + \overset{4}{\mathfrak{P}}_{4,2}\overset{4}{\mathfrak{Q}}_{4,2} + \overset{4}{\mathfrak{P}}_{4,3}\overset{4}{\mathfrak{Q}}_{4,3} + \overset{4}{\mathfrak{P}}_{4,4}\overset{4}{\mathfrak{Q}}_{4,4},$$

ou

$$(9)\qquad \overset{4}{\mathfrak{K}}_{4,4} = \overset{4}{\mathfrak{P}}_{4,4}\overset{4}{\mathfrak{Q}}_{4,4} + \overset{4}{\mathfrak{P}}_{4,1}\overset{4}{\mathfrak{Q}}_{4,1} + \overset{4}{\mathfrak{P}}_{4,2}\overset{4}{\mathfrak{Q}}_{4,2} + \overset{4}{\mathfrak{P}}_{4,3}\overset{4}{\mathfrak{Q}}_{4,3}.$$

Or, pour $n=4$, l'équation (1) et la seconde des équations (2) donnent

$$\overset{4}{\mathfrak{p}}_{p,q}=(-1)^{p+q}\Big\{\overset{4}{P}_{p+1,q+1}\,[\overset{4}{P}_{p+2,q+2}\,\overset{4}{P}_{p+3,q+3}-\overset{4}{P}_{p+2,q+3}\,\overset{4}{P}_{p+3,q+2}]$$
$$+\overset{4}{P}_{p+1,q+2}\,[\overset{4}{P}_{p+2,q+3}\,\overset{4}{P}_{p+3,q+1}-\overset{4}{P}_{p+2,q+1}\,\overset{4}{P}_{p+3,q+3}]$$
$$+\overset{4}{P}_{p+1,q+3}\,[\overset{4}{P}_{p+2,q+1}\,\overset{4}{P}_{p+3,q+2}-\overset{4}{P}_{p+2,q+2}\,\overset{4}{P}_{p+3,q+1}]\Big\},$$

et, d'aprés ce qui a été dit, on en déduit $\overset{4}{\mathfrak{K}}_{p,q}$, $\overset{4}{\mathfrak{Q}}_{p,q}$ en remplaçant P par K, Q; en sorte qu'on ait

$$(10)\quad \begin{cases}\overset{4}{\mathfrak{K}}_{4,4}=\overset{4}{K}_{1,1}[\overset{4}{K}_{2,2}\overset{4}{K}_{3,3}-\overset{4}{K}_{2,3}\overset{4}{K}_{3,2}]+\overset{4}{K}_{1,2}[\overset{4}{K}_{2,3}\overset{4}{K}_{3,1}-\overset{4}{K}_{2,1}\overset{4}{K}_{3,3}]\\ \qquad\qquad+\overset{4}{K}_{1,3}[\overset{4}{K}_{2,1}\overset{4}{K}_{3,2}-\overset{4}{K}_{2,2}\overset{4}{K}_{3,1}],\end{cases}$$

dans laquelle il faut substituer à $\overset{4}{K}_{p,q}$ la valeur fournie par l'équation (8), savoir,

$$(11)\quad \overset{4}{K}_{p,q}=\overset{4}{P}_{p,1}\,\overset{4}{Q}_{q,1}+\overset{4}{P}_{p,2}\,Q_{q,2}+\overset{4}{P}_{p,3}\,\overset{4}{Q}_{q,3}+\overset{4}{P}_{p,4}\,\overset{4}{Q}_{q,4}.$$

Faisons, pour plus de commodité,

$$\overset{4}{P}_{p,1}=a_{p},\ \overset{4}{P}_{p,2}=b_{p},\ \overset{4}{P}_{p,3}=c_{p},\ \overset{4}{P}_{p,4}=d_{p},$$
$$\overset{4}{Q}_{p,1}=\alpha_{p},\ \overset{4}{Q}_{p,2}=\beta_{p},\ \overset{4}{Q}_{p,3}=\gamma_{p},\ \overset{4}{Q}_{p,4}=\delta_{p}:$$

on obtiendra par l'équation (11)

$$\overset{4}{K}_{p,q}=a_{p}\alpha_{q}+b_{p}\beta_{q}+c_{p}\gamma_{q}+d_{p}\delta_{q}$$

et l'équation (10) donnera

$$\overset{4}{\mathfrak{K}}_{4,4}=[a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1+d_1\delta_1]$$
$$\times\begin{Bmatrix}[(a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2+d_2\delta_2)(a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3+d_3\delta_3)\\ -(a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3+d_2\delta_3)(a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2+d_3\delta_2)]\end{Bmatrix}$$
$$+[a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2+d_1\delta_2]$$
$$\times\begin{Bmatrix}[(a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3+d_2\delta_3)(a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1+d_3\delta_1)\\ -(a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1+d_2\delta_1)(a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3+d_3\delta_3)]\end{Bmatrix}$$
$$+[a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3+d_1\delta_3]$$
$$\times\begin{Bmatrix}[(a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1+d_2\delta_1)(a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2+d_3\delta_2)\\ -(a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2+d_2\delta_2)(a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1+d_3\delta_1)],\end{Bmatrix}$$

tandis que l'équation (9) se réduira à

$$\begin{aligned}
\overset{4}{\mathfrak{R}}_{4,4} = & [a_1(b_2c_3-c_2b_3)+b_1(c_2a_3-a_2c_3)+c_1(a_2b_3-b_2a_3)] \\
& \qquad \times[\alpha_1(\beta_2\gamma_3-\gamma_2\beta_3)+\beta_1(\gamma_2\alpha_3-\alpha_2\gamma_3)+\gamma_1(\alpha_2\beta_3-\beta_2\alpha_3)] \\
& + [b_1(c_2d_3-d_2c_3)+c_1(d_2b_3-b_2d_3)+d_1(b_2c_3-c_2b_3)] \\
& \qquad \times[\beta_1(\gamma_2\delta_3-\delta_2\gamma_3)+\gamma_1(\delta_2\beta_3-\beta_2\delta_3)+\delta_1(\beta_2\gamma_3-\gamma_2\beta_3)] \\
& + [c_1(d_2a_3-a_2d_3)+d_1(a_2c_3-c_2a_3)+a_1(c_2d_3-d_2c_3)] \\
& \qquad \times[\gamma_1(\delta_2\alpha_3-\alpha_2\delta_3)+\delta_1(\alpha_2\gamma_3-\gamma_2\alpha_3)+\alpha_1(\gamma_2\delta_3-\delta_2\gamma_3)] \\
& + [d_1(a_2b_3-b_2a_3)+a_1(b_2d_3-d_2b_3)+b_1(d_2a_3-a_2d_3)] \\
& \qquad \times[\delta_1(\alpha_2\beta_3-\beta_2\alpha_3)+\alpha_1(\beta_2\delta_3-\delta_2\beta_3)+\beta_1(\delta_2\alpha_3-\alpha_2\delta_3)].
\end{aligned}$$

Ces deux valeurs de $\overset{4}{\mathfrak{R}}_{4,4}$ sont necessairement égales, et qui se voudrait donner la peine d'effectuer les multiplications indiquées pourrait s'assurer de l'identité.

En faisant $n=5$, $m=3$, on déduit de la formule (7)

$$\begin{aligned}
& (a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1+d_1\delta_1+e_1\varepsilon_1)(a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2+d_2\delta_2+e_2\varepsilon_2) \\
& \qquad -(a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2+d_1\delta_2+e_1\varepsilon_2)(a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1+d_2\delta_1+e_2\varepsilon_1) \\
& =(a_1b_2-b_1a_2)(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)+(b_1c_2-c_1b_2)(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2) \\
& \qquad +(c_1d_2-d_1c_2)(\gamma_1\delta_2-\delta_1\gamma_2)+(d_1e_2-e_1d_2)(\delta_1\varepsilon_2-\varepsilon_1\delta_2) \\
& +(a_1c_2-c_1a_2)(\alpha_1\gamma_2-\gamma_1\alpha_2)+(b_1d_2-d_1b_2)(\beta_1\delta_2-\delta_1\beta_2) \\
& \qquad +(c_1e_2-e_1c_2)(\gamma_1\varepsilon_2-\varepsilon_1\gamma_2) \\
& +(a_1d_2-d_1a_o)(\alpha_1\delta_2-\delta_1\alpha_2)+(b_1e_2-e_1b_2)(\beta_1\varepsilon_2-\varepsilon_1\beta_2) \\
& +(a_1e_2-e_1a_2)(\alpha_1\varepsilon_2-\varepsilon_1\alpha_2).
\end{aligned}$$

En faisant $n=3$, $m=3$, ou, ce qui revient au même, en posant $d_1=0$, $d_2=0$, $\delta_1=0$, $\delta_2=0$, $\varepsilon_1=0$, $e_2=0$, $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=0$ dans la précédente, on trouvera

$$\begin{aligned}
& (a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1)(a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2) \\
& \qquad -(a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2)(a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1) \\
& =(a_1b_2-b_1a_2)(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)+(b_1c_2-c_1b_2)(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2) \\
& \qquad +(c_1a_2-a_1c_2)(\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2),
\end{aligned}$$

équation qu'on pourra aisément vérifier, et dont on a déjà souvent profité.

Nous terminerons ces applications en indiquant comment les résultats acquis conduisent aux formules fondamentales de la polygonométrie à degré quelconque.

Posons

$$D_{m,k}=\Sigma_{q_n}\overset{n}{P}_{m,q_n}\overset{n}{Q}_{k,q_n}. \tag{12}$$

$$(13)\qquad \begin{cases} \overset{m}{A}_{p,q} = \Sigma_{h_n} \overset{m}{P}_{p,h} \overset{m}{P}_{q,h}, \\ \overset{m}{B}_{p,q} = \Sigma_{h_n} \overset{m}{Q}_{p,h} \overset{m}{Q}_{q,h}; \end{cases}$$

faisons

$$(14)\qquad \overset{n}{A}_{p,p} = 1,\ \overset{n}{B}_{p,p} = 1,$$

et

$$(15)\qquad D_{h,k} = 0,$$

lorsque h et k représentent des nombres distincts. Alors, en vertu du théorème IV., les fonctions

$$\overset{m}{A}_{p,q} = \overset{m}{A}_{p_m, p_{m+1}, \ldots p_n, q_m, q_{m+1}, \ldots q_n},$$
$$\overset{m}{B}_{p,q} = \overset{m}{B}_{p_m, p_{m+1}, \ldots p_n, q_m, q_{m+1}, \ldots q_n}$$

seront des fonctions distribuées par rapport à p, q, et, suivant les équations (13), on aura

$$(16)\qquad \overset{m}{A}_{p,q} = \overset{m}{A}_{q,p},\ \overset{m}{B}_{p,q} = \overset{m}{B}_{q,p}.$$

De plus si les fonctions

$$\overset{n+1}{\mathfrak{A}} \text{ et } \overset{m}{\mathfrak{A}}_{p,q} = \overset{m}{\mathfrak{A}}_{p_m, p_{m+1}, \ldots p_n, q_m, q_{m+1}, \ldots q_n},$$
$$\overset{n+1}{\mathfrak{B}} \text{ et } \overset{m}{\mathfrak{B}}_{p,q} = \overset{m}{\mathfrak{B}}_{p_m, p_{m+1}, \ldots p_n, q_m, q_{m+1}, \ldots q_n}$$

se déduisent de $\overset{n+1}{\mathfrak{P}}$ et $\overset{m}{\mathfrak{P}}_{p,q}$ en substituant A, B à P, en sorte qu'on ait

$$(17)\qquad \begin{cases} \overset{1}{\mathfrak{A}}_{p,q} = \overset{1}{\mathfrak{P}}_{p,q},\ \overset{m+1}{\mathfrak{A}}_{p,q} = \Sigma_{p_m} \overset{m}{A}_{p,q} \overset{m}{\mathfrak{A}}_{p,q}, \\ \overset{1}{\mathfrak{B}}_{p,q} = \overset{1}{\mathfrak{P}}_{p,q},\ \overset{m+1}{\mathfrak{B}}_{p,q} = \Sigma_{p_m} \overset{m}{B}_{p,q} \overset{m}{\mathfrak{B}}_{p,q}, \end{cases}$$

on aura encore, suivant le théorème IV.,

$$(18)\qquad \begin{cases} \overset{n}{\mathfrak{A}}_{p,q} = \Sigma_{k_n} \overset{n}{\mathfrak{P}}_{p,k_n} \overset{n}{\mathfrak{P}}_{q,k_n}; \\ \overset{n}{\mathfrak{B}}_{p,q} = \Sigma_{k_n} \overset{n}{\mathfrak{Q}}_{p,k_n} \overset{n}{\mathfrak{Q}}_{q,k_n}. \end{cases}$$

Or, en résolvant l'équation (12) par rapport à $\overset{n}{Q}$, puis à $\overset{m}{P}$ par la méthode exposée, on trouvera

$$\overset{n+1}{\mathfrak{P}}\ \overset{n}{\mathfrak{Q}}_{k,m}=\Sigma_{p_n} D_{p_n,k}\overset{n}{\mathfrak{P}}_{p_n,m}.$$

$$\overset{n+1}{\mathfrak{Q}}\ \overset{n}{P}_{m,k}=\Sigma_{p_n} D_{m,p_n}\overset{n}{\mathfrak{Q}}_{p_n,k};$$

et, puisque, selon l'équation (15),

$$D_{h,k}=0,$$

lorsque h et k représentent des nombres distincts, on sera conduit à

$$\overset{n+1}{\mathfrak{P}}\ \overset{n}{Q}_{k,m}=D_{k,k}\ \overset{n}{\mathfrak{P}}_{k,m},$$

$$\overset{n+1}{\mathfrak{Q}}\ \overset{n}{P}_{m,k}=D_{m,m}\overset{n}{\mathfrak{Q}}_{m,k};$$

d'où

$$\overset{n}{\mathfrak{P}}_{k,m}=\overset{n}{\mathrm{A}}_k\overset{n}{Q}_{k,m},$$

$$\overset{n}{\mathfrak{Q}}_{m,k}=\overset{n}{\mathrm{B}}_m\overset{n}{P}_{m,k},$$

ayant fait, pour abréger,

$$(19)\qquad \overset{n}{\mathrm{A}}_k=\frac{\overset{n+1}{\mathfrak{P}}}{D_{k,k}},\quad \overset{n}{\mathrm{B}}_m=\frac{\overset{n+1}{\mathfrak{Q}}}{D_{m,m}}.$$

Donc les équations (18) se réduiront à

$$\overset{n}{\mathfrak{A}}_{p,q}=\Sigma_{k_n}\overset{n}{\mathrm{A}}_p\overset{n}{\mathrm{A}}_q\overset{n}{Q}_{p,k_n}\overset{n}{Q}_{q,k_n},$$

$$\overset{n}{\mathfrak{B}}_{p,q}=\Sigma_{k_n}\overset{n}{\mathrm{B}}_p\overset{n}{\mathrm{B}}_q\overset{n}{P}_{p,k_n}\overset{n}{P}_{q,k_n};$$

ou, en observant que $\overset{n}{\mathrm{A}}_p$, $\overset{n}{\mathrm{A}}_q$, $\overset{n}{\mathrm{B}}_p$, $\overset{n}{\mathrm{B}}_q$ ne contiennent pas k_n,

$$\overset{n}{\mathfrak{A}}_{p,q}=\overset{n}{\mathrm{A}}_p\overset{n}{\mathrm{A}}_q\Sigma_{k_n}\overset{n}{Q}_{p,k_n}\overset{n}{Q}_{q,k_n},$$

$$\overset{n}{\mathfrak{B}}_{p,q}=\overset{n}{\mathrm{B}}_p\overset{n}{\mathrm{B}}_q\Sigma_{k_n}\overset{n}{P}_{p,k_n}\overset{n}{P}_{q,k_n};$$

ou enfin, eu égard aux équations (13),

$$(20)\qquad \begin{cases}\overset{n}{\mathfrak{A}}_{p,q}=\overset{n}{\mathrm{A}}_p\overset{n}{\mathrm{A}}_q\overset{n}{B}_{p,q},\\ \overset{n}{\mathfrak{B}}_{p,q}=\overset{n}{\mathrm{B}}_p\overset{n}{\mathrm{B}}_q\overset{n}{A}_{p,q}.\end{cases}$$

Remarquons encore, qu'en vertu des équations (14), on déduit des précédentes

$$(21)\qquad \begin{cases} \overset{n}{\mathfrak{A}}_{p,p}=\overset{n}{\mathrm{A}}_p\,\overset{n}{\mathrm{A}}_p=\{\overset{n}{\mathrm{A}}_p\}^2, \\ \overset{n}{\mathfrak{B}}_{p,p}=\overset{n}{\mathrm{B}}_p\,\overset{n}{\mathrm{B}}_p=\{\overset{n}{\mathrm{B}}_p\}^2; \end{cases}$$

et que des équations (19) on tire

$$(22)\qquad \frac{\overset{n}{\mathrm{A}}_m}{\overset{n}{\mathrm{B}}_m}=\frac{\overset{n+1}{\mathfrak{P}}}{\overset{n+1}{\mathfrak{Q}}}:$$

en sorte qu'on ait

$$(23)\qquad \frac{\overset{n}{\mathrm{A}}_m}{\overset{n}{\mathrm{B}}_m}=\frac{\overset{n}{\mathrm{A}}_k}{\overset{n}{\mathrm{B}}_k}.$$

Si maintenant on observe que, par suite des équations (17) et (21), $\overset{n}{\mathfrak{A}}$, $\overset{n}{\mathrm{A}}$ seront des fonctions de $\overset{n}{A}$, et $\overset{n}{\mathfrak{B}}$, $\overset{n}{\mathrm{B}}$ des fonctions de $\overset{n}{B}$, les équations (20) exprimeront des relations entre $\overset{n}{A}$ et $\overset{n}{B}$, qui représenteront les formules fondamentales de la polygonométrie à degré quelconque, auxquelles on pourra joindre l'équation (23).

Si p. e. on pose $n=4$, il viendra

$$\begin{aligned} \overset{4}{\mathfrak{A}}_{p,q}=(-1)^{p+q}\{&\overset{4}{A}_{p+1,q+1}[\overset{4}{A}_{p+2,q+2}\overset{4}{A}_{p+3,q+3}-\overset{4}{A}_{p+2,q+3}\overset{4}{A}_{p+3,q+2}] \\ &+\overset{4}{A}_{p+1,q+2}[\overset{4}{A}_{p+2,q+3}\overset{4}{A}_{p+3,q+1}-\overset{4}{A}_{p+2,q+1}\overset{4}{A}_{p+3,q+3}] \\ &+\overset{4}{A}_{p+1,q+3}[\overset{4}{A}_{p+2,q+1}\overset{4}{A}_{p+3,q+2}-\overset{4}{A}_{p+2,q+2}\overset{4}{A}_{p+3,q+1}]\}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit $\overset{4}{\mathfrak{B}}_{p,q}$ en substituant B à A. En vertu des équations (14), (16), (21) on aura par suite

$$\begin{aligned} \{\overset{4}{\mathrm{A}}_p\}^2=1-\{\overset{4}{A}_{p+1,p+2}\}^2-\{\overset{4}{A}_{p+2,p+3}\}^2-\{\overset{4}{A}_{p+3,p+1}\}^2& \\ +2\overset{4}{A}_{p+1,p+2}\overset{4}{A}_{p+2,p+3}\overset{4}{A}_{p+3,p+1}&, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\overset{4}{\mathrm{B}}_p\}^2=1-\{\overset{4}{B}_{p+1,p+2}\}^2-\{\overset{4}{B}_{p+2,p+3}\}^2-\{\overset{4}{B}_{p+3,p+1}\}^2& \\ +2\overset{4}{B}_{p+1,p+2}\overset{4}{B}_{p+2,p+3}\overset{4}{B}_{p+3,p+1}&. \end{aligned}$$

Puis l'équation (23) donnera

$$\frac{\overset{4}{\mathrm{A}}_1}{\overset{4}{\mathrm{B}}_1}=\frac{\overset{4}{\mathrm{A}}_2}{\overset{4}{\mathrm{B}}_2}=\frac{\overset{4}{\mathrm{A}}_3}{\overset{4}{\mathrm{B}}_3}=\frac{\overset{4}{\mathrm{A}}_4}{\overset{4}{\mathrm{B}}_4},$$

et des équations (20) on déduit entre autres

$$\overset{4}{\mathrm{A}}_1\overset{4}{\mathrm{A}}_2\overset{4}{B}_{1,2}=-\{\overset{4}{A}_{2,3}[\overset{4}{A}_{3,4}\overset{4}{A}_{4,1}-\overset{4}{A}_{3,1}\overset{4}{A}_{4,4}]+\overset{4}{A}_{2,4}[\overset{4}{A}_{3,1}\overset{4}{A}_{4,3}-\overset{4}{A}_{3,3}\overset{4}{A}_{4,1}]$$
$$+\overset{4}{A}_{2,1}[\overset{4}{A}_{3,3}\overset{4}{A}_{4,4}-\overset{4}{A}_{3,4}\overset{4}{A}_{4,3}]\},$$

d'où, en égard aux équations (14), (16)

$$\overset{4}{\mathrm{A}}_1\overset{4}{\mathrm{A}}_2\overset{4}{B}_{1,2}=-\overset{4}{A}_{3,4}[\overset{4}{A}_{1,3}\overset{4}{A}_{2,4}+\overset{4}{A}_{1,4}\overset{4}{A}_{2,3}]+[\overset{4}{A}_{1,3}\overset{4}{A}_{2,3}+\overset{4}{A}_{1,4}\overset{4}{A}_{2,4}]$$
$$-\overset{4}{A}_{1,2}[1-\overset{4}{A}_{3,4}\overset{4}{A}_{3,4}].$$

On trouvera de la même manière les autres relations.

Prenons encore $n=3$. Dans ce cas on aura

$$\overset{3}{\mathfrak{A}}_{p,q}=\overset{3}{A}_{p+1,q+1}\overset{3}{A}_{p+2,q+2}-\overset{3}{A}_{p+1,q+2}\overset{3}{A}_{p+2,q+1},$$
$$\overset{3}{\mathfrak{B}}_{p,q}=\overset{3}{B}_{p+1,q+1}\overset{3}{B}_{p+2,q+2}-\overset{3}{B}_{p+1,q+2}\overset{3}{B}_{p+2,q+1};$$

d'où l'on déduit, en ayant égard aux équations (14), (16), (21),

$$(24)\qquad\begin{cases}\{\overset{3}{\mathrm{A}}_p\}^2=1-\{\overset{3}{A}_{p+1,p+2}\}^2,\\ \{\overset{3}{\mathrm{B}}_p\}^2=1-\{\overset{3}{B}_{p+1,p+2}\}^2.\end{cases}$$

Puis l'équation (23) conduit à

$$(25)\qquad\frac{\overset{3}{\mathrm{A}}_1}{\overset{3}{\mathrm{B}}_1}=\frac{\overset{3}{\mathrm{A}}_2}{\overset{3}{\mathrm{B}}_2}=\frac{\overset{3}{\mathrm{A}}_3}{\overset{3}{\mathrm{B}}_3},$$

et les équations (20) se réduisent à

$$\overset{3}{\mathrm{A}}_p\overset{3}{\mathrm{A}}_q\overset{3}{B}_{p,q}=\overset{3}{A}_{p+1,q+1}\overset{3}{A}_{p+2,q+2}-\overset{3}{A}_{p+1,q+2}\overset{3}{A}_{p+2,q+1},$$
$$\overset{3}{\mathrm{B}}_p\overset{3}{\mathrm{B}}_q\overset{3}{A}_{p,q}=\overset{3}{B}_{p+1,q+1}\overset{3}{B}_{p+2,q+2}-\overset{3}{B}_{p+1,q+2}\overset{3}{B}_{p+2,q+1}.$$

En particulier on aura

$$\overset{3}{\mathrm{A}}_1\overset{3}{\mathrm{A}}_2\overset{3}{B}_{1,2}=\overset{3}{A}_{2,3}\overset{3}{A}_{3,1}-\overset{3}{A}_{2,1},$$
$$\overset{3}{\mathrm{B}}_1\overset{3}{\mathrm{B}}_2\overset{3}{A}_{1,2}=\overset{3}{B}_{2,3}\overset{3}{B}_{3,1}-\overset{3}{B}_{2,1};$$

d'où

$$\overset{3}{A}_{1,2}=\overset{3}{A}_{2,3}\overset{3}{A}_{3,1}-\overset{3}{\mathrm{A}}_1\overset{3}{\mathrm{A}}_2\overset{3}{B}_{1,2},$$
$$\overset{3}{B}_{1,2}=\overset{3}{B}_{2,3}\overset{3}{B}_{3,1}-\overset{3}{\mathrm{B}}_1\overset{3}{\mathrm{B}}_2\overset{3}{A}_{1,2}.$$

Si maintenant on pose

$$\overset{3}{A}_{2,3}=\cos a,\ \overset{3}{A}_{3,1}=\cos b,\ \overset{3}{A}_{1,2}=\cos c,$$

$$\overset{3}{B}_{2,3}=-\cos A,\ \ \overset{3}{B}_{3,1}=-\cos B,\ \ \overset{3}{B}_{1,2}=-\cos C,$$

a, b, c, A, B, C étant des angles qui ne surpassent pas deux angles droits, a, b, c peuvent être censés représenter les cotés d'un triangle sphérique dont A, B, C sont les angles sphériques opposés. Alors aussi les équations (24) conduisent à

$$\overset{3}{\mathrm{A}}_1=\sin a,\ \ \overset{3}{\mathrm{A}}_2=\sin b,\ \ \overset{3}{\mathrm{A}}_3=\sin c;$$
$$\overset{3}{\mathrm{B}}_1=\sin A,\ \ \overset{3}{\mathrm{B}}_2=\sin B,\ \ \overset{3}{\mathrm{B}}_3=\sin C;$$

et les équations (25) et (26) se réduisent à

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C},$$

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C,$$
$$-\cos C=\cos A\cos B-\sin A\sin B\cos c,$$

équations qui, comme il fallait, forment les formules fondamentales de la trigonométrie sphérique.

Loin de penser que ce sujet est épuisé par le précédent, je crois plutôt qu'on arrivera à des formules remarquables, en laissant varier les quantités. Pour le moment il suffira d'avoir indiqué cette extension.

XXX.

Räumliche Verhältnisse der Flächen des zweiten Grades mit Mittelpunkt.

Von dem
Herrn Professor Dr. T. Franke
an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Bedeuten aa', bb', cc' (Taf. X. Fig. 1.) irgend drei conjugirte, und zwar aa', bb' die reellen, cc' den imaginären Durchmesser, und m den Mittelpunkt eines einfachen Hyperboloides S, so ist bekannt,

1) dass die Durchmesser-Ebene der aa' und bb' die Fläche S in einer Ellipse E schneidet, deren irgend zwei conjugirte Durchmesser mit der cc' drei conjugirte Durchmesser der Fläche bilden, — diese Ellipse E heisse Kehl-Ellipse —,

2) dass alle Ebenen, welche zur Durchmesser-Ebene der aa' und bb' parallel liegen, der Fläche S in Ellipsen begegnen, die der Kehl-Ellipse E ähnlich sind, deren Mittelpunkte in die cc' fallen und deren zugeordnete Durchmesser-Paare in constantem Verhältnisse stehen, wenn die einen parallel zu den andern liegen,

3) dass alle durch den imaginären Durchmesser cc' gelegten Ebenen die Fläche S in Hyperbeln schneiden, welche die cc' als imaginären Durchmesser der Länge und Lage nach gemein haben, deren zugeordnete reelle Durchmesser aber mit den Durchmessern der Ellipse E zusammen fallen,

4) dass alle Ebenen, welche zur Ebene der aa' und cc', oder der bb' und cc' parallel liegen und der Kehl-Ellipse E begegnen, die Fläche S wieder in Hyperbeln schneiden, welche unter sich und der Hyperbel der aa' und cc', oder bezüglich der bb' und cc' ähnlich sind, deren Mittelpunkte in die bb', oder bezüglich in die aa' fallen, und deren conjugirte Durchmesser-Paare in constantem Verhältnisse stehen, wenn die einen parallel zu den andern liegen,

5) dass zwei jener ähnlichen Ellipsen oder dieser ähnlichen Hyperbeln gleich gross sind, wenn ihre parallelen Ebenen vom Mittelpunkte m der Fläche gleich weit abstehen.

Diese Sätze, sowie die Wahrheiten überhaupt, welche auf die sogenannten Flächen des zweiten Grades sich beziehen, gehen aus den Betrachtungen der descriptiven Geometrie hervor, entweder mit Hülfe der cylindrischen Transformation, wie Olivier in seinem Cours de géométrie descriptive nachgewiesen hat, oder mit einziger Hülfe des gemeinsamen Begriffes der Entstehung dieser Flächen, oder der Eigenschaften des windschiefen Viereckes, wie wir zu seiner Zeit nachzuweisen und zugleich den Beleg dafür beizubringen gedenken, dass die Methode der descriptiven Geometrie in Rücksicht auf die Einfachheit der Mittel, auf die Leichtigkeit in der Darstellung und selbst die Allgemeinheit der Resultate mit der Methode der analytischen Geometrie in die Schranken zu treten vermag, wenn es gilt, die Lagen-Verhältnisse geometrischer Gebilde zu untersuchen. Für jetzt einige metrische Beziehungen der Flächen des zweiten Grades mit Mittelpunkt, welche auf obige Eigenschaften des einfachen Hyperboloides sich stützen.

Es sei (Taf. X. Fig. 1.) im einfachen Hyperboloide S mit H die Hyperbel der conjugirten Durchmesser aa', cc', und mit H' eine zur Ebene der H parallele Hyperbel bezeichnet, deren conjugirte Durchmesser $\alpha\alpha'$, $\gamma\gamma'$ zu den Durchmessern aa', cc' der H bezüglich parallel liegen: so folgt aus den Eigenschaften der Kehl-Ellipse E, dass

$$1)\qquad \overline{\alpha\mu}^2 = \frac{\overline{am}^2}{\overline{bm}^2} \,.\, b\mu \,.\, \mu b',$$

aus der Aehnlichkeit der Hyperbeln H und H', dass

$$2)\qquad \alpha\mu = \gamma\mu \,.\, \frac{am}{cm},$$

und aus den zwei Werthen von $\overline{\alpha\mu}^2$, dass

$$3)\qquad \overline{\gamma\mu}^2 = \frac{\overline{cm}^2}{\overline{bm}^2} \,.\, b\mu \,.\, \mu b'.$$

Diese Beziehung gilt offenbar für jede zur H parallele Hyperbel H', in welchen Punkt der bb' auch der Mittelpunkt μ derselben falle, wenn nur dieser Mittelpunkt zwischen b und b' liegt. Sie zeigt, dass die Endpunkte γ und γ' des imaginären Durchmessers $\gamma\gamma'$ der Hyperbel H' einer Ellipse zugehören, und dass daher die Endpunkte der imaginären Durchmesser aller derjenigen Hyperbeln, welche zur Hyperbel H parallel sind, und dem Durchmesser bb' begegnen, in einer Ellipse liegen, für welche bb' und cc' zwei conjugirte Durchmesser bedeuten.

Die in Gleichung 3) angezeigte Eigenschaft gilt für jedes System von Hyperbeln, deren Ebenen zur cc' und zugleich zu irgend einem Durchmesser der Kehl-Ellipse E parallel liegen, weil für jede solche Hyperbel die in Gleichung 1) und 2) bemerkten Beziehungen gültig bleiben. Die Endpunkte der imaginären Durchmesser aller Hyperbeln des einfachen Hyperboloides S, deren Ebenen zum imaginären Durchmesser cc' dieser Fläche parallel liegen, bilden sonach eine neue Fläche S'. auf welche folgende Eigenschaften von der Fläche S sich übertragen:

1) Alle Ebenen, welche durch cc' gelegt werden, begegnen der Fläche S' in Ellipsen, die in m ihren gemeinsamen Mittelpunkt haben; es ist m sonach der Mittelpunkt dieser Fläche selbst, weil jede Sehne derselben, welche durch m geht, einer jener Ellipsen zugehört, und daher in m halbirt wird.

2) der Durchmesser cc' halbirt jede Sehne der Fläche S', welche zur Ebene der Ellipse E parallel liegt, und dem Durchmesser cc' begegnet, eben so halbirt diese Ebene alle zur cc' parallelen Sehnen der Fläche; es sind daher die conjugirten Durchmesser aa', bb', cc' des Hyperboloides, oder irgend zwei conjugirte Durchmesser der Kehl-Ellipse E, und zugleich cc' ebenfalls conjugirte Durchmesser der Fläche S'.

3) Die Fläche S' entsteht durch eine Ellipse, welche um einen ihrer Durchmesser cc' sich dergestalt dreht, dass der zu cc' conjugirte Durchmesser bb' immer in einer Ebene bleibt, und die Endpunkte b,b' desselben eine Ellipse beschreiben.

4) Jede Ellipse, welcher der Durchmesser cc' zugehört, trifft das Hyperboloid S nur in zwei Punkten, nämlich in den Endpunkten des zu cc' zugeordneten Durchmessers; die Fläche S' berührt sonach die Fläche S in der Kehl-Ellipse E.

Diese Eigenschaften zeigen deutlich, dass **die Fläche S' ein Ellipsoid ist, welches mit dem Hyperboloid S die conjugirten Durchmesser aa', bb', cc' gemein hat, und dasselbe in der Kehl-Ellipse E berührt.**

Legen wir nun an eine der in der cc' sich begegnenden Ellipsen, z. B. an aca', eine Berührungs-Gerade, welche zum Durchmesser cc' parallel laufe, so wird diese Gerade Aa oder $A'a'$ die Ellipse im Endpunkte a oder a' desjenigen Durchmessers aa' berühren, welcher zu cc' zugeordnet ist. Die Geraden Aa und $A'a'$ aber werden auch die Hyperbel H, welcher die cc' als imaginärer Durchmesser zugehört, in den Punkten a und a' berühren, weil die Tangenten an den Endpunkten eines reellen Durchmessers zum zugeordneten imaginären Durchmesser parallel liegen. Diese Eigenschaft bleibt den Berührungs-Geraden Aa und $A'a'$, welchem Durchmesser aa' der Ellipse E auch die Punkte aa' als Endpunkte zugehören. Alle diese parallelen Berührungs-Geraden bilden sonach eine cylindrische Fläche F, welche das Hyperboloid und das Ellipsoid zugleich berührt. Man erhält daher den Satz:

Die Cylinder-Fläche F, deren Leit-Curve mit der Kehl-Ellipse E und deren Achse mit dem Durchmesser

cc' zusammenfällt, berührt das einfache Hyperboloid S und zugleich das Ellipsoid S' in der Kehl-Ellipse E.

Die Asymptoten mA und mA' der Hyperbel H schneiden die Berührungs-Geraden aA und $a'A'$ in zwei Punkten A und A', deren Verbindungs-Gerade AA' parallel zur aa' liegt, von dem imaginären Durchmesser cc' im Punkte c halbirt und von der Ellipse aca' in demselben Punkte c berührt wird, weil diese Asymptoten mA und mA' die Diagonalen desjenigen Parallelogrammes bilden, dessen zum Durchmesser cc' parallelen Seiten die Hyperbel oder Ellipse in den Endpunkten des zugeordneten Durchmessers aa' berühren, und dessen beiden andern Seiten parallel zum Durchmesser aa' durch die Endpunkte des Durchmessers cc' laufen. Offenbar kommt aber diese Eigenschaft der Asymptoten und der zugehörigen Berührungs-Geraden allen Hyperbeln zu, welche die cc' als imaginären Durchmesser gemein haben, wie auch der zugeordnete Durchmesser aa' in der Kehl-Ellipse E liege. Die Asymptoten aber aller der Hyperbeln, deren Ebenen in dem gemeinsamen Durchmesser cc' sich begegnen, bilden den Asymptoten-Kegel F' des Hyperboloides S, alle Verbindungs-Geraden AA' aber eine zur Ebene der E parallele Ebene, welche das Ellipsoid S im Punkte c berührt, und die Endpunkte aller Verbindungs-Geraden AA' eine Ellipse E', welche der Kehl-Ellipse E identisch ist. Daher der Satz:

Der Asymptoten-Kegel F' des einfachen Hyperboloides S schneidet die Cylinder-Fläche F in einer zur Kehl-Ellipse E parallelen und identischen Ellipse E', deren Ebene das Ellipsoid S' im Endpunkte c desjenigen Durchmessers cc' berührt, welcher der Ebene der Ellipse E zugeordnet ist.

Diese Eigenschaften der vier genannten Flächen führen zu einer merkwürdigen Beziehung, welche zwischen den räumlichen Inhalten derselben statt findet. Bezeichnen wir nemlich mit K den Inhalt des Asymptoten-Kegels zwischen seinem Scheitel m und der Ellipse E', mit E den Inhalt des halben Ellipsoides zwischen der Kehl-Ellipse E und der Berührungs-Ebene desselben, in welcher die Ellipse E' liegt, mit C und H den Inhalt bezüglich des Cylinders und des einfachen Hyperboloides zwischen denselben Grenz-Ebenen, so dass diese vier Körper dieselbe Höhe, die Entfernung der parallelen Ebenen der Ellipsen E und E', haben, und die Seitenflächen der letztern drei in der Kehl-Ellipse E sich berühren: so ist zunächst klar, dass eine Ebene P, welche zwischen den Ebenen der E und E' und parallel zu diesen Ebenen durchgeführt wird, die genannten Flächen in ähnlichen oder ähnlich liegenden Ellipsen schneidet, weil jede derselben zur Kehl-Ellipse E oder zur Ellipse E' ähnlich ist und ähnlich liegt. Ist nun (Taf. X. Fig. 1.) hh' der Schnitt, den die Ebene P mit der Durchmesser-Ebene aa', cc' macht, sind kn, en, zn, hn die Halbmesser der Ellipsen der Ebene P, welche der Reihe nach im Kegel, im Ellipsoid, im Cylinder, im Hyperboloid und zugleich in der Durchmesser-Ebene aa', cc' liegen, und werden der Kürze wegen die Halbmesser kn, en, zn, hn der Reihe nach mit k, e, c, h, sowie mit k', e' c', h' die conjugirten Halbmesser

derselben, welche in der Durchmesser-Ebene bb', cc' liegen werden, in gleicher Reihenfolge bezeichnet; so folgt für den Halbmesser k im Kegel

$$k^2 = \frac{\overline{am}^2}{\overline{cm}^2} \cdot \overline{mn}^2,$$

für den Halbmesser e im Ellipsoid aber

$$e^2 = \frac{\overline{am}^2}{\overline{cm}^2} (\overline{cm}^2 - \overline{nm}^2),$$

und aus der Verbindung dieser beiden Beziehungen

$$e^2 = \overline{am}^2 - k^2, \text{ oder } c^2 = k^2 + e^2.$$

Nun bestehen aber wegen der Aehnlichkeit der Ellipsen die constanten Verhältnisse

$$\frac{k}{k'} = \frac{e}{e'} = \frac{c}{c'} = \frac{h}{h'},$$

so dass aus der Gleichung für c, k und e die Relation

4) $$cc' = kk' + ee'$$

sich ergiebt. Von diesen Producten der conjugirten Halbmesser und von dem Conjugations-Winkel α derselben hängt einzig und allein der Inhalt der Ellipsen ab; weil aber dieser Conjugations-Winkel α in jeder der vier Ellipsen derselbe bleibt, so entsteht für diese Inhalte aus Gleichung 4)

5) $$cc'\pi \sin\alpha = kk'\pi \sin\alpha + ee'\pi \sin\alpha,$$

d. h. die Ellipsen im Asymptoten-Kegel und im Ellipsoid sind zusammen der Ellipse im Cylinder gleich.

Theilt man nun die Länge cm in n gleiche Theile, und legt durch jeden Theilpunkt eine Ebene parallel zur Ebene P, so wird diese Beziehung zwischen den drei Ellipsen jeder Schnitt-Ebene gültig bleiben, selbst noch, wie man leicht erkennt, für die Ellipsen der Grenzpunkte c und m. Dadurch aber zerlegt man den Asymptoten-Kegel, das halbe Ellipsoid und den Cylinder in n Elemente, die um so genauer als Cylinder von kleiner, aber gleicher Höhe gelten werden, je grösser die Theilzahl n angenommen wird. Für drei dieser elementaren Cylinder, die zwischen irgend zwei benachbarten Theil-Ebenen liegen, bleibt sonach die Beziehung der Gleichung 5) noch wahr, so dass der Cylinder im Asymptoten-Kegel K und im Ellipsoid E zusammen so gross sind, als der Cylinder im Cylinder C. Aus der Summe der Cylinder, welche die benachbarten Theil-Ebenen in jedem der drei Körper abschneiden, besteht aber die Masse jedes derselben, und weil die Anzahl der Theil-Ebenen, sonach der Theil-Cylinder der Zahl n gleich ist, so trägt sich das Gesetz von den Theil-Cylindern auf

die Summe derselben, d. i. auf die Massen der drei Körper über, so dass

$$6)\qquad C=K+E$$

oder der Cylinder C so gross ist, als der Asymptoten-Kegel K und das halbe Ellipsoid E. Weil nun, wie bekannt,

$$K=\frac{1}{3}C,$$

so folgt

$$E=\frac{2}{3}C,$$

das volle Ellipsoid ist sonach $\frac{2}{3}$ des Cylinders, dessen parallele Grundflächen und dessen Mantelfläche das Ellipsoid berühren.

Deshalb besteht zwischen dem Asymptoten-Kegel K, dem halben Ellipsoid E und dem Berührungs-Cylinder C dies Verhältniss:

$$7)\qquad K:E:C=1:2:3.$$

Für die zum Durchmesser cc' parallelen Ordinaten eq, hp der Ellipse aca' und der Hyperbel H hat man

$$\overline{eq}^2=\frac{\overline{cm}^2}{\overline{am}^2}(\overline{am}^2-\overline{qm}^2),$$

$$\overline{hp}^2=\frac{\overline{cm}^2}{\overline{am}^2}(\overline{pm}^2-\overline{am}^2);$$

und weil hp und eq gleiche Länge haben,

$$\overline{pm}^2+\overline{qm}^2=2\,\overline{am}^2,$$

oder zufolge der oben eingeführten Bezeichnung

$$h^2+e^2=2c^2.$$

Weil aber die Verhältnisse

$$\frac{h}{h'},\ \frac{e}{e'},\ \frac{c}{c'}$$

gleich sind, so geht die letzte Gleichung in

$$hh'+ee'=2cc'$$

über, so dass zwischen den Flächen der Ellipsen im Hyperboloid, Ellipsoid und Cylinder die Beziehung statt findet

8) $$hk'\pi\sin\alpha + ee'\pi\sin\alpha = 2cc'\pi\sin\alpha,$$

die Ellipsen im Hyperboloid und im Ellipsoid sind sonach zusammen doppelt so gross, als die Ellipse im Cylinder.

Wird auf diesen Satz dieselbe Schlussfolge aufgebaut, welche auf den Satz in Gleichung 6) angewendet wurde, so gelangt man zu der Beziehung

9) $$\mathrm{H} + \mathrm{E} = 2\mathrm{C},$$

oder das Hyperboloid H und das Ellipsoid E sind zusammen doppelt so gross, als der Cylinder C.

Nun ist

$$\mathrm{E} = \frac{2}{3}\mathrm{C}, \text{ sonach } \mathrm{H} = \frac{4}{3}\mathrm{C}$$

oder

$$\mathrm{H} = 2\mathrm{E}.$$

Berühren sich sonach ein einfaches Hyperboloid und ein Ellipsoid von gleichen und gleich liegenden conjugirten Durchmessern in einer Kehl-Ellipse, so ist der Inhalt des Hyperboloides doppelt so gross, als der des Ellipsoides, wenn die Grundflächen des Hyperboloides zur Kehl-Ellipse parallel liegen und das Ellipsoid berühren.

Nächstdem führen die Bemerkungen zu den Gleichungen 6) und 9) zu der Wahrheit, dass

10) $$\mathrm{K} : \mathrm{E} : \mathrm{C} : \mathrm{H} = 1 : 2 : 3 : 4.$$

Aus dieser einfachen Relation oder auch aus Gleichung 7) fliesst der bekannte Lehrsatz des Archimedes von Kegel, Kugel und Cylinder, wenn die drei conjugirten Durchmesser des Ellipsoides in die drei Achsen, und zwar in gleich grosse Achsen, sonach das Ellipsoid in eine Kugel, Cylinder und Kegel aber bezüglich in den geraden Kreis-Cylinder und Kreis-Kegel übergehen. In diesem Falle geben alle Ebenen, durch die imaginäre Achse cc' des Hyperboloides geführt, gleiche, und alle Ebenen, parallel zu dieser Achse gelegt, ähnliche gleichseitige Hyperbeln.

Die in 10) ausgesprochene Wahrheit gewährt eine reiche Ausbeute. Nur einige Folgerungen davon, die des Beweises kaum bedürfen, wollen wir anführen.

1) Alle Kegel haben gleichen Inhalt, deren Scheitel im Mittelpunkte eines Ellipsoides liegen, deren Grundflächen dieses Ellipsoid berühren, zu derjenigen Durchmesser-Ebene parallel liegen, welche dem Durchmesser des Berührungspunktes conjugirt ist, und an Gestalt und Grösse der Ellipse dieser Durchmesser-Ebene gleich sind.

2) **Alle Cylinder schliessen gleichen Inhalt ein, wenn ihre Grundflächen und Mantelflächen dasselbe oder ein gleich grosses Ellipsoid berühren.**

3) Alle Hyperboloide, deren Mantelflächen und Grundflächen dasselbe oder ein gleich grosses Ellipsoid berühren, haben gleichen Inhalt, wenn sie mit dem Ellipsoid dieselben conjugirten Durchmesser nach Lage und Grösse gemein haben.

Auch führt die Gleichung 10) zu einer Beziehung einfacher Hyperboloide, welche in derselben Kehl-Ellipse sich berühren, und deren imaginäre conjugirte Durchmesser auf einander fallen. Bedeuten nämlich H und H′ zwei einfache Hyperboloide, welche denselben Mittelpunkt m, dieselben reellen Durchmesser gemein haben, und deren conjugirte imaginäre Durchmesser (Taf. X. Fig 1.) cc' und dd' auf einander fallen; bezeichnen ferner H und H' die Hyperbeln, welche die Durchmesser-Ebene der aa', cc' bezüglich in den Hyperboloiden H und H′ abschneidet: so werden die Berührungs-Geraden an den Endpunkten a und a' des Durchmessers aa' für die eine oder die andere dieser beiden Hyperbeln zu cc' und bezüglich dd' parallel sein, folglich je zwei auf einander fallen. Beide Hyperbeln H und H' berühren sich sonach in den Endpunkten des gemeinsamen Durchmessers aa'. Dieselbe Schlussfolge wird aber für jedes Hyperbel-Paar statt finden, welche eine durch cc' gelegte Ebene in beiden Flächen abschneidet, so dass diese Flächen in der gemeinsamen Kehl-Ellipse E sich berühren. Hieraus folgt zugleich, dass jede zur Kehl-Ellipse E parallele Ebene P den Hyperboloiden H und H′ in zwei ähnlichen Ellipsen begegnet. Es liege nun diese Ebene P zwischen der Kehl-Ellipse und der Ebene der Ellipse E', deren Mittelpunkt auf c fällt, und treffe die Hyperbel H' in den Punkten v und v'; so gilt die Gleichung

$$11)\qquad \overline{vn}^2 = \frac{\overline{am}^2}{\overline{dm}^2}(\overline{nm}^2 + \overline{dm}^2).$$

Setzt man aber in dieselbe $\frac{1}{2}\overline{cm}^2$ statt $\overline{dm}^2$, oder $\frac{cm}{\sqrt{2}}$ statt dm ein, vertauscht am mit zn, $\frac{am}{cm}.nm$ mit kn, und bezeichnet man vn mit v, zn mit z und kn mit k, wie bereits in Gleichung 4) geschah, so entsteht

$$v^2 = 2k^2 + z^2,$$

und wenn man die zu v, k, z conjugirten Durchmesser bezüglich mit v', k', z' benennt, und erwägt, dass

$$\frac{v}{v'} = \frac{k}{k'} = \frac{z}{z'},$$

so gewinnt man die Beziehung

$$vv' = 2kk' + zz',$$



und deshalb für die Flächen der Ellipsen die Gleichung:

12) $$vv'\pi\sin\alpha = 2kk'\pi\sin\alpha + zz'\pi\sin\alpha,$$

wenn α den Winkel der conjugirten Durchmesser $2v$ und $2v'$, $2k$ und $2k'$, $2z$ und $2z'$, bezeichnet. Es ist sonach die Ellipse im Hyperboloide H' so gross, als die Ellipse im Cylinder C und die doppelte Ellipse im Asymptoten-Kegel K des Hyperboloides H.

Für die Ellipsen der Ebene P, wenn diese in die Ebene der Ellipse E' fällt, ergiebt sich, dass die Ellipse des Hyperboloides H' dreimal so gross ist, als die Ellipse des Asymptoten-Kegels K, weil die Ellipse des Cylinders und des Kegels in dieser Ebene gleich sind.

Werden nun an die Gleichung 12) und an die drei Körper H', K, C, welchen die drei Ellipsen angehören, dieselben Schlüsse angelehnt, welche auf die Ellipsen der Gleichung 6) und die zugehörigen Körper C, K, E gegründet wurden, so erhält man

13) $$\begin{cases} H' = 2K + C \text{ und} \\ H' = 5K \end{cases}$$

und deshalb mit Rücksicht auf Gleichung 10)

14) $$K : E : C : H : H' = 1 : 2 : 3 : 4 : 5.$$

Der erste Blick auf die in 11) und 13) aufgestellten Sätze zeigt eine allgemeine Beziehung zwischen den einfachen Hyperboloiden, die von derselben Kehl-Ellipse E und der durch c gelegten, zur E parallelen Ebene begrenzt werden. Denn vertauscht man den imaginären Halbmesser dm des Hyperboloides H' nach und nach mit den Werthen

$$\frac{cm}{\sqrt{2}}, \frac{cm}{\sqrt{3}}, \frac{cm}{\sqrt{4}}, \ldots\ldots \frac{cm}{\sqrt{n}}$$

für irgend eine positive Ganzzahl, ja selbst Bruchzahl n, grösser als die Einheit, so entstehen für die zugehörigen Hyperboloide die Zahlen

$$5, 6, 7, \ldots. n+3,$$

und für die Grundflächen ihrer Ellipsen, die ihre Mittelpunkte im Punkte c haben, die Zahlen

$$2, 3, 4, \ldots. n+1.$$

Bedeuten daher

$$H, H_1, H_2, \ldots. H_n$$

die Massen einfacher Hyperboloide, welche in der gemeinsamen Kehl-Ellipse E sich berühren, werden

diese Körper von zwei Ebenen P und P' begrenzt, die zur Kehl-Ellipse parallel und durch die Endpunkte c, c' des imaginären conjugirten Durchmessers von H gehen, bezeichnen ferner

$$L, L_1, L_2, \ldots. L_n$$

die Ellipse n der Ebene P und der Reihe nach der Hyperboloide H, H_1, H_2,....H_n, und sind

$$c, c_1, c_2, \ldots. c_n$$

die zur Ebene der Kehl-Ellipse conjugirten imaginären Durchmesser derselben Körper: so verhalten sich die Massen

$$H : H_1 : H_2 \ldots. : H_n = 4 : 5 : 6 \ldots. : n+3,$$

wenn

$$L : L_1 : L_2 \ldots. : L_n = 2 : 3 : 4 \ldots. : n+1,$$

oder wenn

$$c : c_1 : c_2 \ldots. : c_n = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{3}} \ldots. : \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

Der in Gleichung 10) aufgestellte Satz ist einer allgemeineren Bedeutung fähig, die fast unmittelbar aus den Eigenschaften des einfachen Hyperboloides, des Asymptoten-Kegels und des Cylinders der Kehl-Ellipse hervortritt, die aber in Begleitung einfacher Gesetze erscheint, wenn man folgenden Betrachtungen nachgeht.

Es bedeute wieder H eine Hyperbel des einfachen Hyperboloides S, welche mit dieser Fläche den Mittelpunkt m und den imaginären Durchmesser cc' gemein habe. Die Endpunkte aller imaginären Durchmesser dieser Hyperbel liegen in einer zweiten Hyperbel H', deren Natur bekanntlich darin sich zu erkennen giebt, dass ihre reellen Durchmesser zu imaginären Durchmessern der H, und umgekehrt werden, dass ihre Asymptoten auf die der Hyperbel H fallen, ihr Asymptoten-Winkel aber den Asymptoten-Winkel der H zu zwei Rechten ergänzt. Wir nennen deshalb die Curven H und H' conjugirte Hyperbeln. Jede Ebene also, welche durch den imaginären Durchmesser cc' des einfachen Hyperboloides gelegt wird, enthält ein Paar conjugirter Hyperbeln H und H'. Die ersteren haben cc' als imaginären Durchmesser gemein und liegen im einfachen Hyperboloid S. Die letzteren haben cc als reellen Durchmesser gemein, und bilden eine zweite Fläche Σ, welche aus zwei symmetrischen Mänteln oder Fächern besteht. Beide Flächen S und Σ haben denselben Mittelpunkt m, denselben Asymptoten-Kegel F', dieselben conjugirten Durchmesser aa', bb', cc', und zwar aa', bb' reell

für die eine, imaginär für die andere Fläche, und dieselben conjugirten Durchmesser-Ebenen gemeinsam. Beide Flächen werden von jeder zur Kehl-Ellipse E parallelen Ebene P in Ellipsen geschnitten, die der Ellipse E ähnlich sind und ähnlich liegen. Wegen dieser bekannten Eigenschaften der Fläche Σ, des Hyperboloides mit zwei Fächern, oder des zweifachen Hyperboloides, bezeichnen wir die zwei Flächen S und Σ mit dem Namen der conjugirten Hyperboloide

Es seien nun (Taf. X. Fig. 2.) H, H' und kmk' die Durchschnitte einer durch cc' gelegten Ebene Q bezüglich mit den conjugirten Hyperboloiden S, Σ und deren Asymptoten-Kegel F. und P sei eine Ebene parallel der Kehl-Ellipse, welche folglich diesen drei Flächen in drei ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen begegnet, und welche die Linien H, kmk', H' der Reihe nach in den Endpunkten der Durchmesser hh', kk', vv' schneide: so erhält man, zufolge der Eigenschaften der Hyperbeln H, H' und der ähnlichen Dreiecke kmn und mda, in welchen mc und ad parallel und folglich gleich sind, die Gleichungen:

$$\overline{hn}^2 = \frac{\overline{am}^2}{\overline{cm}^2}(\overline{nm}^2 + \overline{cm}^2),$$

$$\overline{vn}^2 = \frac{\overline{am}^2}{\overline{cm}^2}(\overline{nm}^2 - \overline{cm}^2),$$

$$\overline{kn}^2 = \frac{\overline{am}^2}{\overline{cm}^2} \cdot \overline{nm}^2;$$

oder wenn man hierin der Kürze wegen h, v, k, a, statt hn, vn, kn, am der Reihe nach einschaltet, und die dritte Gleichung mit den beiden ersten verbindet, die Relationen:

$$15)\quad \begin{cases} h^2 = k^2 + a^2 \\ v^2 = k^2 - a^2 \\ h^2 + v^2 = 2k^2. \end{cases}$$

Bezeichnet man nun mit h', v', k' bezüglich die zu h, v, k conjugirten Halbmesser der drei Ellipsen, welche der Ebene P einerseits, andererseits dem Hyperboloide S, dem Hyperboloide Σ und deren Asymptoten-Kegel F der Reihe nach angehören, mit a' aber den zu a conjugirten Halbmesser der Kehl-Ellipse E, und berücksichtiget man, dass wegen der Aehnlichkeit der in Rede stehenden vier Ellipsen die gleichen Verhältnisse

$$\frac{h}{h'} = \frac{v}{v'} = \frac{k}{k'} = \frac{a}{a'}$$

statt finden, so entstehen aus 15) die Gleichungen

$$hh' = kk' + aa',$$

$$vv' = kk' - aa',$$

$$hh' + vv' = 2kk';$$

oder weil einzig von diesen Producten der conjugirten Halbmesser und von den Conjugations-Winkeln derselben die Flächenräume der zugehörigen Ellipsen abhängen, diese Conjugations-Winkel aber der ähnlichen Gestalt und ähnlichen Lage der Ellipsen wegen gleich sind, die Gleichungen

$$16)\quad \begin{cases} hh'\pi\sin\alpha = kk'\pi\sin\alpha + aa'\pi\sin\alpha, \\ vv'\pi\sin\alpha = kk'\pi\sin\alpha - aa'\pi\sin\alpha, \\ 2kk'\pi\sin\alpha = hh'\pi\sin\alpha + vv'\pi\sin\alpha, \end{cases}$$

welche sich leicht in Worten darstellen lassen.

Dass die Flächen-Beziehungen der Gleichung 16) für jede zur Kehl-Ellipse E parallele Ebene P gelten müssen, leuchtet ohne Beweis ein, selbst für die Grenzlage P' derselben, welche den Punkt c enthält, wenn man erwägt, dass diese Ebene P' den Asymptoten-Kegel F' und den Berührungs-Cylinder C der Kehl-Ellipse in einer und derselben Ellipse E' schneidet, welche mit der Kehl-Ellipse E identisch ist, dass sie aber zugleich das Hyperboloid Σ im Punkte c berührt, weil alle Berührungs-Geraden der zu H conjugirten Hyperbeln H' im Punkte c zu einem Durchmesser der Kehl-Ellipse parallel liegen.

Bezeichnen wir nun die körperlichen Räume der conjugirten Hyperboloide S und Σ bezüglich mit Y und Υ, des Cylinders, dessen Basis in der Ellipse E', und dessen Erzeugenden parallel zur cc' liegen, mit Z, und den Stumpf des Asymptoten-Kegels mit M, unter der Annahme, dass diese Räume zugleich von zwei parallelen Ebenen P und P' begrenzt werden, in deren eine die Ellipse E' fällt, so erhält man, zufolge der mehrfach oben benutzten Schlussweise, aus den Gleichungen 16):

$$17)\quad \begin{cases} \mathrm{Y} = \mathrm{M} + \mathrm{Z} \\ \Upsilon = \mathrm{M} - \mathrm{Z} \\ 2\mathrm{M} = \mathrm{Y} + \Upsilon. \end{cases}$$

Der Kegelstumpf M ist also so gross, als

1) der hyperbolische Stumpf Y weniger dem Cylinder Z der Kehl Ellipse,

2) der hyperbolische Stumpf Υ und der Cylinder Z zusammen,

3) die Hälfte der Summe von beiden hyperboloidischen Abschnitten Y und Υ.

Setzt man an die Körper Y, Z und M der Reihe nach die in Gleichung 10) bezeichneten Körper H, C und K, und berücksichtigt, dass zufolge derselben Gleichung 10)

$$\mathrm{H} = \mathrm{C} + \mathrm{K}$$

ist, so ergiebt sich aus der ersten Gleichung in 17) der Satz: der Raum des einfachen Hyperboloides ist so gross,

als der des Berührungs-Cylinders der Kehl-Ellipse und des Asymptoten-Kegels zusammen, wenn diese drei Körper von zwei parallelen Ebenen begrenzt werden, in deren einer die Kehl-Ellipse liegt.

Dieser Satz geht übrigens, wie wir bereits oben andeuteten, aus den Gleichungen (Taf. X. Fig. 2.):

$$\overline{hn}^2 = \frac{\overline{am}^2}{\overline{cm}^2}(\overline{nm}^2 + \overline{cm}^2),$$

$$\overline{kn}^2 = \frac{\overline{am}^2}{\overline{cm}^2} \cdot \overline{nm}^2$$

unmittelbar hervor, weil sie für jeden Punkt h der Hyperbel H und den zugehörigen Punkt k der Asymptote gelten, und deshalb die erste der Gleichung 16) für jede Schnitt-Ebene P zwischen c und m gültig bleibt.

Macht man endlich nm dem imaginären Durchmesser cc' oder $2cm$ gleich und bezeichnet die Räume, in welche Y, T, Z und M dadurch übergehen, der Reihe nach mit Y', T', Z' und M'; so findet man leicht aus der Vergleichung dieser Räume mit den in 10) bezeichneten Körpern C, K und H, dass

$$Z' = C = 3K, \text{ und } M' = 7K;$$

und in Verbindung mit der zweiten Gleichung in 17.), dass

$$18) \qquad T' = H.$$

Schneidet man sonach zwei conjugirte Hyperboloide durch drei parallele Ebenen P, P', P'' dergestalt, dass die P dem einfachen Hyperboloide in einer Kehl-Ellipse begegnet, die P' das zweifache Hyperboloid berührt, und dass P'' und P von P' gleichweit abstehen, so ist der Raum des einfachen Hyperboloides zwischen den Ebenen P und P' so gross, als der Raum des zweifachen Hyperboloides zwischen den Ebenen P' und P''.

Aus diesem Satze und aus Gleichung 17) folgt zugleich die einfache Beziehung:

$$19) \qquad T' : M' : Y' = 4 : 7 : 10.$$

XXXI.

Berichtigung der Theorie des Segner'schen Wasserrades und seiner Würdigung für die Praxis.

Von dem

Herrn Professor J. A. Schubert

an der technischen Bildungsanstalt zu Dresden.

Das Segner'sche Wasser- oder Reactionsrad besteht bekanntlich:

1) aus einer Kernröhre, die um ihre Achse drehbar ist,

2) aus einer beliebigen Anzahl gerader Röhren, Schwungröhren genannt, die winkelrecht auf der Kernröhre sitzen und mit ihr communiciren,

3) aus Ausflussöffnungen, nämlich eine am äusseren Ende jeder Schwungröhre, die sämmtlich gleichen Abstand von der Achse der Kernröhre haben, auf derselben Seite der Schwungröhren liegen, und deren Flächen sich verlängert in der Achse der Kernröhre schneiden.

Das Betriebswasser wird, wie ebenfalls bekannt ist, der in der Regel vertikalen Kernröhre entweder von oben oder von unten zugeführt, es tritt von hier in die Schwungröhren und fliesst durch die an den Enden der letzteren befindlichen Oeffnungen in einer Richtung aus, die mit dem geometrischen Raume zusammenfällt, den die Ausflussöffnungen bei ihrer Drehung um die Achse der Kernröhre beschreiben, während das Rad selbst eine Umdrehungsrichtung annimmt, die der des ausfliessenden Wassers entgegen gesetzt ist.

Die theoretische Leistungsfähigkeit des Segner'schen Rades, wie sie bis jetzt aufgestellt wurde, stimmt mit der Erfahrung nicht überein; sie ist nämlich beträchtlich grösser, als sie durch directe Messungen gefunden wird, und ein genügender Nachweis über

Verlustesquellen, welche die Differenz zwischen dem theoretischen und gemessenen Effect begründen, ist noch nicht gegeben. Die wahre Ursache dieser Verschiedenheit liegt einfach darin: dass der Wirkungsgrad, den man bisher für das Segner'sche Rad berechnete, falsch ist. Nicht die Methode, deren man sich hierbei bedient, trägt so eigentlich die Schuld, sondern die irrige Deutung des Resultates, oder auch die unrichtige Auffassung des Wesens der Segner'schen Reactionsräder. Die theoretische Leistungsfähigkeit des Segner'schen Rades wird häufig, wie folgend bestimmt:

Steht der Spiegel des durch die Maschine gehenden Wassers h Fuss über jeder Ausflussöffnung, dann ist die hiervon abhängige Geschwindigkeit seines Ausflusses aus den Schwungröhren

$$\sqrt{2gh}.$$

Dreht sich das Rad um seine Achse, dann muss das Betriebswasser während seines Durchganges durch jede Schwungröhre bis zur Ausflussöffnung derselben hin, nothwendig die kreisende Geschwindigkeit c dieser mit annehmen, wodurch die der Druckhöhe entsprechende Geschwindigkeit übergeht in:

$$C=\sqrt{(2gh+c^2)}.$$

Mit dieser Geschwindigkeit bewegt sich das Wasser gegen die Wände der Ausflussöffnung selbst; die absolute Geschwindigkeit seines Ausflusses oder jene, die es gegen einen festen Punkt in der Umdrehungsebene seiner Ausflussöffnung hat, muss folglich sein

$$C-c.$$

Hiernach ist die Druckhöhe, die dem Wasser noch inwohnt, wenn es das Rad verlässt:

$$\frac{(C-c)^2}{2g},$$

mithin die Druckhöhe, die das Wasser an das Rad abgesetzt hat:

$$h-\frac{(C-c)^2}{2g},$$

und demgemäss die Leistungsfähigkeit des letztern in 1 Sec.

$$E=m\left\{h-\frac{(C-c)^2}{2g}\right\},$$

wenn in eben dieser Zeit m Pfunde Wasser durch das Rad gehen.

Durch Einführung des für C schon bestimmten Werthes geht die letzte Gleichung über in

$$(1) \qquad E=\frac{m}{2g}\{2c\sqrt{(2gh+c^2)}-2c^2\}.$$

Sachgemässer als die eben befolgte Methode, halte ich die Herleitung der letzten Gleichung mit Benutzung der Reaction des Wassers, die bekanntlich mit dem Wasserstoss identisch ist. Diese Methode schützt gegen irrthümliche Auffassung, was bei der ersten nicht immer der Fall ist. Jene gilt nämlich überhaupt, reicht gleichsam bis zu den möglichen Grenzen, während diese ein Resultat giebt, das sich nur auf die reactionsweise Wirkung des Wassers gründet. Den Beweis zu dieser vielleicht auffälligen Behauptung kann ich bei dem Segner'schen Wasserrade nicht vollständig, wohl aber bei der schottischen Turbine geben, die ich in einem zweiten Aufsatze betrachten werde. Indess bestätigt sich diese Behauptung doch schon insofern in der gegenwärtigen Abhandlung, als sie die übliche Deutung des Werthes E sehr leicht als irrthümlich erkennen lehrt.

Mit Anwendung der Reaction des Wassers findet sich die Gleichung (1) wie folgend:

Die Reaction von m Pfunden Wasser, die in 1 Sec. mit der Geschwindigkeit C durch die Ausflussöffnung fliessen, ist bekanntlich, wenn die letztere mit der Geschwindigkeit c der Richtung des ausfliessenden Wasserstrahles gerade entgegengesetzt ausweicht:

$$\frac{m}{g}\{C-c\},$$

folglich die mechanische Leistung der reactionsweisen Wirkung der m Pfunde Wasser, die in 1 Sec. durch die Maschine gehen:

$$\frac{mc}{g}\{C-c\},$$

d. h. wenn für C sein oben stehender Werth eingesetzt wird:

$$E=\frac{mc}{g}\{\sqrt{(2gh+c^2)}-c\}$$

oder

$$\{1\}. \qquad E=\frac{m}{2g}\{2c\sqrt{(2gh+c^2)}-2c^2\}.$$

Gemäss der Gleichung (1) oder {1} wird die Leistung eines Segner'schen Rades zu 0,

erstens wenn $c=0$ und

zweitens wenn $\sqrt{(2gh+c^2)}-c=0$, d. i.

wenn $2gh=0$ oder $h=0$ ist.

Gegen diese Ergebnisse der Gleichung (1) sind keine Einwendungen zu machen.

Die Gleichung (1) nimmt ferner und zwar wegen

$$\sqrt{(2gh + c^2)} = c + \frac{gh}{c} - \frac{g^2h^2}{2c^2} \ldots$$

die Form

$$E = \frac{m}{g} \left\{ gh - \frac{g^2h^2}{2c^2} \ldots \right\}$$

an, aus der sich ergiebt

$$E = mh,$$

also die volle Wirkung des verwendeten Wassers, wenn c gegen gh unendlich gross ist. Hieraus hat man die Folgerung gezogen: die Leistungsfähigkeit des Segner'schen Rades nähert sich um so mehr der des verbrauchten Wassers, je grösser seine Umdrehungsgeschwindigkeit genommen wird.

Die Unrichtigkeit dieser Folgerung stellen vergleichende Versuche mit einem Segner'schen Rade ausser allem Zweifel; denn die grösste Leistungsfähigkeit eines solchen findet bei einer Geschwindigkeit statt, die viel kleiner als $\sqrt{2gh}$ ist; ja selbst die Geschwindigkeit c des unbelasteten oder leergehenden Rades ist noch kleiner als $\sqrt{2gh}$, also weit entfernt von einer unendlich grossen Geschwindigkeit. Ist aber dem so, wie nicht in Abrede gestellt werden kann, dann muss auch die Gleichung (1) für die Leistung des Segner'schen Rades nothwendig falsch sein. Der Fehler der Gleichung (1) liegt ganz einfach darin, dass man die Leistung E als Nutzleistung nimmt, während dieselbe doch mit dazu dienen muss, dem Betriebswasser vor seinem Eintritt in die Ausflussöffnungen der Schwungröhren die Geschwindigkeit c zu ertheilen, womit die Leistung

$$\frac{mc^2}{2g} \tag{2}$$

verbraucht wird. Die Wahrheit dieser Deutung des Werthes E ist für die Herleitung der Gleichung unter (1) nicht so augenfällig, als für die unter {1}. Diese ist nämlich für die als vorhanden angenommene Umdrehungsgeschwindigkeit c bestimmt, so dass die zur Beschaffung eben dieser Geschwindigkeit erforderliche Kraft, d. i. die unter (2), von E abgegeben werden muss, während es bei der Gleichung unter (1), mit Hinsicht auf ihre Auffindung, den Anschein hat, als würde durch die Differenz zwischen der ursprünglichen Kraft des Betriebswassers und jener, die ihm bei dem Austritt aus der Maschine noch beiwohnt, der Aufwand für Herstellung der kreisenden Bewegung mit getroffen.

Bezeichnet man die Nutzleistung des Segner'schen Rades mit e, dann ergiebt sich:

$$E = e + \frac{mc^2}{2g},$$

also mit Hinsicht auf (1)

$$e = \frac{m}{2g}\{2c\sqrt{(2gh+c^2)} - 2c^2\} - \frac{mc^2}{2g},$$

oder

$$\text{I.} \quad e = \frac{m}{2g}\{2c\sqrt{(2gh+c^2)} - 3c^2\}.$$

Zufolge dieser Gleichung wird die wahre Leistungsfähigkeit eines Segner'schen Rades für irgend eine Druckhöhe h gleich a,

erstens für $c=0$ und

zweitens für $2c\sqrt{(2gh+c^2)} = 3c^2$ d. i.

drittens für $c=0{,}8944\sqrt{2gh}$ d. h.

im Leergange erreicht die Geschwindigkeit der Ausflussöffnungen eines Segner'schen Rades noch nicht jene, die der Druckhöhe h zugehört. Versuche bestätigen die Geschwindigkeit c für den Leergang vollständig; die gemessene Umlaufsgeschwindigkeit ergiebt sich nämlich für den Leergang stets um etwas geringer, als die Gleichung (3) vorschreibt, was der Zapfenreibung und des Luftwiderstandes wegen so sein muss. Die Gleichung I. giebt ferner:

für $c=0{,}3\sqrt{2gh}$; $e=0{,}356\,mh$;
„ $c=0{,}4\sqrt{2gh}$; $e=0{,}376\,mh$;
„ $c=0{,}41\sqrt{2gh}$; $e=0{,}38130\,mh$;
„ $c=0{,}42\sqrt{2gh}$; $e=0{,}38136\,mh$;
„ $c=0{,}43\sqrt{2gh}$; $e=0{,}38098\,mh$;
„ $c=0{,}44\sqrt{2gh}$; $e=0{,}38016\,mh$;
„ $c=0{,}5\sqrt{2gh}$; $e=0{,}368\,mh$;
„ $c=0{,}6\sqrt{2gh}$; $e=0{,}319\,mh$.

Diese Entwickelungen zeigen, dass sich die grösste Leistungsfähigkeit eines Segner'schen Rades bei einer Umdrehungsgeschwindigkeit der Ausflussöffnungen von nahe

$$(4) \qquad c=0{,}42\sqrt{2gh}$$

herausstellt, und dass jene nahezu

$$(5) \qquad e=0{,}38136\,mh$$

beträgt.

Auch diese grösste Leistungsfähigkeit des Segner'schen Rades und die ihr zugehörende Geschwindigkeit bestätigen Versuche so vollständig, als diess nur erwartet werden kann.

Mit der Gleichung (1), die bisher als Effectsgleichung für das Segner'sche Rad genommen wurde, fallen auch die Folgerungen, die man aus derselben für die praktische Verwendung eben dieses Rades, ungeachtet ihres Widerspruches mit der Erfahrung, gezogen hat. Wenn dagegen die Begründung der Effectsgleichung I. für Segner's Reactionsrad an sich als richtig erkannt werden muss, ja deren völlige Uebereinstimmung mit den Ergebnissen angestellter Versuche ein gewichtiger Beweis für deren Richtigkeit ist, dann haben auch die längst gemachten Erfahrungen endlich ihre Begründung in der Gleichung I. gefunden, nämlich:

dass das Segner'sche Wasserrad keinen grösseren Nutzeffect, als gegen 38 pCt. desjenigen, der dem verbrauchten Wasser entspricht, hervorbringt;

dass dieser Effect nur bei einer Geschwindigkeit der Ausflussöffnungen besteht, die gegen

$$0{,}42\sqrt{2gh}$$

beträgt;

dass die Ausflussöffnungen des Segner'schen Rades im Leergange eine höchste Geschwindigkeiten von gegen

$$0{,}8944\sqrt{2gh}$$

annehmen; und

dass das Segner'sche Reactionsrad jenen Wasserrädern zugezählt werden muss, die dem Betriebswasser eine nur geringe Nutzleistung zu entziehen vermögen.

XXXII.

Eine mechanische Aufgabe.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Die zwei Punkte B und C in Taf. X. Fig. 3. seien durch die unveränderliche Linie BC fest mit einander verbunden; C könne sich bloss auf der Linie AM bewegen, während B sich entweder bloss auf AN bewegen kann, oder wenn seine Bewegung frei ist, so geschehe sie nach der Richtung dieser Linie; man wünscht das Verhältniss der Geschwindigkeiten beider Punkte in der Lage BC zu kennen.

Man lasse B sich um den (unendlich kleinen) Weg BE bewegen, so wird C sich durch den (ebenfalls unendlich kleinen) Weg CD bewegen, und wenn v_1, v_2, die Geschwindigkeiten von B und C sind, so hat man

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{BE}{CD}.$$

Sehen wir zunächst davon ab, dass BE unendlich klein sein soll, und sei:

$$AB=k,\ AC=l,\ BC=ED=a,\ BE=m;$$

so ist:

$$a^2=k^2+l^2-2kl\cos\varphi,$$

also

$$a^2-k^2\sin^2\varphi=k^2\cos^2\varphi-2kl\cos\varphi+l^2=(l-k\cos\varphi)^2. \qquad (1)$$

Ferner

$$k+m:\sin d=a:\sin\varphi,\ \sin d=\frac{(k+m)\sin\varphi}{a},$$

$$AD = \sqrt{a^2 + (k+m)^2 + 2a(k+m)\cos(\varphi + d)}$$

$$= \sqrt{\left\{ \begin{array}{c} k^2 + l^2 - 2kl\cos\varphi + (k+m)^2 \\ + 2(k+m)\cos\varphi\sqrt{a^2 - (k+m)^2\sin^2\varphi} - 2(k+m)^2\sin^2\varphi \end{array} \right\}}$$

Da für $m=0$, $AD=l$, und hier

$$AD = \sqrt{k^2 + l^2 - 2kl\cos\varphi + k^2 + 2k\cos\varphi\sqrt{a^2 - k^2\sin^2\varphi} - 2k^2\sin^2\varphi},$$

so muss in (1) gesetzt werden:

$$\sqrt{a^2 - k^2\sin^2\varphi} = l - k\cos\varphi. \qquad (2)$$

Man erhält nun:

$$\frac{BE}{DC} = \frac{m}{\left\{ \begin{array}{c} l - \sqrt{[k^2 + l^2 - 2kl\cos\varphi + (k+m)^2} \\ + 2(k + m\cos\varphi\sqrt{a^2 - (k+m)^2\sin^2\varphi} - 2(k+m)^2\sin^2\varphi]. \end{array} \right\}}.$$

Lässt man hier m unendlich abnehmen, so stellt sich dieser Bruch unter der Form $\frac{0}{0}$ dar. Differenzirt man also Zähler und Nenner nach m, setzt dann $m=0$ und beachtet die Gleichung (2), so erhält man leicht:

$$\frac{BE}{DC} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{l - k\cos\varphi}{k - l\cos\varphi} = \frac{AC - AB.\cos\varphi}{AB - AC.\cos\varphi}. \qquad (3)$$

Steht BF senkrecht auf AM, CG senkrecht auf AN, so ist

$$AF = AB.\cos\varphi, \quad AG = AC.\cos\varphi;$$

also auch:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{AC - AF}{AB - AG} = \frac{FC}{BG}.$$

Ist der Bruch $\frac{AC - AB.\cos\varphi}{AB - AC.\cos\varphi}$ positiv, so sind v_1, v_2 nach verschiedenen Richtungen, von A aus gerechnet; ist er negativ, so sind sie nach derselben Richtung.

Der Fall $\varphi=0$ ist hier ausgeschlossen, weil in diesem Falle l und k unbestimmt werden.

Ist $AB = AC.\cos\varphi$, ohne dass $AC = AB.\cos\varphi$, d. h. ohne dass $\cos^2\varphi = 1$, so ist $v_2 = 0$. Für $\varphi = 90^0$ ist

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{AC}{AB}.$$

Man kann auch nach dem Punkte O fragen, in welchem die Linien BC und DE sich schneiden. Zu diesem Ende sei AB

Abscissenaxe, AC Ordinatenaxe, so sind, wenn $AD=p$, die Koordinaten von:

B: k, 0,
E: $=k+m, 0$,
C: 0, l
D: 0, p

also die Gleichung von BC: $y=\frac{lx}{k}-l$,

ED: $\frac{px}{k+m}-p$.

Desswegen finden sich die Koordinaten des Punktes O:

$$\frac{(l-p)k(k+m)}{(l-p)k+lm},\quad \frac{-plm}{(l-p)k+lm}.$$

Die Länge von BO

$$=\sqrt{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{plm}{(l-p)k+lm}\right)^2+\left(\frac{(l-p)k(k+m)}{(l-p)k+lm}-k\right)^2\\ +\frac{2plm}{(l-p)k+lm}\left(\frac{(l-p)k(k+m)}{(l-p)k+lm}-k\right)\cos\varphi\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{pma}{(l-p)k+lm}.$$

Also

$$\frac{BO}{BC}=\frac{pm}{(l-p)k+lm}.$$

Setzt man $m=0$, beachtet, dass alsdann

$$p=l,\quad \frac{\partial p}{\partial m}=\frac{k-l\cos\varphi}{l-k\cos\varphi};$$

so ist für $m=0$:

$$\frac{BO}{BC}=\frac{l(l-k\cos\varphi)}{l^2-k^2},$$

woraus

$$\frac{OB}{OC}=\pm\frac{l(l-k\cos\varphi)}{k(l\cos\varphi-k)}. \qquad (4)$$

Für $\varphi=90^0$ z. B.

$$\frac{OB}{OC}=\frac{l^2}{k^2}.$$

Den Satz (3) kann man auch in folgender Weise beweisen.

Sei $\frac{\partial x}{\partial t}=\varphi(t)$ die Geschwindigkeit von B in der Entfernung x von A, so ist also, nebenbei gesagt:

$$x=\int_0^t \varphi(t)dt,$$

d. h. wenn $\int\varphi(t)dt=\psi t)$ und x_1 die ursprüngliche Entfernung des Punktes B von A:

$$x=\psi(t)+x_1.$$

Heisst y die Entfernung AC des Punktes C von A, so ist $\frac{\partial y}{\partial t}$ seine Geschwindigkeit am Ende der Zeit t. Nun ist immer

$$a^2=x^2+y^2-2xy\cos\varphi.$$

Hieraus folgt

$$0=x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial x}{\partial t}y\cos\varphi-x\frac{\partial y}{\partial t}\cos\varphi,$$

d. h.

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{y\cos\varphi-x}{y-x\cos\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}=-\frac{x-y\cos\varphi}{y-x\cos\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}, \tag{5}$$

was eben der Satz (3) ist.

Zugleich folgt, nach den gemachten Annahmen:

$$a^2=(\psi(t))^2+2x_1\psi(t)+x_1{}^2+y^2-2y\psi(t)\cos\varphi-2x_1y\cos\varphi. \tag{6}$$

Die Zeit t, in welcher C den Punkt A erreicht, bestimmt sich also durch die Gleichung:

$$a^2=(\psi(t))^2+2x_1\psi(t)+x_1{}^2,\quad \psi(t)+x_1=\pm a. \tag{7}$$

Sei z. B. $\frac{\partial x}{\partial t}=\alpha$, so ist die Gleichung (7):

$$a^2=\alpha^2t^2+2\alpha x_1t+x_1{}^2=(\alpha t+x_1)^2,$$

$$\alpha t+x_1=\pm a,$$

$$t=\frac{\pm a-x_1}{\alpha}.$$

Ist x positiv und $> a$, so kann hier nur das obere Zeichen gelten, und es ist

$$t=\frac{a-x_1}{\alpha}.$$

Nach dieser Zeit geht C zurück über den Punkt A hinaus

XXXIII.

Mathematisches Gesetz des Wachsthums der Abgaben von Erbschaften.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Lamé in den Comptes rendus (Tom. XXVII. Nr. 6. vom 7. Aug. 1848) hat dies in folgender Weise dargestellt.

Sei a eine Summe, die Jemand jährlich zurücklegt, r der Zins von 1 Thlr im Jahr, so wird, nach Umfluss von n_1 Jahren, das angesammelte Kapital sammt Zinseszinsen bekanntlich sein:

$$\frac{a}{r}\left[(1+r)^{n_1}-1\right].$$

Heissen wir diese Summe A und nehmen an, es sei $Ar=a$, d. h. A sei so beschaffen, dass dieses Kapital jedes Jahr denselben Zins trägt, als die frühere jährliche Ersparniss war, so ist

$$A\left[(1+r)^{n_1}-1\right]=A,$$

$$(1+r)^{n_1}=2,$$

$$n_1=\frac{\log 2}{\log(1+r)}; \qquad (1)$$

durch welche Gleichung nun n_1 bestimmt ist. Man lege nun fort jährlich a Th. zurück, und es dauere weitere n_2 Jahre, bis die angesammelte Summe $2A$ beträgt, so ist:

$$A(1+r)^{n_2}+\frac{a}{r}\left[(1+r)^{n_2}-1\right]=2A,$$

$$(1+r)^{n_2}=\frac{3}{2}.$$

$$n_2 = \frac{\log\frac{3}{2}}{\log(1+r)}. \tag{2}$$

Allgemein, wenn nach Umfluss von $n_1 + n_2 + \ldots + n_{m-1}$ Jahren die angesammelte Summe $(m-1)A$ Th. beträgt, und man legt noch n_m Jahre lang jährlich a Th. zurück, so dass dann die Summe mA Th. betrage, so ist

$$(m-1)A(1+r)^{n_m} + \frac{a}{r}\left[(1+r)^{n_m} - 1\right] = mA,$$

$$(1+r)^{n_m} = \frac{m+1}{m},$$

$$n_m = \frac{\log\left(\frac{m+1}{m}\right)}{\log(1+r)}. \tag{3}$$

Bis also die angehäufte Summe $= mA$ sei, bedarf es

$$\frac{1}{\log(1+r)}\left[\log\frac{2}{1} + \log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} + \log\frac{5}{4} + \ldots\ldots + \log\frac{m+1}{m}\right]$$
$$= \frac{\log(m+1)}{\log(1+r)} \text{ Jahre.}$$

Daraus geht aber auch hervor, dass die Schwierigkeit, sein Vermögen, wenn es einmal A geworden ist, auf $2A$, $3A$, ... mA zu erhöhen, sich zu der Schwierigkeit, es auf A zu bringen, verhalte wie

$$\log\frac{3}{2}, \log\frac{4}{3}, \log\frac{5}{4}, \ldots\ldots \log\frac{m+1}{m} \text{ zu } \log 2;$$

d. h. dass die verhältnissmässige Leichtigkeit, sein Vermögen auf A, $2A$, $3A$, ... mA zu bringen, sei:

$$1, \frac{\log 2}{\log\frac{3}{2}}, \frac{\log 2}{\log\frac{4}{3}}, \ldots\ldots \frac{\log 2}{\log\frac{m+1}{m}}.$$

Da a eine willkührliche Zahl ist, so ist es natürlich auch A, das also jedes Kapital bedeuten kann.

Da nun der Staat die Häufung des Kapitals durch seine Einrichtungen schützt, so ist die Abgabe auf Erbschaften oder Schenkungen unter Lebenden nichts Anderes, als der Preis dieses Schutzes. Die Abgabe wird daher um so stärker sein dürfen, als die Leichtigkeit der Vermehrung grösser war.

Gesetzt also, diese Abgabe sei bei einer Erbschaft A (z. B. 20000 Th.) gleich 1 von 100, so wird sie bei einer Erbschaft $2A$ in folgender Weise zu berechnen sein:

Für die ersten A Thaler ist sie $\frac{A}{100}$, für die zweiten A dagegen $\frac{A}{100}\cdot\frac{\log 2}{\log\frac{3}{2}}$, also im Ganzen

$$\frac{A}{100}\left[1+\frac{\log 2}{\log\frac{3}{2}}\right].$$

Bei einer Erbschaft $3A$ ist sie:
für die ersten A Th. $=\frac{A}{100}$,

- - zweiten A - $=\frac{A}{100}\cdot\frac{\log 2}{\log\frac{3}{2}}$,

- - dritten A - $=\frac{A}{100}\cdot\frac{\log 2}{\log\frac{4}{3}}$;

also im Ganzen: $\frac{A}{100}\left[1+\frac{\log 2}{\log\frac{3}{2}}+\frac{\log 2}{\log\frac{4}{3}}\right].$

Im Allgemeinen wird sie bei einer Erbschaft von mA Th. sein:

$$\frac{A}{100}\left[1+\frac{\log 2}{\log\frac{3}{2}}+\frac{\log 2}{\log\frac{4}{3}}+\ldots\ldots\frac{\log 2}{\log\frac{m+1}{m}}\right]. \quad (4)$$

Lamé giebt nun an, dass, bis $m=21$, immer annäherungsweise:

$$1+\frac{\log 2}{\log\frac{3}{2}}+\ldots\ldots+\frac{\log 2}{\log\frac{m+1}{m}}=m+0,35\,m\,(m-1),$$

so dass die Formel (4) wäre:

$$\frac{mA}{100}\left[1+0,35(m-1)\right]. \quad (5)$$

Da für $m=20$, $\frac{\log(m+1)}{\log(1+r)}$, wenn $r=\frac{1}{20}$ ist, über 60 hinausgeht, so wird also ein Mensch durch fortgesetztes Zurücklegen von A Th. nicht im Stande sein, sein Vermögen über $20A$ zu bringen, so dass man beim Wachsen der Abgabe nach der in (4) angegebenen Progression, nicht über $m=20$ hinaus gehen soll; ist also $m>20$, so wird man von der Erbschaft mA doch nicht mehr Procente erheben, als von der $20A$. Rechnet man die Grössen:

$\frac{\log 2}{\log\frac{3}{2}}, \frac{\log 2}{\log\frac{4}{3}}, \ldots\ldots \frac{\log 2}{\log\frac{21}{20}}$ aus, so erhält man leicht folgendes Täfelchen.

Man hat an Erbschaftsabgaben (Accis) zu bezahlen, bei einer Erbschaft:

grösser als 0 u. kleiner als	2 *A* (*A* z.B.=20000 Th.)	1 vom 100
gleich od. - - 2 *A* - - -	3 *A*	1,354 -
- - - - 3 *A* - - -	4 *A*	1,706 -
- - - - 4 *A* - - -	5 *A*	2,056 -
- - - - 5 *A* - - -	6 *A*	2,405 -
- - - - 6 *A* - - -	7 *A*	2,753 -
- - - - 7 *A* - - -	8 *A*	3,101 -
- - - - 8 *A* - - -	9 *A*	3,464 -
- - - - 9 *A* - - -	10 *A*	3,810 -
- - - - 10 *A* - - -	11 *A*	4,156 -
- - - - 11 *A* - - -	12 *A*	4,503 -
- - - - 12 *A* - - -	13 *A*	4,849 -
- - - - 13 *A* - - -	14 *A*	5,195 -
- - - - 14 *A* - - -	15 *A*	5,542 -
- - - - 15 *A* - - -	16 *A*	5,888 -
- - - - 16 *A* - - -	17 *A*	6,235 -
- - - - 17 *A* - - -	18 *A*	6,582 -
- - - - 18 *A* - - -	19 *A*	6,928 -
- - - - 19 *A* - - -	20 *A*	7,275 -
- - - 20 *A* - - -	21 *A*	7,621 -
gleich oder überhaupt mehr als	21 *A*	8,000 -

In Nr. 8. der Comptes rendus (vom 21. August 1848) giebt Binet eine Formel zur Berechnung obiger Summe (4):

$$\log 2\left[\frac{1}{\log 2}+\frac{1}{\log\frac{3}{2}}+\frac{1}{\log\frac{4}{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\log\frac{1+m}{m}}\right],$$

deren Ableitung wir hier versuchen wollen, da Binet nur das Resultat angiebt. Sezt man

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)(2-x)\ldots\ldots(n-1-x)}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ldots\ldots\ n}\partial x = a_n\,, \tag{6}$$

so ist

$$1 + a_1 z - a_2 z^2 + a_3 z^3 - \ldots\ldots \text{in inf.}$$

$$= \int_0^1 \left[1 + \frac{x}{1} z + \frac{x(x-1)}{1.\ 2} z^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3} z^3 + \ldots\ldots\right]\partial x$$

$$= \int_0^1 (1+z)^x\,\partial x, \text{ wenn } x^2 \overline{\overline{<}}\, 1.$$

Da aber $\int_0^1 (1+z)^x\,\partial x = \frac{z}{l(1+z)}$, so ist also

$$\frac{z}{l(1+z)} = 1 + a_1 z - a_2 z^2 + a_3 z^3 - a_4 z^4 + \ldots\ldots \text{in inf. } z^2 \overline{\overline{<}}\, 1 \ldots \tag{7},$$

Die Berechnung giebt

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{12}, a_3 = \frac{1}{24}, a_4 = \frac{19}{720}, a_5 = \frac{9}{480}, a\ = \frac{793}{60480}, \ldots$$

Dass diese Zahlen fallen, lässt sich leicht beweisen. Zunächst ist nämlich offenbar

$$a_{r+1} = \frac{r}{r+1} a_r - \frac{1}{r+1} \int_0^1 \frac{x(1-x)(2-x)\ldots(r-1-x)}{1.\ \ 2\ \ldots\ldots\ r} x\partial x\,.$$

Da das letzte Integral positiv, so muss es $< ra_r$ sein, da sonst a_{r+1} negativ wäre, was nicht der Fall ist, da alle die Zahlen a_1, a_2,.... positiv sind, wie man aus (6) leicht sehen wird. Daraus folgt, dass

$$a_{r+1} < a_r$$

sei.

Da man in der Summe (4) natürliche oder künstliche Logarithmen wählen kann, so wählen wir natürliche. Alsdann kommt die Aufgabe darauf hinaus, die Summe:

$$\frac{1}{l\left(1+\frac{1}{1}\right)} + \frac{1}{l\left(1+\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{l\left(1+\frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{l\left(1+\frac{1}{4}\right)} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{l\left(1+\frac{1}{m}\right)} \tag{8}$$

zu finden. Zerlegt man jedes einzelne Glied nach der Formel (7), so giebt diese Summe:

$$1+a_1\frac{1}{1}-a_2\frac{1}{1^2}+a_3\frac{1}{1^3}-\ldots\ldots+(-1)^{n+1}a_n\frac{1}{1^n}-\ldots$$

$$+2\left[1+a_1\frac{1}{2}-a_2\frac{1}{2^2}+a_3\frac{1}{2^3}-\ldots\ldots+(-1)^{n+1}a_n\frac{1}{2^n}-\ldots\right]$$

$$+3\left[1+a_1\frac{1}{3}-a_2\frac{1}{3^2}+a_3\frac{1}{3^3}-\ldots\ldots+(-1)^{n+1}a_n\frac{1}{3^n}-\ldots\right]$$

$$\vdots$$

$$+m\left[1+a_1\frac{1}{m}-a_2\frac{1}{m^2}+a_3\frac{1}{m^3}-\ldots\ldots+(-1)^{n+1}a_n\frac{1}{m^n}-\ldots\right]$$

$$=\frac{m(m+1)}{1\,.\,2}+ma_1-a_2\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r}+a_3\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r^2}-a_4\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r^3}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n+1}a_n\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r^{n-1}}-\ldots$$

Da $a_1=\frac{1}{2}$, so ist diess:

$$=\frac{m^2}{2}+m-a_2\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r}+\ldots+(-1)^{n+1}a_n\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r^{n-1}}-\ldots$$

Nun ist

$$l(1+r)=l(r)+\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{r^3}-\ldots\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{r^n},$$

woraus

$$\sum_{r=1}^{r=m}l(1+r)=l(2.3\ldots(m+1))=\sum_{r=1}^{=m}l(r)+\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r^2}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r^n}-\ldots$$

$$=l(1.2\ldots m)+\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r}-\ldots\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r^n}-\ldots,$$

d. h.

$$l(m+1)=\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r^n}-\ldots,$$

$$a_2\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r}=a_2l(m+1)+\frac{a_2}{2}\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r^2}-\frac{a_3}{3}\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r^3}+\ldots+(-1)^n\frac{a_2}{n}\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r^n}-\ldots$$

Setzt man dies, so erhält man als Summe der Reihe (8):

$$\frac{m^2}{2}+m-a_2l(m+1)+\left(a_3-\frac{a_2}{2}\right)\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r^2}-\left(a_4-\frac{a_2}{3}\right)\sum_{r=}^{r=m}\frac{1}{r^3}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n+1}\left(a_n-\frac{a_2}{n-1}\right)\sum_{r=1}^{r=m}\frac{1}{r^{n-1}}-\ldots. \qquad (9)$$

Man kann diese Summe noch umbilden. Setzt man nämlich

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^\mu}=K_\mu\,,$$

so erhält man die Summe:

$$\frac{m^2}{2}+m-a_2 l(m+1)+\left(a_3-\frac{a_2}{2}\right)K_2-\left(a_4-\frac{a_2}{3}\right)K_3+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\left(a_n-\frac{a_2}{n-1}\right)K_{n-1}-\ldots\ldots$$

$$-\left(a_3-\frac{a_2}{2}\right)\sum_{r=m+1}^{r=\infty}\frac{1}{r^2}+\left(a_4-\frac{a_2}{3}\right)\sum_{r=m+1}^{r=\infty}\frac{1}{r^3}-\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\left(a_n-\frac{a_2}{n-1}\right)\sum_{r=m+1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{n-1}}-\ldots.\,.$$

Zugleich ist

$$\sum_{r=m+1}^{r=\infty}\frac{1}{r^\mu}=\frac{1}{\mu-1}\cdot\frac{1}{m^{\mu-1}}-\frac{1}{2}\frac{1}{m^\mu}-\frac{1}{2}\frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}B_1\frac{1}{m^{\mu+1}}$$
$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{(\mu+2)(\mu+1)\mu(\mu-1)}{1.\;\;2.\;\;3.\;\;4}B_2\frac{1}{m^{\mu+3}}-\ldots.,$$

wo B_1, B_2,.. die Bernoullischen Zahlen sind. (Siehe Schlömilch: Differenzen und Summen. Seite 142). Die Grösse $a_3-\frac{a_2}{2}$ ist Null; die Grössen K_3, K_4,.... nehmen rasch ab, so dass die Grösse

$$\left(a_3-\frac{a_2}{2}\right)K_2-\left(a_4-\frac{a_2}{3}\right)K_3+\ldots\ldots.=G$$

gesetzt werden kann, wo G eine konstante Zahl (=0,00063...) ist. Somit ist endlich die Summe (8):

$$\frac{m^2}{2}+m-\frac{1}{12}l(m+1)+G+\left(a_4-\frac{a_2}{3}\right)\sum_{r=m+1}^{r=\infty}\frac{1}{r^3}-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}\left(a_n-\frac{a_2}{n-1}\right)\sum_{r=m+1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{n-1}}-\ldots. \qquad (10)$$

Die Grössen nach G sind von der Ordnung $\frac{1}{m^2}$; das Glied dieser Ordnung ist $-\frac{1}{540}\cdot\frac{1}{m^2}$, alle anderen sind von der Ordnung $\frac{1}{m^3}$. Vernachlässigt man diese, so erhält man:

$$\frac{m^2}{2}+m-\frac{1}{12}l(m)-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{m}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{m^2}+G-\frac{1}{540}\cdot\frac{1}{m^2}$$
$$=\frac{m^2}{2}+m-\frac{1}{12}l(m)-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{m}+\frac{43}{1080}\cdot\frac{1}{m^2}+G$$

Die Summe (4) wäre also

$$\frac{mA}{100}\left[\frac{m}{2}+1-\frac{1}{12}\frac{l(m)}{m}-\frac{1}{12}\frac{1}{m^2}+\frac{G}{m}+\frac{43}{1080}\frac{1}{m^3}\right]l2,$$

oder annähernd:

$$\frac{mA}{100}\left[\frac{m}{2}l2+l2\right].$$

Nun ist $l2=0{,}693147, \frac{l2}{2}=0{,}346573$, also jene Summe ungefähr:

$$\frac{mA}{100}[0{,}693147+0{,}346573m]=\frac{mA}{100}[1{,}03972+0{,}34657(m-1)],$$

was so ziemlich mit dem Resultat (5) zusammentrifft.

XXXIV.

Ueber das Integral $\int\frac{\partial x}{a+b\cos x+c\sin x}$ und ähnliche Formeln.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

---

§. 1.

Setzt man $b=r\cos\alpha$, $c=r\sin\alpha$, also $r=\sqrt{b^2+c^2}$, so verwandelt sich das vorgelegte Integral in

$$\int\frac{\partial x}{a+r(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x)}=\int\frac{\partial x}{a+r\cos(x-\alpha)}=\int\frac{\partial y}{a+r\cos y},$$

wenn $y=x-\alpha$ ist. Die Integration ist also auf die Bestimmung von

$$\int\frac{\partial y}{a+r\cos y}$$

zurückgeführt. Ist nun $a^2>r^2$, so findet man bekanntlich:

$$\int\frac{\partial y}{a+r\cos y}=\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\operatorname{arc}\left(\cos=\frac{r+a\cos y}{a+r\cos y}\right)+C;$$

ist dagegen $a^2<r^2$:

$$\int\frac{\partial y}{a+r\cos y}=\frac{1}{\sqrt{r^2-a^2}}\log\left(\frac{r+a\cos y+\sin y.\sqrt{r^2-a^2}}{a+r\cos y}\right)+C.$$

Nun ist

$$r^2 = b^2 + c^2,\ \cos y = \frac{b\cos x + c\sin x}{\sqrt{b^2+c^2}},\quad \sin y = \frac{b\sin x - c\cos x}{\sqrt{b^2+c^2}};$$

demnach für $a^2 > b^2 + c^2$:

$$(1)\qquad \int \frac{\partial x}{a + b\cos x + c\sin x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{b^2+c^2+a(b\cos x + c\sin x)}{(a + b\cos x + c\sin x)\sqrt{b^2+c^2}}\right) + C.$$

Für $a^2 < b^2 + c^2$:

$$(2)\qquad \int \frac{\partial x}{a + b\cos x + c\sin x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}} \log \left\{ \frac{b^2+c^2+a(b\cos x + c\sin x) + \sqrt{b^2+c^2-a^2}(b\sin x - c\cos x)}{(a + b\cos x + c\sin x)\sqrt{b^2+c^2}} \right\}$$

$$+ C.$$

Im ersten Falle, also wenn $a^2 > b^2 + c^2$, erhält man:

$$\int_0^{2m\pi} \frac{\partial x}{a + b\cos x + c\sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{b^2+c^2+ab}{(a+b)\sqrt{b^2+c^2}}\right)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{b^2+c^2+ab}{(a+b)\sqrt{b^2+c^2}}\right)$$

$$\pm \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\, 2\varrho\pi,$$

worin ϱ eine bestimmte ganze Zahl, die unabhängig von a, b, c sein wird, bedeutet. Um sie zu bestimmen, setze man $b = c = 0$, $a = 1$, so wird die erste Seite

$$\int_0^{2m\pi} \partial x = 2m\pi,$$

demnach $\varrho = m$, und somit immer:

$$(3)\qquad \int_0^{2m\pi} \frac{\partial x}{a + b\cos x + c\sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\, 2m\pi.$$

Für $m = 1$ erhält man hieraus die bekannte Formel

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial x}{a + b\cos x + c\sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}. \qquad (4)$$

und ebenso:

$$\int_{2n\pi}^{2(m+n)\pi} \frac{\partial x}{a+b\cos x+c\sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} 2m\pi, \qquad (5)$$

in welchen Formeln $a^2 > b^2+c^2$ vorausgesetzt wird.

Setzt man bi, ci statt b und c, so ist $a^2 > b^2+c^2$, also allgemein:

$$\int_0^{2m\pi} \frac{\partial x}{a+bi\cos x+ci\sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} 2m\pi. \qquad (6)$$

Ist aber $b^2+c^2 > a^2$, so ergiebt sich:

$$\int_0^{2m\pi} \frac{\partial x}{a+b\cos x+c\sin x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}} \log\left(\frac{b^2+c^2+ab+\sqrt{b^2+c^2-a^2}(-c)}{(a+b)\sqrt{b^2+c^2}}\right)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}} \log\left(\frac{b^2+c^2+ab+\sqrt{b^2+c^2-a^2}(-c)}{(a+b)\sqrt{b^2+c^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}} \log(1) = \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2-a^2}} 2\varrho\pi i,$$

worin also ϱ nur $=0$ sein kann, so dass

$$\int_0^{2m\pi} \frac{\partial x}{a+b\cos x+c\sin x} = 0, \qquad (7)$$

wenn $a^2 < b^2+c^2$.

Es bleibt uns nur noch der Fall zu betrachten, in welchem

$$a^2 = b^2+c^2 \qquad (8)$$

ist. Für diesen Fall wird das Integral, in welches das vorgelegte sich umbilden lässt, entweder

$$\frac{1}{a}\int \frac{\partial y}{1+\cos y}, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{a}\int \frac{\partial y}{1-\cos y}, \qquad (9)$$

je nachdem, ob $a = \pm\sqrt{b^2+c^2}$ ist; also je nachdem, ob a positiv oder negativ ist.

Nun ist $1+\cos y = 2\cos^2\frac{1}{2}y$, $1-\cos y = 2\sin^2\frac{1}{2}y$, demnach:

$$\int \frac{\partial y}{1+\cos y} = \int \frac{\partial y}{2\cos^2 \frac{1}{2}y} = \int \frac{\partial z}{\cos^2 z} = \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} \frac{1}{2} y,$$

wenn $z = \frac{1}{2} y$.

$$\int \frac{\partial z}{1-\cos y} = \int \frac{\partial y}{2\sin^2 \frac{1}{2} y} = \int \frac{\partial z}{\sin^2 z} = -\operatorname{cotg} z = -\operatorname{cotg} \frac{1}{2} y.$$

Hieraus ergiebt sich:

(10)

$$\int \frac{\partial x}{a+b\cos x+c\sin x} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(x-\alpha)+C, \text{ wenn } a = +\sqrt{b^2+c^2};$$

$$\int \frac{\partial x}{a+b\cos x+c\sin x} = -\frac{1}{a} \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(x-\alpha)+C, \;\text{„}\; a = -\sqrt{b^2+c^2};$$

worin α durch die Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

bestimmt ist.

§. 2.

Ganz wie in §. 1. ist

$$\int \frac{\partial x}{(a+b\cos x+c\sin x)^2} = \int \frac{\partial y}{(a+r\cos y)^2},$$

worin $y = x-\alpha$, und α, r die nämliche Bedeutung haben, wie in §. 1. Allein es ist für $a^2 > r^2$:

$$\int \frac{\partial y}{(a+r\cos y)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2-r^2}\left(\frac{-r\sin y}{a+r\cos y} + a\int \frac{\partial y}{a+r\cos y}\right)$$

$$= -\frac{r}{a^2-r^2} \frac{\sin y}{a+r\cos y} + \frac{a}{(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{r+a\cos y}{a+r\cos y}\right),$$

demnach:

$$\int_0^{2m\pi} \frac{\partial x}{(a+b\cos x+c\sin x)^2}$$

$$=\int_{-\alpha}^{2m\pi-\alpha} \frac{\partial y}{(a+r\cos y)^2}=\int_0^{2m\pi} \frac{\partial x}{(a+r\cos x)^2}$$

$$=\frac{a}{(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}2m\pi=\frac{a}{(\sqrt{a^2-b^2-c^2})^3}2m\pi. \qquad (11)$$

Daher auch

$$\int_0^{2m\pi} \frac{\partial x}{(a+bi\cos x+ci\sin x)^2}=\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^3}}2m\pi. \qquad (12)$$

Setzt man hier $a=r-r'\cos\varphi$, $b=r'\sin\varphi$, $c=0$, so findet sich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial x}{(r-r'\cos\varphi+r'i\sin\varphi\cos x)^2}=\frac{r-r'\cos\varphi}{\sqrt{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^3}},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial x\,\partial\varphi}{(r-r'\cos\varphi+ir'\sin\varphi\cos x)^2}=\int_0^{2\pi} \frac{(r-r'\cos\varphi)\partial\varphi}{(r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da das letzte Integral in Archiv Theil VII. Abhandlung XX. bestimmt wurde, so ist dadurch auch das erste bestimmt.

§. 3.

Da allgemein für $a^2>r^2$:

$$\int \frac{\cos y\,\partial y}{(a+r\cos y)^2}=\frac{1}{a^2-r^2}\left(\frac{a\sin y}{a+r\cos y}-r\int \frac{\partial y}{a+r\cos y}\right)$$

und

$$\int \frac{\cos y\,\partial y}{(a+r\cos y)^n}$$

$$=\frac{a\sin y}{(n-1)(a^2-r^2)(a+r\cos y)^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)(a^2-r^2)}\int \frac{(n-1)r-(n-2)a\cos y}{(a+r\cos y)^{n-1}}\partial y.$$

$$\int \frac{\partial y}{(a+r\cos y)^n}$$

$$=\frac{-r\sin y}{(n-1)(a^2-r^2)(a+r\cos y)^{n-1}}+\frac{1}{(n-1)(a^2-r^2)}\int \frac{(n-1)a-(n-2)r\cos y}{(a+r\cos y)^{n-1}}\partial y;$$

so kann man leicht

$$\int \frac{\partial x}{(a+b\cos x+c\sin x)^n}$$

finden.

Man hat daraus für $a^2 > b^2+c^2$:

$$\int_0^{m\pi} \frac{\partial x}{(a+b\cos x+c\sin x)^n}$$

$$= \frac{1}{(n-1)(a^2-b^2-c^2)} \int_0^{2m\pi} \frac{(n-1)a-(n-2)\sqrt{b^2+c^2}.\cos(x-\alpha)}{(a+b\cos x+c\sin x)^{n-1}}\,\partial x$$

$$= \frac{a}{a^2-b^2-c^2} \int_0^{2m\pi} \frac{\partial x}{(a+b\cos x+c\sin x)^{n-1}}$$

$$- \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a^2-b^2-c^2} \int_0^{2m\pi} \frac{\cos(x-\alpha)}{(a+b\cos x+c\sin x)^{n-1}}\,\partial x,$$

und findet für $n=3$:

$$\int_0^{2m\pi} \frac{\partial x}{(a+b\cos x+c\sin x)^3} = \frac{a^2+\frac{1}{2}(b^2+c^2)}{(a^2-b^2-c^2)^{\frac{5}{2}}}\,2m\pi, \text{ wenn } a^2 > b^2+c^2;$$

für $n=4$:

$$\int_0^{2m\pi} \frac{\partial x}{(a+b\cos x+c\sin x)^4} = \frac{a(a^2+\frac{3}{2}(b^2+c^2))}{(a^2-b^2-c^2)^{\frac{7}{2}}}\,2m\pi, \text{ wenn } a^2 > b^2+c^2;$$

u. s. f.

XXXV.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Lehrsatz.

Von dem Herrn Professor Dr. Schlömilch an der Universität zu Jena.

Die unendliche Reihe

$$\frac{1}{1^s}-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\dots$$

convergirt bekanntlich für jedes positive von Null verschiedene s. Nennen wir $f(s)$ ihre Summe, so findet zwischen den Summen $f(s)$ und $f(1-s)$ die bemerkenswerthe Relation

$$\frac{f(1-s)}{f(s)}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^s \Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}$$

statt, wobei s als positiver ächter Bruch vorausgesetzt wird. Für $s=\frac{1}{2}$ wird $f(s)=f(1-s)$ und man hat dann

$$1=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oder } \Gamma\left(\frac{1}{-}\right)=\sqrt{\pi},$$

wie man ausserdem schon weiss.

Arithmetisches Theorem.

Von Demselben.

Es sei N eine ganze positive Zahl und dieselbe in ihre Primfaktoren a, b, c,... zerlegt, so dass etwa

$$N=a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$$

ist; sind ferner $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ alle relativen Primzahlen zu N, welche kleiner als N sind (also $P_1=1, \ldots P_n=N-1$), so gilt die Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\sin\frac{P_1\pi}{N}+\sin\frac{P_2\pi}{N}+\sin\frac{P_3\pi}{N}+\ldots+\sin\frac{P_n\pi}{N} \\
&=\cot\frac{\pi}{2N}-\left[\cot\frac{a\pi}{2N}+\cot\frac{b\pi}{2N}+\cot\frac{c\pi}{2N}+\ldots\right] \\
&\quad+\left[\cot\frac{ab\pi}{2N}+\cot\frac{ac\pi}{2N}+\ldots\ldots\right] \\
&\quad-\left[\cot\frac{abc\pi}{2N}+\ldots\ldots\ldots\right] \\
&\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die erste eingeklammerte Reihe enthält alle Primfaktoren der Reihe nach, die zweite alle Combinationen zu je zweien von ihnen ohne Wiederholungen, die dritte alle Combinationen zu je dreien von ihnen ohne Wiederholungen, u. s. w.

Von dem Herrn Doctor J. Dienger zu Sinsheim bei Heidelberg.

$$\sum_{r=1}^{r=n}\frac{r}{(4a^2+4r^2+1)^2-16r^2}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{(4a^2+2n^2+2n+1)^2-4n^2(n+1)^2}.$$

$$\sum_{r=1}^{r=n}\frac{4(a^2-r^2)+1}{(4a^2+4r^2+1)^2-16r^2}=\frac{(4a^2-2n-1)n}{(4a^2+2n^2+2n+1)^2-4n^2(n+1)^2}.$$

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{r}{(4a^2+4r^2+1)^2-16r^2}&=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4a^2+1}\\
\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{4(a^2-r^2)+1}{(4a^2+4r^2+1)^2-16r^2}&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4a^2+1}
\end{aligned}\right\}\text{für } a=0:\ \begin{aligned}
\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{r}{(4r^2-1)^2}&=\frac{1}{8}.\\
\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{4r^2-1}&=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten für jedes reelle a.

Das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty\frac{\sin(zx).\sin^2(cx)}{x}\partial x$$

ist, wenn c positiv ist, für

$$-\infty \overline{\overline{<}} z < -2c, \quad \text{gleich } 0 \cdot$$

$$z = -2c, \quad „ \quad -\frac{\pi}{8};$$

$$-2c < z < 0, \quad „ \quad -\frac{\pi}{4};$$

$$z = 0, \quad „ \quad 0;$$

$$0 < z < 2c, \quad „ \quad +\frac{\pi}{4};$$

$$z = 2c \quad „ \quad +\frac{\pi}{8};$$

$$2c < z \overline{\overline{<}} +\infty \quad „ \quad 0.$$

Zeichnet man unter das Dreieck ABC (Taf. X. Fig. 4.) ein gleichschenkliges Dreieck ADB, so dass Winkel $DAB = DBA = ACB$, zieht DC und durch einen beliebigen Punkt F in CB oder dessen Verlängerung die Linie FE so, dass Winkel $CFE = CAB$, so wird EF durch DC halbirt.

Nennt man a, b, c die drei Seiten des Dreiecks ABC, r die Länge CF, DCB den Winkel x, so findet sich

$$\operatorname{tg} x = \frac{a \sin B}{2b \cos A + a \cos B}, \quad C = \frac{r \sin B}{\sin C};$$

und sodann nach der bekannten Formel, ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu berechnen, ΔGCF gleich gross mit ΔEGC, also $EG = GF$. (Man sehe auch: Adams, die merkw. Eigensch. des geradl. Dreiecks. S. 5.).

An einen Kreis, dessen Halbmesser r sei, ziehe man in jedem Punkte eine Tangente, verlängere jede derselben zunächst um das Stück h und zwar so, dass, wenn man (Taf. X. Fig. 5.) im Endpunkte R des Halbmessers OR, mit dem Rücken gegen den Mittelpunkt gewendet, steht, die Verlängerung nach der rechten Seite hin gehe. Jede dieser Verlängerungen verlängere man um ein Stück, das proportional ist dem wachsenden Winkel RON, der wächst, indem OR durch OM geht, bis es in ON eintrifft, und zwar so, dass die Verlängerung der zweiten (rückkehrenden) Tangente in N gleich a sei. Ist Q ein Punkt dieser Curve und sind ϱ, t die laufenden Polarcoordinaten, so findet man als Gleichung der Curve:

$$t = [\sqrt{\varrho^2 - r^2} - h]\frac{2\pi}{\alpha} - \text{arc}(\cos = \frac{r}{\varrho}) \cdot$$

Die Länge des Curvenstücks, das zwischen den den Punkten N und R des Kreises entsprechenden Punkten der Curve liegt, ist, wenn Winkel $RON = \omega$:

$$\left(\frac{h}{2} + \frac{\alpha\omega}{4\pi}\right)\sqrt{\frac{4\pi^2}{\alpha^2}\left(h + \frac{\alpha\omega}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{2r\pi}{\alpha} - 1\right)^2} - \frac{h}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2}{\alpha^2}h^2 + \left(\frac{2r\pi}{\alpha} - 1\right)^2}$$

$$+ \frac{(2r\pi - \alpha)^2}{4\alpha\pi}\log\left\{\frac{2h\pi + \alpha\omega + \sqrt{4\pi^2\left(h + \frac{\alpha\omega}{2\pi}\right)^2 + (2r\pi - \alpha)^2}}{2h\pi + \sqrt{4\pi^2 h^2 + (2r\pi - \alpha)^2}}\right\}.$$

Demnach ist die Länge von n vollständigen Umläufen der Curve:

$$\left(\frac{h}{2\alpha} + \frac{n}{2}\right)\sqrt{4\pi^2(h + n\alpha)^2 + (2r\pi - \alpha)^2} - \frac{h}{2\alpha}\sqrt{4h^2\pi^2 + (2r\pi - \alpha)^2}$$

$$+ \frac{(2r\pi - \alpha)^2}{4\alpha\pi}\log\left\{\frac{2\pi(h + n\alpha) + \sqrt{4\pi^2(h + n\alpha)^2 + (2r\pi - \alpha)^2}}{2h\pi + \sqrt{4h^2\pi^2 + (2r\pi - \alpha)^2}}\right\}.$$

Für $h = 0$, $\alpha = 2r\pi$ ist die Curve eine Kreisevolvente.

Wird ein Körper schief in die Höhe geschleudert, und man nimmt an, dass sein Schwerpunkt nicht aus derselben Vertikalebene heraustritt, dass ferner $F(v)$ den Widerstand der Luft ausdrückt, so ist die Gleichung der Bahn des Schwerpunkts:

$$g\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 \frac{\partial x}{\partial s} F\left(\frac{\partial s}{\partial x}\sqrt{\frac{-g}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}}\right) = 0,$$

oder, wenn man will:

$$g\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} + 2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 F\left(\sqrt{\left(\frac{-g\left(s + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}\right)}\right) = 0.$$

$g = 9{,}809$ mètres.

$$1.2.3\ldots\ldots(r+n-1)+2.3.4\ldots\ldots(r+n)+3.4.5\ldots\ldots(r+n+1)+\ldots.$$
$$\ldots.+(m-r+2)(m-r+3)\ldots\ldots(m+n)$$
$$=\frac{(m+n+1)(m+n)\ldots\ldots(m-r+2)}{n+r}.$$

$$\sum_{n=1}^{n=r}\frac{n}{(4a^2+4n^2+1)^2-(4n)^2}=\frac{\frac{1}{2}r(r+1)}{(4a^2+(r+1)^2+r^2)^2-4(r+1)^2r^2}$$

$$\sum_{n=1}^{n=r}\frac{n}{(2n+1)^2(2n-1)^2}=\frac{\frac{1}{2}r(r+1)}{(2r+1)^2}.$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n}{(4a^2+(2n-1)^2)(4a^2+(2n+1)^2)}=\frac{1}{32a^2+8}.$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{1}{8}.$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}=\frac{1}{40}.$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}=\frac{1}{69}.$$

$$\sum_{n=0}^{n=r}\frac{2nb+1}{[a^2+((2n-1)b+1)^2][a^2+((2n+1)b+1)^2]}$$
$$=\frac{(rb+1)(r+1)}{[a^2+(b-1)^2][a^2+((2r+1)b+1)^2]}.$$

$$\sum_{n=0}^{n=r}\frac{2n+1}{(a^2+(2n)^2)(a^2+(2n+2)^2)}=\frac{(r+1)^2}{a^2(a^2+(2r+2)^2)}.$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{2n+1}{(a^2+4n^2)(a^2+(2n+2)^2)}=\frac{1}{4a^2}.$$

a kann hier jede reelle oder imaginäre Grösse sein, nur darf nie ein Glied unendlich werden.

XXXVI.
Miscellen.

An den Herausgeber des Archivs der Mathematik und Physik.

In der Hoffnung, dass Sie folgendem kleinen Aufsatze einen Platz in Ihrem Archive vergönnen wollen, bin ich so frei, ihnen denselben hiermit, durch meinen hiesigen Freund, den Herrn Buchhändler D. F. Bonnier, mitzutheilen.

Die Binomial-Formel als Quotient.

Es ist, wenn $A, B, \ldots A', B', \ldots$, die nächst vorhergehenden Glieder ausdrücken, und m eine jede Zahl, die entweder gleich oder grösser als n ist, bedeutet:

$$(a+b)^n = a^n \frac{1+\frac{n+m}{2}\frac{b}{a}+\frac{(m-1)(n+m-1)}{2(2m-1)}A\frac{b}{a}+\frac{(m-2)(n+m-2)}{3(2m-2)}B\frac{b}{a}+\ldots}{1-\frac{n-m}{2}\cdot\frac{b}{a}-\frac{(m-1)(n-m+1)}{2(2m-1)}A'\frac{b}{a}-\frac{(m-2)(n-m+2)}{3(2m-2)}B'\frac{b}{a}-\ldots}$$

Aus dieser allgemeinen Formel erhält man durch Substitution folgende Approximations-Formeln, von welchen jedoch eine jede exakt ist, wenn man $m=n$ annimmt:

$$(a+b)^n = a^n \cdot \frac{1+\frac{n+1}{2}\cdot\frac{b}{a}}{1-\frac{n-1}{2}\cdot\frac{b}{a}},$$

(wenn $m=1$), übereinstimmend mit der von Lambert gefundenen Formel. (S. Beitr. z. Gebr. d. Mathem., 2. Thl. 1. Abschn. S. 153.)

$$=a^n.\frac{1+\frac{n+2}{2}.\frac{b}{a}+\frac{n+1}{2.3}A.\frac{b}{a}}{1-\frac{n-2}{2}.\frac{b}{a}-\frac{n-1}{2.3}.A'.\frac{b'}{a}}, \text{ (wenn } m=2)$$

$$=a^n.\frac{1+\frac{n+3}{2}.\frac{b}{a}+\frac{n+2}{5}A.\frac{b}{a}+\frac{n+1}{3.4}B.\frac{b}{a}}{1-\frac{n-3}{2}.\frac{b}{a}-\frac{n-2}{5}A'.\frac{b}{a}-\frac{n-1}{3.4}B'.\frac{b'}{a}}, \text{ (wenn } m=3) \text{ u.s.w.}$$

Die Näherungs-Kraft der letzten Formel ist so bedeutend. dass man direkte findet: $\sqrt{10}=3,16227766017...$, welches bis auf die letzte, oder eilfte Decimale richtig ist.

Gothenburg, in Schweden, den 19. Januar 1849.

J. J. Åstrand, Privatlehrer.

Beweis eines geometrischen Lehrsatzes.

Von dem Herrn Dr. Wiegand, Oberlehrer an der Realschule zu Halle.

Im Novemberhefte v. J. der Zeitschrift „The Mathematician" verlangt Mr. John Walker aus Dublin einen Beweis folgenden Satzes:

Wenn die Verbindungslinie des Mittelpunkts des einem Dreiecke eingeschriebenen Kreises mit einer Winkelspitze die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser des genannten Kreises und dem Radius des umschriebenen ist, so bilden die drei Dreiecksseiten eine arithmetische Progression.

Wir geben hierzu folgenden Beweis.

Es sei ABC*) das Dreieck, O der Mittelpunkt des eingeschriebenen, M der des umschriebenen Kreises, ϱ der Radius des ersteren und r der Radius des letzteren Kreises, dann ist bekanntlich

$$OM^2=r^2-2\varrho r.$$

Bezeichnen wir nun den Abstand AO mit m, so ist nach der Voraussetzung

$$m^2=2\varrho R,$$

mithin

$$OM^2+m^2=r^2;$$

*) Die Figur ist leicht zu zeichnen.

also ist

$$MOA = 90^0.$$

Nun ist, wie sich leicht ergiebt:

$$MAO = \frac{A}{2} + B - 90^0,$$

wo B der der grössten Seite gegenüber liegende Winkel ist. oder auch

$$MAO = 90^0 - (\frac{A}{2} + C),$$

also

$$\frac{m}{r} = \cos\{90^0 - (\frac{A}{2} + C)\} = \sin(\frac{A}{2} + C)$$

oder

$$\frac{m}{r} = \sin ADB \ldots\ldots \quad (1)$$

Nach bekannten Sätzen ist:

$$AB : AC = BD : CD,$$

$$AB : BD = AC : CD = \sin ADB : \sin\frac{A}{2};$$

und also, da

$$\frac{\varrho}{m} = \sin\frac{A}{2},$$

mit Rücksicht auf (1):

$$AB : BD = AC : CD = \frac{m}{r} : \frac{\varrho}{m}, = m^2 : \varrho r,$$

also

$$AB : 2BD = AC : 2CD = m^2 : 2\varrho r,$$

und weil $m^2 = 2\varrho r$, auch

$$AB = 2BD, \; AC = 2CD;$$

mithin

$$AB + AC = 2(BD + CD) = 2BC,$$

wie zu beweisen war.

Ein Hülfsmittel, die verschiedenen bei sphärischen Spiegeln vorkommenden Fälle leicht zu behalten.

Von dem Herrn Dr. E. W. Grebe zu Cassel.

In der Figur Taf. X. Fig. 6., deren Buchstaben die Anfangsbuchstaben der einzelnen Wörter in dem lateinischen Hexameter

Quin Tite, disce, decet te, quae sint mira Minervae

sind, soll der aus dem Mittelpunkte *dd* beschriebene Kreisbogen einen sphärischen Concav- und Convexspiegel bedeuten. Sein Brennpunkt ist *s*. Von den übereinstimmenden Buchstaben, z. B. *Q* und *q*, *m* und *M*, kann allemal der eine als der Gegenstand, der andere als das Bild betrachtet werden, und es ergibt sich somit, ob das Bild verkleinert oder vergrössert ist. Steht der entsprechende Buchstabe auf der andern Seite der Axe, so deutet dieses an, dass das Bild umgekehrt wird, wenn nicht, so hat es dieselbe Stellung wie der Gegenstand. Wird *M* als der Gegenstand betrachtet, so muss der Spiegel convex gedacht werden, in allen übrigen Fällen concav.

Will man unsere katoptrische Figur für die Dioptrik mitbenutzen, so muss man sich den Spiegel mit einer gleichwirkenden Linse vertauscht denken, und muss dann den Ort des Bildes auf derselben Seite der Axe, aber auf entgegengesetzter Seite der Linse nehmen.

Ableitung einer Formel zur Theilung abgekürzter Kegel und Pyramiden.

Von Herrn J. Flögl, Eleven der k. k. Forstlehranstalt zu Mariabrunn nächst Wien.

Es erscheint öfter als Aufgabe die Forderung, einen parallel abgekürzten Kegel oder derlei Pyramide in verhältnissmässige Theile zu theilen.

Es bedeute a den Durchmesser der Basis, b den kleinern Durchmesser, und h sei die senkrechte Höhe, endlich sei x die Entfernung des Theilungsschnittes vom schwächern Ende. Der schwächere Theil sei N, der stärkere M, und es finde noch folgende Relation statt: $M:N=m:n$.

Denken wir uns der Körper sei ein Kegel und er sei ergänzt. es bedeute c den Kubikinhalt des Ergänzungsstückes und y die Höhe desselben; ferner sei der ergänzte Kegel senkrecht auf die Basis durch die Achse geschnitten, so werden im Achsendreieck folgende Verhältnisse statt finden:

$$a:b=h+y:y,\quad y=\frac{bh}{a-b}$$

und

$$c=\frac{b^2\pi y}{12}=\frac{b^3h\pi}{12(a-b)},\quad M=\frac{mN}{n};$$

das Letztere aus obiger Proportion.

Der Inhalt des ganzen Körpers sei K, so hat man:

$$K=M+N=\frac{m+n}{n}N,$$

$$K=\frac{\pi h}{12}(a^2+ab+b^2);$$

also

$$N\left(\frac{m+n}{n}\right)=\frac{\pi h}{12}(a^2+ab+b^2)$$

und

$$N=\frac{n\pi h}{12(m+n)}(a^2+ab+b^2).$$

Nun hat man nach einem bekannten Satze:

$$M+N+c:N+c=(h+y)^3:(x+y)^3$$

oder

$$\frac{\pi h}{12}(a^2+ab+b^2)+\frac{b^3h\pi}{12(a-b)}:\frac{n\pi h}{12(m+n)}(a^2+ab+b^2)+\frac{b^3\pi h}{12(a-b)}$$
$$=\left(\frac{ah}{a-b}\right)^3:(x+y)^3,$$

und ferner:

$$a^2+ab+b^2+\frac{b^3}{a-b}:\frac{n}{m+n}(a^2+ab+b^2)+\frac{b^3}{a-b}=\left(\frac{ah}{a-b}\right)^3:(x+y)^3,$$

$$a^3:\frac{na^3+mb^3}{m+n}=\left(\frac{ah}{a-b}\right)^3:(x+y)^3,$$

$$x+y=x+\frac{bh}{a-b}=\frac{ah}{a-b}\sqrt[3]{\frac{na^3+mb^3}{a^3(m+n)}},$$

$$x=\frac{ah}{a-b}\sqrt[3]{\frac{na^3+mb^3}{a^3(m+n)}}-\frac{bh}{a-b}$$

oder

$$x=\frac{bh}{a-b}\left[\sqrt[3]{\left(\frac{na^3}{(m+n)b^3}+\frac{m}{m+n}\right)}-1\right].$$

Will man die Länge auf der schiefen Seite aussen abnehmen und diese durch x' bezeichnen, so kann man folgender Art verfahren:

Es ist

$$\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=d \text{ und } x:d=1:\operatorname{tang}\varphi,$$

$$x:x'=\cos\varphi:1,\quad x'=\frac{x}{\cos\varphi}.$$

Sätze aus der Zahlenlehre.

Von dem Herrn Doctor J. Dienger, Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

§. 1.

Sei

$$\psi(n)=1+(m^1)^{2^n}+(m^2)^{2^n}+(m^3)^{2^n}+\ldots.+(m^{2r})^{2^n}, \qquad \text{(1)}$$

so ist

$$\psi(n+1)=1+(m^2)^{2^n}+(m^4)^{2^n}+(m^6)^{2^n}+\ldots.+(m^{4r})^{2^n},$$

also

$$\psi(n+1)-\psi(n)=(m^{4r})^{2^n}+(m^{4r-2})^{2^n}+(m^{4r-4})^{2^n}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+(m^{2r+2})^{2^n}-(m^{2r-1})^{2^n}-(m^{2r-3})^{2^n}\ldots-(m^1)^{2^n}$$
$$=[(m^{2r-1})^{2^n}+(m^{2r-3})^{2^n}+(m^{2r-5})^{2^n}+\ldots\ldots+(m^1)^{2^n}][(m^{2r+1})^{2^n}-1].$$

Hieraus folgt

$$\psi(n+1)=[(m^{2r-1})^{2^n}+(m^{2r-3})^{2^n}+\ldots..+(m^1)^{2^n}][(m^{2r+1})^{2^n}-1]+\psi(n). \qquad (2)$$

Bezeichnen wir mit Crelle (Encyklopädische Theorie der Zahlen) durch $G(p)$ irgend ein Vielfaches von p und nehmen wir an, es sei

$$m^{2r+1} = G(p) \pm 1, \qquad (3)$$
$$1 + m^2 + m^4 + m^6 + \ldots\ldots + m^{4r} = G(p);$$

so ist zunächst

$$(m^{2r+1})^2 = G(p) + 1,$$
$$(m^{2r+1})^{2^2} = G(p) + 1,$$
$$(m^{2r+1})^{2^3} = G(p) + 1,$$
$$\vdots$$
$$(m^{2r+1})^{2^n} = G(p) + 1;$$

d. h.

$$(m^{2r+1})^{2^n} - 1 = G(p) \text{ was auch } n\,(>0) \text{ sei.} \qquad (4)$$

Setzt man nun in der Gleichung (2) $n=1$, so ist nach (3) und (4) offenbar die zweite Seite durch p theilbar, also ist es auch $\psi(2)$. Setzt man ferner $n=2$, so ergiebt sich eben so, dass auch $\psi(3)$ theilbar durch p sei, u. s. w. Man hat daher folgenden Satz:

„Sind die Grössen

$$m^{2r+1} + 1 \text{ oder } m^{2r+1} - 1,$$
$$1 + m^2 + m^4 + m^6 + \ldots\ldots + m^{4r} = \frac{m^{4r+2} - 1}{m^2 - 1} = \frac{(m^{2r+1}+1)\,(m^{2r+1}-1)}{(m+1)(m-1)}$$

durch p theilbar, so ist es auch die Grösse

$$1 + (m^1)^{2^n} + (m^2)^{2^n} + (m^3)^{2^n} + \ldots\ldots + (m^{2r})^{2^n}, \; n > 0$$

wo m, n, r ganze Zahlen sind."

§. 2.

Von diesem allgemeinen Satze wollen wir zunächst einige spezielle Anwendungen machen.

1) Sei nämlich

$$m = 2, \; r = 1, \text{ so ist } m^{2r+1} \pm 1 = 2^3 \pm 1 = \begin{cases} 9 \\ 7 \end{cases};$$

also ist $2^3 - 1$ durch 7 theilbar; ferner ist

$$\frac{(m^{2r+1}+1)\,(m^{2r+1}-1)}{m^2 - 1} = \frac{9.7}{3} = 21$$

ebenfalls durch 7 theilbar. Folglich ist die Grösse

$$1+2^{2^n}+4^{2^n},\ n>0 \qquad (5)$$

immer durch 7 theilbar, was auch die ganze Zahl n sei.

Da übrigens 9 und 21 auch durch 3 theilbar sind, so ist es auch die Grösse (5), und folglich ist sie auch durch 21 theilbar.

In der geometrischen Progression

$$a, a.2^{2^n}, a.4^{2^n}, a.8^{2^n}, a.16^{2^n}, \ldots,$$

in der a und n ganze Zahlen sind, sind also je drei Glieder zusammen:

$$a(2^r)^{2^n}+a.(2^{r+1})^{2^n}+a.(2^{r+2})^{2^n}=a.(2^r)^{2^n}[1+2^{2^n}+4^{2^n}]$$

durch 3, 7, 21 theilbar, ein Satz, den theilweise Stifel in seiner Arithmetica integra aufführt.

2) Sei $m=2$, $r=2$, so ist

$$m^{2r+1}\pm1=2^5\pm1=\begin{cases}33\\31\end{cases},\ \frac{(m^{2r+1}+1)(m^{2r+1}-1)}{m^2-1}=\frac{33.31}{3}=11.31;$$

also ist

$$1+2^{2^n}+4^{2^n}+8^{2^n}+16^{2^n},\ n>0 \qquad (6)$$

durch 31 theilbar, was auch das ganze n sei.

3) Sei $m=3$, $r=1$, so ist

$$m^{2r+1}\pm1=3^3\pm1=\begin{cases}28\\26\end{cases},\ \frac{(m^{2r+1}+1)(m^{2r+1}-1)}{(m+1)(m-1)}=\frac{28.26}{4.2}=7.13;$$

also ist die Grösse

$$1+3^{2^n}+9^{2^n},\ n>0 \qquad (7)$$

durch 7, 13, also auch durch 91 theilbar.

4) Sei $m=3$, $r=2$, so ist

$$m^{2r+1}\pm1=3^5\pm1=\begin{cases}244\\242\end{cases},\ \frac{(m^{2r+1}+1)(m^{2r+1}-1)}{(m+1)(m-1)}=\frac{244.242}{4.2}=61.121;$$

also ist

$$1+3^{2^n}+9^{2^n}+27^{2^n}+81^{2^n},\ n>0 \qquad (8)$$

durch 61, 121, also auch durch 7381 theilbar.

5) Sei $m=4$, $r=1$, so ist

$$m^{2r+1}\pm 1 = 4^3 \pm 1 = \begin{cases}65\\63\end{cases}, \frac{(m^{2r+1}+1)(m^{2r+1}-1)}{(m+1)(m-1)} = \frac{65.63}{5.3} = 13.21;$$

also ist

$$1+4^{2^n}+16^{2^n},\ n>0 \qquad (9)$$

durch 13, 21, also auch durch 273 theilbar.

Aus dem Lehrsatze in §. 1. kann man leicht noch folgende allgemeine Folgerung ziehen:

„Sind die dort angegebenen Bedingungen erfüllt, so sind je $2r+1$ aufeinanderfolgende Glieder der Reihe:

$$a, a.m^{2^n}, a.(m^2)^{2^n}, a.(m^3)^{2^n}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

durch p theilbar, wenn a eine ganze Zahl ist."

§. 3.

Ganz auf gleiche Weise, wie in §. 1., erhält man folgenden Lehrsatz:

„Sind die Grössen

$$m^{2r+1}+1 \text{ oder } m^{2r+1}-1,$$

und

$$\frac{(m^{2r+2}+1)(m^{2r+2}-1)}{(m+1)(m-1)}$$

durch p theilbar, so ist es auch

$$1+(m^1)^{2^n}+(m^2)^{2^n}+(m^3)^{2^n}+\ldots\ldots+(m^{2r+1})^{2^n},\ n>0, \qquad (7)$$

was auch das ganze n sei"

In diesem Falle sind je $(2r+2)$ Glieder der Reihe

$$a, a.m^{2^n}, a.(m^2)^{2^n}, a.(m^3)^{2^n}, \ldots\ldots$$

durch p theilbar, wenn a ganz ist.

§. 4.

Wir wollen nun wieder einige besondere Fälle betrachten.

1) Sei $m=3$, $r=1$, so ist

$$m^{2r+1} \pm 1 = 3^3 \pm 1 = \begin{cases} 28 \\ 26 \end{cases}, \frac{(m^{2r+2}+1)(m^{2r+2}-1)}{m^2-1} = \frac{(3^4+1)(3^4-1)}{3^2-1}$$
$$= \frac{82.80}{4.2} = 20.41.$$

Folglich ist

$$1 + 3^{2^n} + 9^{2^n} + 27^{2^n}, \quad n > 0 \tag{8}$$

durch 4 theilbar, was auch das ganze n sei.

2) Sei $m=2$, $r=2$, so ist

$$m^{2r+1} \pm 1 = 2^5 \pm 1 = \begin{cases} 33 \\ 31 \end{cases}, \frac{(m^{2r+2}+1)(m^{2r+2}-1)}{(m+1)(m-1)} = \frac{(2^6+1)(2^6-1)}{3.1}$$
$$= \frac{65.63}{3.1} = 65.21.$$

Folglich ist

$$1 + 2^{2^n} + 4^{2^n} + 8^{2^n} + 16^{2^n} + 32^{2^n}, \quad n > 0 \tag{9}$$

durch 3 theilbar, was auch das ganze n sei. Dieselbe Grösse ist nach §. 2. 2) auch durch 7 theilbar, also ist sie es auch durch 21, u. s. f.

§. 5.

Man kann leicht auch folgende Sätze ableiten, worin wieder m, n, r ganze (positive) Zahlen sind.

„Sind die Grössen $m^{2r+1}-1$ und $\frac{m^{2r+1}-1}{m-1}$ durch p theilbar, so ist es auch

$$1 + (m^1)^{2^n} + (m^2)^{2^n} + \dots\dots\dots + (m^{2r})^{2^n}, \quad n \overline{\gtrless} 0.“$$

Ferner:

„Sind $m^{2r+1}-1$ und $\frac{m^{2r+2}-1}{m-1}$ durch p theilbar, so ist es auch

$$1 + (m^1)^{2^n} + (m^2)^{2^n} + \dots\dots + (m^{2r+1})^{2^n}, \quad n \overline{\gtrless} 0.“$$

Bemerkung über die Continuität der Funktionen.

Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena.

Wenn eine Funktion $f(x)$ an irgend einer Stelle, etwa für $x=a$, eine Unterbrechung der Continuität erleidet, so kommen ihr daselbst zwei verschiedene Werthe zu, von denen der eine den Endwerth der bisherigen Reihe von Werthen bildet und der andere den Anfang zu einer neuen Reihe macht. Denken wir uns z. B. den Vermögenszustand als Funktion der Zeit, die letztere (x) auf einer Abscissenachse vom Punkte O an gerechnet (Taf. X. Fig. 7.) und den Kassenbestand $[f(x)]$ als Ordinate senkrecht, so kann in dieser Vermögenscurve eine Diskontinuität eintreten, wenn durch einen Zufall (z. B. Lotteriegewinn, Erbschaft u. dgl.) das Vermögen plötzlich steigt oder eben so zufällig durch Verlust plötzlich verringert wird. Ereignet sich ein solcher Zufall am Ende der Zeit a, so gehören zur Abscisse $x=a$ zwei verschiedene Ordinaten, etwa AM und AN, die man nach Lejeune Dirichlet's Vorschlag sehr passend dadurch unterscheidet, dass man die erste AM mit $f(a-0)$ und die zweite AN mit $f(a+0)$ bezeichnet.

Diese einfachen Bemerkungen führen leicht zu der Auflösung des Problemes: „ein Kriterium anzugeben, woraus man erkennen kann, ob eine bestimmte Funktion $f(x)$ Unterbrechungen der Continuität erleidet und, wenn diess der Fall sein sollte, an welchen Stellen diese Unterbrechungen eintreten.“ Als ein solches Kennzeichen führt Cauchy an, man solle nachsehen, ob es Werthe von x giebt, für welche die Differenz

$$f(x+\delta)-f(x)$$

sich bei unendlich abnehmenden δ einer von Null verschiedenen Gränze nähert; findet sich ein solcher Werth $x=a$, so ist dadurch eine Stelle bestimmt, an welcher $f(x)$ unstetig wird. Dieses Kriterium ist aber sehr ungenügend; denn setzt man für x den Werth a, so weiss man nicht, ob unter $f(a)$ der Werth $f(a-0)$ oder der andere $f(a+0)$ verstanden wird; im ersten Falle wäre allerdings

$$\operatorname{Lim}[f(a+\delta)-f(a-0)] \gtrless 0,$$

im zweiten Falle aber

$$\operatorname{Lim}[f(a+\delta)-f(a+0)]=0,$$

wie man unmittelbar aus der vorigen Figur ersieht, wenn man die Ordinate $f(a+\delta)$ und jede der obigen Differenzen durch eine Parallele zu OA construirt. So ist z. B. die Funktion $\frac{1}{x-a}$ diskonti-

nuirlich an der Stelle $x=a$, denn hier geht die Funktion aus $-\infty$ nach $+\infty$ sprungweis über: ebenso erleidet Arctan $\frac{1}{x-a}$ an derselben Stelle eine Unterbrechung der Continuität und springt von

$$\text{Arctan}\,(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \text{ nach Arctan } (+\infty) = +\frac{\pi}{2}$$

über, aber trotzdem kann hier Cauchy's Kriterium trügen; denn man hätte

$$f(a+\delta)-f(a) = \text{Arctan}\,\frac{1}{\delta} - \text{Arctan}\,\frac{1}{a-a},$$

und mithin

$$\text{Lim}\,[f(a+\delta)-f(a)] = \text{Arctan}\,\infty - \text{Arctan}\,\frac{1}{0}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Diese Unsicherheit veranlasste mich in meiner „algebraischen Analysis" das bessere Kriterium

$$\text{Lim}\,[f(a+\delta)-f(a-\delta)] \gtrless 0$$

aufzustellen, aber auch dieses reicht nicht überall aus. Man betrachte z. B. die beiden Funktionen

$$\frac{1}{x-a} \text{ und } \frac{1}{(x-a)^2}.$$

Construirt man sie geometrisch, so erhält man die beiden in Taf. X. Fig. 8. und Taf. X. Fig. 9. dargestellten Curven. Mein Kriterium sagt nun, die eine sei unstetig, die andere aber stetig, denn für $f(x) = \frac{1}{x-a}$ ist

$$\text{Lim}\,[f(a+\delta)-f(a-\delta) = \text{Lim}\left[\frac{1}{+\delta} - \frac{1}{-\delta}\right] = \infty,$$

dagegen für

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}:$$

$$\text{Lim}\,[f(a+\delta)-f(a-\delta)] = \text{Lim}\left[\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{\delta^2}\right] = 0.$$

Dieser Ausspruch streitet aber gegen die Anschauung, denn beide Curven bestehen aus zwei getrennten Zweigen mit gemeinschaftlicher Asymptote, auf die Lage jener Zweige kommt offenbar

nichts an, und wenn man die erste Curve für unstetig erklärt, so muss man ganz sicher auch die zweite dafür halten. Daher ist jenes Kriterium noch zu beschränkt und ich stelle desshalb das allgemeinere auf: „die Funktion $f(x)$ erleidet an der Stelle $x=a$ eine Unterbrechung der Continuität, wenn

$$\text{Lim}\,[f(a+\delta)-f(a-\varepsilon)] \gtrless 0$$

ist, wobei δ und ε zwei verschiedene Grössen sind, die sich der gemeinschaftlichen Gränze Null nähern." So hat man z. B. für $f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$ und $x=a$:

$$\text{Lim}\,[f(a+\delta)-f(a-\varepsilon)] = \text{Lim}\left[\frac{1}{\delta^2}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right],$$

und etwa für $\varepsilon=2\delta$ (um nur die Verschiedenheit von δ und ε auszudrücken):

$$\text{Lim}\,[f(a+\delta)-f(a-\varepsilon)] = \text{Lim}\left(\frac{3}{4}\frac{1}{\delta^2}\right)=\infty,$$

also $f(x)$ diskontinuirlich an der Stelle $x=a$. Ueberhaupt kann man immer $\varepsilon=k\delta$ setzen, wo k eine beliebige aber constante Grösse bezeichnet.

Wenn y eine ganze rationale algebraische Function des $n$ten Grades ist, so ist immer

$$\partial y=\Delta y-\frac{1}{2}\Delta^2 y+\frac{1}{3}\Delta^3 y-\frac{1}{4}\Delta^4 y+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Delta^n y.$$

G.

Deutsche Maasse, Münzen und Gewichte.

I.

Vorschläge zur Reform der deutschen Maasssysteme.

Von
Herrn H. Scheffler,
Bauconducteur bei den Herzoglich Braunschweigischen Eisenbahnen.

§. 1.

In den deutschen Maasssystemen bereitet sich eine grossartige Reform vor. Das Bestehende erweist sich nach mehr denn tausendjährigem Gebrauche als unzweckmässig. Man hat vielfache Mängel an den Mitteln und Methoden entdeckt, deren sich die deutschen, ja, man kann immer noch sagen, alle Völker der Erde bis heute bedienen, um von der Quantität der physischen Grössen deutliche Vorstellungen zu erlangen; und man geht darauf aus, durch Beseitigung dieser Mängel die fraglichen Methoden einer grösseren Vollkommenheit entgegenzuführen.

Bei einer jeden Umwälzung von Institutionen, welche so tief in die menschlichen Beschäftigungen eingreifen und der Handlungsweise in so vielfachen Beziehungen die äussere Norm liefern, wie die Maasssysteme, ist der Uebergang von dem Alten zum Neuen stets ein schwieriger Akt, welcher von den grössten Belästigungen der Gesellschaft begleitet ist, da er die Ausreissung der von Kindheit an eingewurzelten Gewohnheiten, die Aneigenung einer ganz neuen Anschauungsweise über den Werth der Grössen, und hundertfältige Aenderungen in den Regeln erfordert, nach welchen die alltäglichsten Bedürfnisse befriedigt werden. Deshalb ist es Pflicht aller Derjenigen, welche auf solche Umwälzungen einen besonderen Einfluss zu üben berufen sind, mit grösster Umsicht und Unbefangenheit die wahren Mängel des Bestehenden und die wahren Erfordernisse des Neueinzurichtenden zu erforschen, damit die Mühen, welche Millionen von Menschen bei jenem Umsturze

sich auferlegen müssen, auch durch die höchsten Erfolge gekrönt werden. Diese Rücksicht hat mich bestimmt, durch die nachstehende Schrift auf einige wesentliche Bedingungen eines möglichst vollkommenen Maasssystemes aufmerksam zu machen, welche bisher noch keine öffentlichen Vertreter gefunden zu haben scheinen.

Da eine jede Quantitätsbestimmung auf dem Akte der Vergleichung irgend einer gegebenen Grösse mit einer anderen Ein für alle Mal als bekannt vorausgesetzten Grundgrösse beruhet; so kommen bei dieser Operation wesentlich zwei Dinge in Betracht, nämlich 1) der absolute Werth der Grundgrösse oder Maasseinheit, und 2) die systematische Art und Weise, wie diese Grundgrösse behuf Messung einer anderen in Anwendung gebracht werden soll, oder das Gesetz, nach welchem die Maasseinheit selbst in untergeordnete Einheiten getheilt und zu höheren Einheiten zusammengesetzt wird.

§. 2.

Hinsichtlich des ersten Punktes hat man bei den deutschen Maasssystemen keineswegs so sehr über die unzweckmässig gewählte Grösse der Einheiten zu klagen, als vielmehr über deren grosse Mannichfaltigkeit in den verschiedenen Ländern. Nicht allein in den einzelnen Bundesstaaten, sondern in vielen Provinzen, Landschaften und Städten gibt es theils gesetzlich, theils herkömmlich verschiedene Grundeinheiten; nach welchen die Längen, Flächen und Körper, die Gewichte, das Geld u. dergl. gemessen werden. Zu den durch neuere Landesverordnungen eingeführten Gemässen gesellen sich oftmals noch die früher üblichen, deren Gebrauch sich ebenfalls erhalten hat. Korporationen, Behörden, und selbst einzelne Privaten haben sich hin und wieder für ihre speziellen Wirkungskreise eigene Maasseinheiten gebildet oder aus dem Auslande erwählt; so der preussische Zollverein und mehrere Bahnverwaltungen für das Gewicht; der nahe am Entstehen gewesene Postverein für das Geld; Maschinenfabriken für die Längen, welche häufig nach englischem Maasse bestimmt werden; mathematische Schriftsteller für Längen und Gewichte, wobei bald dieses, bald jenes einheimische, öfter aber das neue französische Gemäss zu Grunde gelegt wird.

Dieses Chaos von Maasseinheiten hängt sich erschwerend an Handel und Wandel. Der Kaufmann und Gewerbetreibende wird in seinem Geschäftsbetriebe auf wenige Meilen in der Runde durch eine Menge von Reduktionen belästigt. Der Techniker hat bei seinen Ausführungen mit ängstlicher Sorgfalt auf das durch Zeichnungen oder Kontrakte bedungene Grundmaass zu achten und muss in seinen Werkstätten und Laboratorien die verschiedensten Maassstäbe und Gewichte mit einander kollidiren lassen. Der Reisende kann sich im eigenen Vaterlande nicht bewegen, ohne die verschiedensten Münzsorten mit sich zu führen oder seine Kasse einem ewigen Wechsel zu unterwerfen, wobei Verluste und Verlegenheiten die stetigen Begleiter sind. Der Naturforscher und Jeder, welcher wissenschaftliche Studien über Grössenbestimmungen aus der physischen Welt unternimmt, geräth fast in Verzwei-

felung über das Heer von Grundmaassen, auf welches die verschiedenen Schriften basirt sind, da eine Vergleichung der Resultate unter sich und eine praktische Anwendung derselben oftmals erst nach mühsamer Umrechnung, also erst nach der Vollendung einer Arbeit möglich ist, welche vollkommen überflüssig sein würde, wenn sämmtliche Schriftsteller von vorn herein ihre Untersuchungen und Beobachtungen mit einerlei Maass angestellt hätten. Zu diesen Mühen der Reduktion, wodurch viele auf praktische Brauchbarkeit berechnete Bücher einen grossen Theil ihrer Popularität verlieren, kommt noch ein anderer höchst empfindlicher Uebelstand, welchen namentlich alle Diejenigen zu beklagen haben, welche sich auf feine Messungen einlassen wollen. Es ist dies der Uebelstand, dass die verschiedenen Maasseinheiten nicht einmal sämmtlich mit der erforderlichen Genauigkeit bestimmt sind, und dass bei den vorgenommenen Bestimmungen nicht nach denselben Grundbedingungen verfahren ist, so dass man häufig gar nicht im Stande ist, zwei Maassangaben mit der gewünschten Präzision auf einander zurückzuführen. Daher findet man fast in allen Handbüchern der Maasskunde abweichende Angaben über die wahre Länge Ein und desselben Fusses und über das Gewicht Ein und desselben Pfundes. Auf solche ungenau bestimmte Maasse gründen sich dann wieder die Angaben für die Grösse der gleichnamigen Maasse anderer Länder, wodurch der Werth der letzteren noch zweifelhafter wird, als der der ersteren. Bei den Gewichtsbestimmungen ist das Gewicht einer gewissen Menge Wasser bald im Zustande der grössten Dichtigkeit, bald bei der Temperatur des schmelzenden Eises, bald bei 18 Grad Wärme als Ausgangspunkt angenommen, ohne dass das Verhältniss der spezifischen Gewichte des Wassers in diesen drei Zuständen mit hinlänglicher Schärfe bekannt wäre. Wenngleich die zuletzt erwähnten Ungenauigkeiten so geringfügig sind, dass sie für die Anwendung der Maasse auf die gewöhnlichen Vorgänge im menschlichen Leben ganz unbeachtet bleiben können; so sind sie doch gross genug, um den feinen wissenschaftlichen Untersuchungen oftmals einen erheblichen Theil ihres Werthes zu schmälern.

So ist die Mannichfaltigkeit der Maasseinheiten für Deutschland der Quell von unzähligen Unbequemlichkeiten, nutzlosen Rechenarbeiten, Ungenauigkeiten und Irrthümern. Das dringendste Bedürfniss vor allen anderen besteht daher in der Einführung gleicher und fest bestimmter Einheiten behuf Messung der verschiedenen Grössenarten für alle Länder Deutschlands. Es braucht über die Nothwendigkeit einer solchen Maassregel Nichts weiter angeführt zu werden, da die ganze Nation von der Nützlichkeit derselben überzeugt ist und sehnlichst den Augenblick herbeiwünscht, wo Ein und dieselbe Sprache nicht bloss nach den Lauten, sondern auch nach den darunter verstandenen Objekten ein vollkommenes Verständigungsmittel für Ein und dasselbe Volk wird.

Der absolute Werth dieser Maasseinheiten hängt in mancher Beziehung von dem Gesetze ab, welches über die Eintheilung dieser Einheiten vereinbart wird. Wir müssen also Betrachtungen über den ersteren Gegenstand so lange verschieben, bis wir den letzteren besprochen haben.

§. 3.

Was nun diesen zweiten der obigen beiden Punkte, nämlich die Eintheilung der Maasseinheiten in untergeordnete Einheiten und die Zusammensetzung derselben zu höheren Einheiten, oder überhaupt das eigentliche System des Gemässes betrifft; so sind hierbei mehrere Momente ins Auge zu fassen.

Wäre es nicht die praktische Brauchbarkeit, welche als wesentliche Bedingung an ein Maasssystem gestellt wird, und welche unter Anderem fordert, dass die Messungen aller Klassen von einerlei Grössenart, z. B. die Messungen aller sehr kleinen, aller mittleren und aller sehr grossen Längen, leicht bewerkstelligt werden können, dass die Maassangaben eine bequeme Uebersicht und Vergleichung gewähren, dass die Rechnungen mit den aus den Messungen hervorgehenden Zahlen die grösstmögliche Einfachheit darbieten, u. s. w.; so würde ein System von unter- und übergeordneten Einheiten vollkommen überflüssig sein. Man könnte sich damit begnügen, nur eine einzige Grundeinheit für jede Grössenart, z. B. den Fuss für die Längen, anzunehmen, und alle Längen, welche kleiner sind als Ein Fuss, durch die entsprechenden echten Bruchtheile eines Fusses, und alle Längen, welche grösser sind als Ein Fuss, durch die korrespondirenden Vielfachen und unechten Bruchtheile desselben Fusses ausdrücken.

Welche Unbequemlichkeit und Belastung des Abstraktionsvermögens würde aber damit verbunden sein, wenn man demgemäss z. B. die kleinen Variationen des Barometerstandes nach Fussen, statt nach Linien, oder die Entfernungen zwischen Städten auf der Erde oder gar zwischen Himmelskörpern nach Fussen, statt nach Meilen, messen wollte! Im ersteren Falle würde man es immer mit ungemein kleinen Brüchen, im letzteren immer mit ausserordentlich grossen Zahlen zu thun haben, wodurch die Rechnung sehr erschwert und die Vergleichung ähnlicher Grössen unter einander ihrer Anschaulichkeit beraubt werden würde.

Die Forderung also, dass der Gebrauch eines Maasses mit den vielseitigsten Bequemlichkeiten verknüpft sei, damit nicht bloss der mit Grössenbestimmungen vertrauter Gewordene, sondern auch der an mathematisches Denken weniger Gewöhnte durch das Resultat der Messung einen leicht fasslichen und mit ferneren Rechnungsoperationen sich leicht verschmelzenden Ausdruck erlange, macht es durchaus nothwendig, dass die Grundeinheit, welche an sich selbst so gewählt sein muss, dass sie sich zur Messung der am meisten vorkommenden Klassen Ein und derselben Grössenart bequem verwenden lässt, noch in gewisse niedrigere Einheiten getheilt sei, vermittelst welcher eine ebenso bequeme Messung der an Quantität bedeutend kleineren Grössen möglich ist, und dass jene Grundeinheit auch zu gewissen höheren Einheiten zusammengesetzt sei, durch welche eine übersichtliche Messung der an Quantität bedeutend grösseren Gegenstände bewirkt werden kann. Auf diese Weise vermeidet man dann namentlich die häufig sehr unbequemen Brüche, indem man eine Quantität, welche nicht gerade ein mässig grosses Viel-

faches der Grundeinheit bildet, als eine Summe von Vielfachen der verschiedenen unter- und übergeordneten Maasseinheiten darstellt. So hat man z. B. für den in mancher Hinsicht unübersichtlichen Ausdruck $13^{89}/_{144}$ Fuss den leichter zu fassenden Werth 13 Fuss 7 Zoll 5 Linien. Die Praxis aller Völker hat sich auch bisher über die Nothwendigkeit eines solchen Systemes von niedrigeren und höheren Einheiten ausgesprochen.

Gehen wir jetzt weiter zu dem Prinzipe über, nach welchem die Eintheilung der höheren in niedrigere Einheiten vorzunehmen sei; so scheint es zwar, wenn man lediglich die Messung einer Grösse als Endabsicht bei der Grössenbestimmung ansieht, gleichgültig zu sein, ob man zu der nächst niedrigeren Einheit jedesmal genau denselben aliquoten Theil nehme, oder ob man willkürlich für die erste untergeordnete Einheit diesen, und für die zweite jenen Theil festsetze. Man würde z. B. zu derselben Einsicht über den Werth einer Summe Geldes gelangen, gleichviel, ob man den als Grundeinheit zu betrachtenden Thaler in 24 Groschen und den Groschen in 12 Pfennige, oder ob man den Thaler in 23 Groschen und den Groschen in 17 Pfennige theilte. In der Wirklichkeit herrscht sogar bei uns vielfach eine solche Willkürlichkeit; so ist z. B. in manchen Ländern

bei den Längenmaassen die Ruthe in 16 Fuss, der Fuss in 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien;

„ „ Gewichtsmaassen der Zentner in 100 Pfund, das Pfund in 32 Loth, das Loth in 4 Quentchen;

„ „ Geldmaassen der Thaler in 24 Groschen, der Groschen in 12 Pfennige;

u. s. w. getheilt.

Allein wenn beachtet wird, dass die Messung einer Grösse in sehr zahlreichen Fällen zu dem Zwecke unternommen wird, das Resultat in gewisse Rechnungsoperationen zu verflechten; so erkennt man bald, dass die Ausführung vieler Rechnungen bedeutend erleichtert wird, wenn bei Ein und derselben Grössenart stets eine gleiche Eintheilung der Einheiten gewählt wird, wie dies z. B. bei den französischen Maasssystemen stattfindet, wo unter Anderem das Meter in 10 Dezimeter, das Dezimeter in 10 Zentimeter, das Zentimeter in 10 Millimeter getheilt ist. Denn unter solchen Umständen besteht zwischen je zwei unmittelbar einander übergeordneten oder zwischen je zwei um gleich viel Systemglieder von einander abstehenden Einheiten genau dasselbe Verhältniss; es verhält sich z. B. 1 Millimeter zu 1 Zentimeter, wie 1 Zentimeter zu 1 Dezimeter, oder wie 1 Dezimeter zu 1 Meter u. s. w., und es verhält sich auch 1 Millimeter zu 1 Dezimeter, wie 1 Zentimeter zu 1 Meter u. s. w. Demnach wird es unter manchen anderen Rechnungsvortheilen thunlich sein, dass man das Fazit aus der Rechnung mit einer Grösse, welche als die Summe mehrerer subordinirten Einheiten gegeben war, nach den sich herausstellenden Zahlwerthen unmittelbar auf einen anderen Fall übertrage, wo die gegebene Grösse nach höheren oder niedrigeren Einheiten benannt ist, als vorhin. Wäre, beispielsweise, der

Umfang von einem Kreise, dessen Durchmesser 9 Zoll 5 Linien beträgt, gleich 2 Fuss 5 Zoll $7\frac{1}{7}$ Linien; so würde ohne weitere Rechnung der Umfang eines anderen Kreises, dessen Durchmesser 9 Fuss 5 Zoll beträgt, gleich 2 Ruthen 5 Fuss $7\frac{1}{7}$ Zoll sein, sobald nur die Ruthe 12 Fuss, der Fuss 12 Zoll und der Zoll 12 Linien enthält, was jedoch keineswegs wahr ist, sobald die Ruthe 16 Fuss, der Fuss 12 Zoll und der Zoll 12 Linien enthielte, indem alsdann erst aus einer neuen Rechnung für den Umfang des letzteren Kreises der Werth von 1 Ruthe 13 Fuss $7\frac{1}{7}$ Zoll gefunden werden würde.

Durch die beschriebene gleichmässige Eintheilung der Einheiten werden aber nicht bloss die verwickelteren Rechnungen mit den Resultaten einer wirklichen Messung erleichtert, sondern es gewinnt auch die ganze Maassbestimmung selbst bedeutend an Uebersichtlichkeit und Fasslichkeit, da sich hierdurch das ganze Maasssystem in lauter Gruppen absondert, welche genau in derselben Weise aus den zunächst vorhergehenden gebildet sind, und demzufolge einen konsequenteren Schematismus darbieten, an welchem die zur Auffassung verschiedener Grössenwerthe erforderliche Einbildungskraft eine kräftigere Stütze findet.

Zu einem vollkommenen Maasssysteme gehört also zuvörderst bei jeder Grössenart eine gleichmässige Eintheilung der höheren Einheiten in die nächst niedrigeren.

§. 4.

Durch die Bestrebungen der Menschheit werden nicht bloss Quantitäten Ein und derselben Grössenart unter sich, z. B. Gewichtsmengen mit Gewichtsmengen, sondern auch Quantitäten ganz verschiedener Art unter einander in Wechselbeziehung gesetzt. So kommen Geldsummen mit Gewichtsmengen und Körpervolumen, Zeiträume mit Längengrössen u. s. w. in die mannichfaltigste Verbindung und demnach in Rechnungsverknüpfung. Ist nun eine jede Grössenart nach einem besonderen Prinzipe der Maasseintheilung gemessen; so ist klar, dass bei einer Rechnung, in welche solche verschiedenartige Grössen verwickelt werden, ebendieselben Unbequemlichkeiten entstehen werden, welche vorhin für den Fall angedeutet sind, wo nicht einmal die Einheiten Ein und derselben Grössenart in eine gleiche Anzahl von untergeordneten Einheiten konsequent eingetheilt waren. Denn bei der Rechnung, welche immer in absoluten Zahlen ausgeführt wird, verschwindet das Charakteristische, welches die besondere Art einer Grösse ausmacht, und es bleibt nur die Menge der betreffenden höheren und niedrigeren Einheiten einer jeden Grössenart als Zahlwerth zurück. Man würde also bei ungleichen Maasssystemen der Rechnung ebenso unbehülfliche Zahlwerthe darbieten, wie wenn alle darin vorkommenden Grössen gleichartig, aber nach verschiedenen Prinzipien gemessen wären. Bei überall gleichen Systemen fände dagegen stets ein gleiches Verhältniss zwischen allen untergeordneten Einheiten der Einen Grössenart und allen untergeordneten Einheiten einer anderen Grössenart statt, wodurch die grösste

Einfachheit in den Beziehungen der verschiedenartigen Grössen und die erheblichsten Rechnungsvortheile erzielt werden.

Als einfaches Beispiel zur Erläuterung des eben Gesagten denke man sich den Thaler in 12 Groschen, den Groschen in 12 Pfennige, ferner das Pfund in 12 Loth, das Loth in 12 Quentchen getheilt. Wenn alsdann der Preis eines Pfundes von irgend einem Stoffe 7 Rthlr. 4 Gr. beträgt; so ist ohne weitere Rechnung der Preis eines Lothes von demselben Stoffe 7 Gr. 4 Pf. und der Preis eines Quentchens $7^4/_{12}$ Pf. Die hierin liegenden Rechnungsvortheile sind auf keine Weise zu erreichen, wenn das Geldsystem anders normirt ist, als das Gewichtssystem.

Hiernach besteht die zweite Bedingung eines möglichst vollkommenen Maasssystems in der **Gleichheit der Eintheilung der Maasseinheiten für die verschiedensten Grössenarten.**

§. 5.

Im Vorstehenden ist hinsichtlich der systematischen Eintheilung der Maasseinheiten bloss das allgemeine Erforderniss erkannt, dass diese Eintheilung gleich sein müsse sowohl für alle höheren und niedrigeren Einheiten Ein und derselben Grössenart, z. B. für die Thaler, Groschen, Pfennige beim Gelde, als auch für den Inbegriff aller übrigen Grössenarten, z. B. für die Messung des Geldes, des Gewichtes, der Längen u. s. w. Ueber die absolute Menge der Einheiten, welche hierbei immer eine nächst höhere Einheit ausmachen sollen, oder über die **Grundzahl** des Maasssystemes liefert die obige Betrachtung noch keinen näheren Anhaltspunkt.

Jetzt beachte man aber, dass wenn eine Grössenquantität praktisch gemessen worden ist, es behuf geistiger Vergegenwärtigung des Werthes jener Quantität in Beziehung zu der Maasseinheit immer auf die Darstellung einer gewissen Menge von Einheiten oder Theilen dieser Einheiten ankommt. Um Mengen aller Art im Verhältniss zu ihrer Einheit begrifflich aufzufassen, bedienen wir uns, abgesehen von allem empirischen Inhalte jener Einheit, der abstrakten **Zahlen**, welche ebenfalls nach einem bestimmten Systeme gebildet sind, um der Einbildungskraft bei der Auffassung grosser Mengen dadurch zu Hülfe zu kommen, dass bei dem Fortschritte von kleineren zu grösseren Mengen stets eine bestimmte Anzahl von Einheiten der niedrigeren Ordnung zu Einer Einheit der nächst höheren Ordnung zusammengefasst werden. So zählen wir die Grundeinheiten unseres Zahlensystems oder die **Einer** von 1 bis 9, fassen bei grösseren Mengen aber immer 10 Einer zu Einem **Zehner** zusammen, bis wir vor der Zahl 100 anlangen, von wo an wir immer 10 Zehner zu Einem **Hunderter** vereinigen, u. s. f.

Das Zahlensystem ist also gewissermaassen ein Maasssystem für alle Vielheiten oder Mengen, gleichviel, welche Bedeutung die physische Grundeinheit einer solchen Menge besitzt und nach welchem Prinzipe das Verhältniss der gemessenen Grösse zu jener Grundeinheit bestimmt ist. Weicht nun das Zahlensystem in seiner Anordnung von dem speziellen Systeme ab, nach welchem

physisch eine Grösse gemessen ist; so laufen offenbar zwei verschiedene Prinzipe neben einander her, wovon das Eine, nämlich das letztere, dazu dient, die Entstehung einer gewissen Menge aus seiner physischen Einheit anschaulich zu machen, und wovon das andere, nämlich das erstere, dazu bestimmt ist, überhaupt die Entstehung von Mengen aus Einheiten ganz im Allgemeinen fasslich zu machen.

Da alle Rechnungen in Zahlen ausgeführt werden, also sich wesentlich in dem Schematismus des Zahlensystems bewegen; so leuchtet auf den ersten Blick ein, welche grosse Rechnungsvortheile durch die eben erwähnte Verschiedenheit verloren gehen, und obgleich wir in der That kein mit dem Zahlensystem übereinstimmendes Maasssystem besitzen und uns der Umgang mit den gegenwärtigen Systemen zur innigen Gewohnheit geworden ist; so wird sich doch Jeder leicht von dem grossen Gewinne an Leichtigkeit und Eleganz überzeugen, welche die Rechnungen annehmen würden, wenn die ihnen unterbreiteten Grössen nach einem Prinzipe gemessen wären, welches mit der Zahlenbildung genau harmonirte.

Der Uebergang zu den sukzessiv höheren Einheiten eines Gemässes würde getreu dem Uebergange von Einern zu Zehnern, zu Hundertern, zu Tausendern u. s. w. entsprechen; ebenso würde ein Herabsteigen zu den sukzessiv niedrigeren Einheiten gleichen Schritt halten mit dem Herabsteigen von Einern zu Zehnteln, zu Hundertsteln, zu Tausendsteln oder auch von Tausendern zu Hundertern, zu Zehnern u. s. w.

Hiermit verbinden sich alle die grossen Bequemlichkeiten, welche aus der ungemein geistreichen Bezeichnung der Zahlen durch die Stellung der Ziffern entspringen, und welche eben so sehr den Rechnungsoperationen mit sogenannten benannten Zahlen zu gute kommen würden, wie sie den Operationen mit unbenannten oder abstrakten Zahlen eigen sind.

Wir charakterisiren nämlich den Rang oder den Werth, welchen eine gewisse Menge höherer Zahleinheiten im Vergleich zu einer gewissen Menge der nächst niedrigeren Einheit besitzen soll, einfach dadurch, dass wir die Ziffer, welche die erstere Menge bezeichnet, nach der linken Seite vor die Ziffer setzen, welche die letztere Menge bezeichnet. Demnach schreibt sich eine Gesammtmenge von 3 Einern, 7 Zehnern und 2 Hundertern: 273. Dieses Prinzip wird in seiner vollen Reinheit auch dann noch erhalten, wenn es darauf ankommt, Mengen von Einheiten darzustellen, welche sukzessiv in absteigender Linie auf die Einer oder Grundeinheiten folgen, indem man diese Theile der Grundeinheit, welche in Zehnteln, Hundertsteln, Tausendsteln etc. bestehen, von den sogenannten ganzen Zahlen durch ein Komma trennt und dann dieselbe Reihenfolge beobachtet. So ist die Zahl 35,924 der Ausdruck für 3 Zehner, 5 Einer, 9 Zehntel, 2 Hundertstel, 4 Tausendstel.

Ist nun ein jedes Maasssystem ebenso geordnet, wie das Zahlensystem; so sind ohne Weiteres 253 Zoll gleich 25 Fuss 3 Zoll oder gleich 2 Ruthen 5 Fuss 3 Zoll. Ebenso sind 25,3 Zoll gleich 25 Zoll 3 Linien oder gleich 2 Fuss 5 Zoll 3 Linien. Eine recht-

winkliche Fläche, welche 11 Ruthen 8 Fuss 3 Zoll lang und 2 Ruthen 4 Fuss 6 Zoll breit ist, enthält, weil das Produkt der beiden Zahlen 1183 und 246 gleich 291018 ist, 29 Quadratruthen, 10 Quadratfuss und 18 Quadratzoll.

Solche Vereinfachungen der Rechnung, welche fast bei jeder Operation eintreten, sind ohne weitere Erläuterung für sich selbst verständlich. Sie lassen sich in dem ungemein wichtigen Resultate zusammenfassen, dass bei Maasssystemen, welche mit dem Zahlensysteme übereinstimmen, ganz und gar keine Reduktionsrechnungen von höheren auf niedrigere oder von niedrigeren auf höhere Maasseinheiten vorkommen, sondern dass dieses Geschäft auf eine mechanische Trennung oder Zusammenstellung gegebener Ziffern hinausläuft, da die blosse Stelle einer jeden Ziffer in einer benannten Zahl schon den Rang derselben in Beziehung zu der Grundeinheit versinnlicht.

Hieraus ergibt sich die dritte Folgerung, dass wenn die Maasssysteme zu den einfachsten Rechnungen führen sollen, sie hinsichtlich der Eintheilung ihrer Einheiten ebenso geordnet sein müssen, wie das absolute Zahlensystem.

Dieser Forderung haben die Franzosen bei ihren neuen Maasssystemen mit ziemlicher Konsequenz zu entsprechen gesucht, indem sie in Betracht des dekadischen Zahlensystems auch den verschiedenen Maasssystemen die Grundzahl 10 gegeben haben.

§. 6.

Bei der letzteren Untersuchung ist nur von den erreichbaren Rechenvortheilen die Rede gewesen, welche allerdings zu der eben ausgesprochenen Bedingung führen. Allein die Gemässe haben nicht bloss den Zweck, Zahlgrössen für einen etwaigen mathematischen Kalkul vorzubereiten. Ihr unmittelbarster Beruf bestimmt sie, zu einer Verständigung bei den praktischen Bedürfnissen des Lebens, zu einer Ausgleichung der materiellen Güter und zu anderen Manipulationen, welche nicht bloss die Rechner, sondern die ganze Masse des Volkes in eine Thätigkeit versetzen, wobei die Leichtigkeit oder Schwierigkeit des Rechenexempels ganz in den Hintergrund tritt und es sich um Bequemlichkeit in der Anwendung eines gewissen Maasssystemes behuf direkter Erreichung eines praktischen Zweckes handelt. Da fragt es sich denn mit Recht, ob das Dezimalsystem geeignet sei, den letzteren Anforderungen eben so gut zu entsprechen, als manches andere, und wenn dies nicht der Fall sein sollte, ob die Wahl eines anderen Systems wegen der damit verbundenen grösseren praktischen Bequemlichkeit nicht die Aufopferung gewisser Rechenvortheile hinlänglich motiviren möchte, oder ob nicht sonstige Einrichtungen möglich wären, welche eine Vereinigung dieser beiden Rücksichten zuliessen.

Wenn man beachtet, dass ein gesunder Sinn die Menschen schon seit Tausenden von Jahren zu der Einführung geordneter

Maasssysteme geführt hat, welche seit den ältesten Zeiten unter Berücksichtigung der obwaltenden Verhältnisse die mannichfachsten Veränderungen erlitten haben; wenn man ferner dabei erwägt, dass alle Kommunikationsmittel, welche aus den materiellen Bedürfnissen der Menschheit entstehen und durch viele Geschichtsalter die Probe der praktischen Brauchbarkeit ausgehalten haben, stets einen bedeutenden Grad von Vollkommenheit erreichen, noch ehe die Philosophie mit kritischem Lichte sie beleuchtet: so muss es auffallen, dass man in keinem Maasssysteme, welches nicht aus der Neuzeit herrührt, die Grundzahl 10 antrifft. Die allverbreitete Grundzahl jener Systeme ist vielmehr die Zahl 12 oder ein Vielfaches von 12, welche bei den Untereintheilungen öfters mit den in jener Zahl ebenfalls enthaltenen Zahlen 3 und 4 oder deren Vielfachen abwechselt. So ist unter Anderem in den verschiedensten deutschen und ausserdeutschen Ländern:

Bei den Längenmaassen: 1 Ruthe = 12 Fuss u. auch = 16 Fuss. 1 Fuss = 12 Zoll, 1 Zoll = 12 Linien.

1 Elle = 4 Viertel = 8 Achtel.

1 Faden = 6 Fuss.

1 Lachter = 6 Fuss.

Bei den Flächenmaassen: 1 Feldmorgen = 120 Quadratruthen und auch = 180 Quadratruthen.

1 Waldmorgen = 160 Quadratruthen.

Bei den Körpermaassen: 1 Schachtruthe = 144 Kubikfuss und auch = 256 Kubikfuss.

1 Wispel = 24 Scheffel und auch = 36 Scheffel und auch = 40 Himten.

1 Scheffel = 4 Vierfass, 1 Vierfass = 4 Metzen.

1 Malter = 80 Kubikfuss.

1 Oxhoft = 3 Eimer = 6 Anker = 180 Quart.

1 Gebräude = 9 Kufen = 18 Fass = 36 Tonnen.

Bei den Zahlmaassen: 1 Gross = 12 Dutzend, 1 Dutzend = 12 Stück.

1 Schock = 4 Mandel = 60 Stück.

Bei den Gewichtsmaassen 1 Zentner = 112 Pfund, 1 Pfund = 32 Loth, 1 Loth = 4 Quentchen.

1 Medizinalpfund = 24 Loth = 12 Unzen = 96 Drachmen = 288 Skrupel.

1 Mark Silber = 16 Loth.

1 Mark Gold = 24 Karat, 1 Karat = 12 Grän.

Bei den Geldmaassen	1 Thaler = 24 Groschen, 1 Groschen = 12 Pfennig.
	1 Thaler = 48 Schilling.
	1 Thaler = 72 Groten.
	1 Gulden = 60 Kreuzer, 1 Kreuzer = 4 Pfennig.
	1 Mark = 16 Schilling.
Bei den Zeitmaassen	1 Jahr = 12 Monat.
	1 Tag = 12 Stunden, 1 Stunde = 60 Minuten, 1 Minute = 60 Sekunden, 1 Sekunde = 60 Tertien.
Bei den Winkelmaassen	1 Kreisumfang = 360 Grad, 1 Grad = 60 Minuten, 1 Minute = 60 Sekunden.

Bei diesen Eintheilungen, welche seit undenklichen Zeiten der Hauptmasse der Maasssysteme zu Grunde gelegen haben, spielen die Zahlen 2, 3, 4, 6, 12 als Grundzahlen die wichtigste Rolle. Es ist dies leicht zu erklären. Die Subdivision der höheren Maasseinheiten in untergeordnete Einheiten hat keinen anderen Zweck, als die schwerfällige Bezeichnung kleinerer Quantitäten nach Bruchtheilen der höheren Einheit zu vermeiden, und statt dessen ein rundes Vielfaches der niedrigeren Einheit an die Stelle zu setzen, wodurch denn auch die praktische Ausführung einer Theilung erleichtert wird, indem man sich bei Abmessung solcher kleinerer Quantitäten der betreffenden Unter-Gemässe bedient. Im Handel und Wandel des menschlichen Lebens stellen sich nun ohne Frage die einfachsten Theilungen als die am häufigsten vorkommenden heraus. Die Möglichkeit und Leichtigkeit solcher Theilungen muss daher vor allen übrigen seltener vorkommenden bei der Einrichtung eines Maasssystemes vorzugsweise berücksichtigt werden, und hieraus fliesst die Forderung, dass jene sich täglich wiederholenden Theilungen einer höheren Maasseinheit nicht bloss mit Zuhülfenahme der Einheiten sämmtlicher niedrigerer Ordnungen, sondern dass dieselben womöglich bloss mit Zuhülfenahme der Einheiten der nächst niedrigeren Ordnung sich bewerkstelligen lassen.

Die einfachsten Theilungen bestehen nun aber in folgenden:

1) in der Halbirung;

2) in der Theilung in drei gleiche Theile;

3) in der Theilung in vier gleiche Theile oder in der Halbirung der Hälfte;

4) in der Halbirung des Drittels oder in der Dreitheilung der Hälfte, was auf die Theilung in sechs gleiche Theile hinausläuft;

5) in der Halbirung des Viertels oder in der Viertheilung der Hälfte, was auf die Theilung in Achtel hinausläuft;

6) in der **Dreitheilung des Drittels**, was auf die Theilung in **Neuntel** hinausläuft;

7) in der **Viertheilung des Drittels** oder in der **Dreitheilung des Viertels**, was auf die Theilung in **Zwölftel** hinausläuft.

Diesen Operationen entspricht keine Grundzahl besser, als die Zahl 12. Wenn diese Zahl einem Maasssysteme zu Grunde gelegt ist; so lassen sich die vorstehenden Theilungen ad 1), 2), 3), 4), 7), nämlich die Theilungen in Halbe, Drittel, Viertel, Sechstel, Zwölftel, stets durch die Einheiten der **zunächst** niedrigeren Ordnung ausführen, und die Theilungen ad 5) und 6), nämlich die Theilungen in Achtel und Neuntel, erfordern nur ein Herabsteigen zu den Einheiten der **zweiten** Ordnung.

Wollte man mit den Vortheilen der Theilung in Halbe, Drittel und Viertel, womit die anderen ebengenannten Vortheile hinsichtlich der Theilung in Sechstel, Achtel, Neuntel, Zwölftel unzertrennlich verbunden sind, noch gleiche Vortheile für die Theilung in **Fünftel** zu erreichen suchen; so wäre hierzu nothwendig eine Grundzahl erforderlich, welche nicht kleiner sein könnte als 60. Diese Zahl ist offenbar viel zu gross, um übersichtliche Systeme zu ergeben. Es bliebe daher, wenn die **Fünftheilung** durchaus in der obigen Weise berücksichtigt werden sollte, Nichts weiter übrig, als die bequeme Theilung in **Drittel** oder in **Viertel** zum Opfer zu bringen. Augenscheinlich würde ein solches Verfahren, wenn man die praktische Anwendung des Maasses auf die Vorgänge im gewöhnlichen Leben im Auge hat, durchaus nicht gerechtfertigt sein, da die Fünftheilung eine sehr untergeordnete Rolle gegen die Drei- oder Viertheilung spielt, ja sogar im Vergleich zu den letzteren als Seltenheit betrachtet werden muss.

Hieraus erklärt sich zur Genüge, wie die Völker bei ihren Maasssystemen vorzugsweise auf die Grundzahl 12 gekommen sind, und der Grundzahl 10 unseres jetzigen Zahlensystems fast gar keine Rechnung getragen haben, indem sich durch die letztere Zahl bei Zuhülfenahme der **nächst** niedrigeren Ordnungen nur Theilungen in die Hälfte, in Fünftel und in Zehntel vornehmen lassen, wogegen Theilungen in Viertel schon die **zuzweit** folgende Ordnung, und Theilungen in Achtel die **zudritt** folgende Ordnung in Anspruch nehmen, und Theilungen in Drittel, Sechstel, Neuntel **ganz und gar nicht** bewirkt werden können, selbst wenn das Maasssystem eine unendliche Menge von untergeordneten Einheiten besässe und man alle sukzessiven Ordnungen zu Hülfe nehmen wollte.

Das Duodezimalsystem hat aber vor dem Dezimalsysteme nicht allein den Vorzug, dass sich damit die am häufigsten vorkommenden, also wichtigsten Theilungen bequem bewerkstelligen lassen, sondern auch noch den, dass sich überhaupt eine weit **grössere Menge** von Bruchtheilen einer jeden Maasseinheit durch die niedrigeren Einheiten darstellen lassen. Dies lässt sich am besten übersehen, wenn man auf jene Eigenschaft für beide Systeme alle echten Brüche prüft, deren Nenner bis zu Ein und derselben Höhe hinaufreichen.

Untersuchen wir z. B. alle echten Brüche, deren Nenner die Zahlen 2, 3, 4, 5....12 sind; so gibt es deren im Ganzen 66 Stück (von denen einige $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ etc. sind). Von diesen 66 Brüchen sind im Duodezimalsysteme 38 Stück (worunter die 7 wichtigen Stammbrüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$), im Dezimalsysteme jedoch nur 28 Stück (worunter die 5 weniger wichtigen Stammbrüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$) durch die Einheiten der niedrigeren Ordnungen darstellbar. Die Menge solcher Brüche ist also im ersteren Systeme um ein Drittel grösser, als im letzteren, und dabei können sämmtliche 38 erstere Brüche mit Hülfe der zwei zunächst auf einander folgenden niedrigeren Ordnungen ausgedrückt werden, während die letzteren 28 Brüche die Zuhülfenahme der drei auf einander folgenden Ordnungen nothwendig machen, also trotz ihrer kleineren Menge noch grössere Unbequemlichkeiten mit sich führen. Es ist z. B.

im Duodezimalsysteme	dagegen im Dezimalsysteme
$\frac{3}{4}$ Ruthen = 9 Fuss,	$\frac{3}{4}$ Ruthen = 7 Fuss 5 Zoll,
$\frac{5}{8}$ Ruthen = 7 Fuss 6 Zoll,	$\frac{5}{8}$ Ruthen = 6 Fuss 2 Zoll 5 Linien.

Noch bedeutender wird die Menge der durch niedrigere Einheiten messbaren Brüche im Duodezimalsysteme im Vergleich zu denen des Dezimalsystems, wenn man die Untersuchung weiter ausdehnt. Unter sämmtlichen echten Brüchen, deren Nenner bis zur Zahl 1728 hinaufreichen, befinden sich nämlich 17193 Stück, welche durch das Duodezimalsystem, dagegen nur 11494, welche durch das Dezimalsystem genau darzustellen sind, so dass also hier schon die Menge der ersteren anderthalbmal so gross ist, als die der letzteren, wobei die letzteren noch eine viel grössere Reihe von untergeordneten Einheiten erfordern, als die ersteren, und an sich selbst viel unwichtiger sind.

Die ebenerwähnten Vortheile des Duodezimalsystems stellen sich bei der Reduktion der in Bruchform gegebenen Theile der höheren Einheiten auf niedrigere heraus. Bei der umgekehrten Operation, nämlich bei der Zurückführung der niedrigeren Einheiten auf höhere, machen sich ähnliche Bequemlichkeiten fühlbar. Wenngleich bei dezimaler Eintheilung die niedrigeren Einheiten stets solche Brüche der höheren Einheiten sind, welche zu Nennern die Zahlen 10, 100, 1000 etc. haben, mithin in der Form von Dezimalbrüchen auftreten können und in dieser Gestalt bei vielen Rechnungsprozessen Erleichterung mit sich führen; so ist doch klar, dass in vielen Fällen, wo es auf die Anschauung der möglichst einfachen Verhältnisse zwischen zwei Grössen ankommt, die Form der gewöhnlichen Brüche vor der der Dezimalbrüche den Vorzug verdient, und dass sogar bei vielen Rechnungen eine Operation mit gemeinen Brüchen Vortheile vor der Operation mit Dezimalbrüchen besitzt. Das Letztere werden selbst Diejenigen nicht verkennen, denen der Umgang mit Dezimalbrüchen so geläufig geworden ist, wie mit ganzen Zahlen, und welche dessenungeachtet unter gar manchen Umständen, wo beide Bruchformen zulässig wären, doch die Form der gemeinen Brüche wählen. Wem würden nicht sehr häufig die einfachen Ausdrücke,

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{3}$ u. s. w. erwünschter sein, als die gleichbedeutenden Dezimalbrüche 0,5; 0,375; 0,3333333.... u. s. w.? Zu solchen einfachen gemeinen Brüchen führt aber das Duodezimalsystem bei der Zurückführung der Einheiten niedriger Ordnung auf Einheiten höherer Ordnung in bedeutend öfteren Fällen, als das Dezimalsystem, weil die Grundzahl 12 nicht bloss mehr, sondern auch häufiger im gemeinen Leben vorkommende Faktoren 2, 3, 4, 6 enthält, als die Grundzahl 10, welche nur die beiden Faktoren 2 und 5 besitzt.

Aus diesen gewichtigen Gründen behauptet denn die duodezimale Eintheilung der Maasssysteme für den praktischen Gebrauch einen entschiedenen Vorzug vor der dezimalen, und es kann nicht befremden, wie jene erstere Eintheilung sich durch alle Menschenalter der Vergangenheit den Vorrang erkämpft hat. Ehe die Masse des Volkes durch den Aufschwung der Kultur befähigt war, die Resultate der Messungen in mancherlei arithmetische Rechnungsverknüpfungen zu verflechten, waren jene Maasssysteme, wenn auch in unvollkommener Durchbildung, doch in den Hauptzügen, nach den dringenden Erfordernissen aufgebauet, welche der gemeine Lebensverkehr erheischt, und welche unabhängig sind von der Eigenschaft, dass die aus den Messungen sich ergebenden Zahlwerthe auch mit aller erreichbaren Leichtigkeit in einen komplizirteren Kalkul eintreten können.

Erst als das dekadische Zahlensystem und die gegenwärtige Bezeichnung der Zahlen durch die arabischen Ziffern allgemeinen Eingang fand, und die fortschreitende Bildung der Menschheit alle Klassen in immer höhere industrielle Thätigkeit und in die Nothwendigkeit versetzte, die Grössenmessungen zu vielfachen arithmetischen Operationen zu benutzen, gaben sich allmählig die Uebelstände kund, welche aus der Verschiedenheit der Maasssysteme und des Zahlensystems hervorgehen und welche bereits weiter oben angezeigt sind.

§. 7.

Da nun aus den früheren Betrachtungen folgte, dass ein vollkommenes Maasssystem wegen der beabsichtigten Rechenvortheile mit dem Zahlensysteme übereinstimmen, also nach der Grundzahl 10 geordnet sein müsse, dagegen aus der letzteren Betrachtung sich ergibt, dass die grösste Vollkommenheit eines Maasssystemes in Rücksicht auf praktische Verwendung nur bei der Grundzahl 12 erreicht werden kann; so sind wir in einen Konflikt der Argumente gerathen, welcher von zwei ganz verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachtet werden muss und demnach leicht die Richter in zwei einander schroff gegenüber stehende Parteien trennen kann, jenachdem der eine Theil diese, der andere Theil jene Vortheile mit hartnäckiger Verkennung der gegen ihn sprechenden Nachtheile in die Wagschale legt. Die Entscheidung darf jedoch bei einer so wichtigen Angelegenheit unmöglich schwankend bleiben und ohne die sorgfältigste Prüfung alles pro et contra gefällt werden.

Nach meiner persönlichen Ueberzeugung verdienen die oben angeführten praktischen Vortheile des Duodezimalsystems das Uebergewicht über die theoretischen Vortheile des Dezimalsystems. Obgleich eine solche individuelle Ansicht von geringem Belang ist, wenn sie sich bloss gefühlsweise auf eine oberflächliche Abschätzung der sich gegenseitig ausschliessenden Vortheile stützt und nicht evidente Motive herausstellt; so glaube ich doch, dass dieses Urtheil wenigstens frei von dem Verdachte der Parteilichkeit sich hören lassen kann, da ich in meiner Stellung als Techniker nur sehr wenig von jenen praktischen Vortheilen eines Maasssystemes zu erfahren habe, hingegen vorzugsweise von alle den Unbequemlichkeiten betroffen werde, welche aus der Schwerfälligkeit der Rechnung mit gemessenen Grössen hervorgehen. Inzwischen stehen dieser Ansicht folgende erhebliche Motive zur Seite.

Unter der Unbeholfenheit des Dezimalsystems bei seiner praktischen Verwendung in dem gewöhnlichen Verkehre des Lebens hat die gesammte Masse des Volkes zu leiden. Die Bequemlichkeit dieses Systemes bei Rechnungsoperationen kommt jedoch nur einer sehr kleinen Klasse von Menschen zu gute, denen ihr Beruf die Ausführung vieler Rechenoperationen mit gemessenen Grössen auferlegt. Diese Klasse umfasst noch keineswegs Jedermann, welcher häufig in die Lage kommt, leichte Rechnungen anzustellen. Es sind davon ausgeschlossen alle Diejenigen, welche zum Behuf der Befriedigung der alltäglichen Lebensbedürfnisse einfache Exempel zu lösen haben, die Kaufleute, Handwerker u. A.; denn bei deren Rechnungen ist in der Regel die Form der Dezimalbrüche viel unbequemer, als die der gemeinen Brüche, und es ist schon weiter oben angeführt, dass das Duodezimalsystem viel öfter auf einfache gemeine Brüche führt, als das Dezimalsystem. Hiernach kommt nur diejenige Klasse in Betracht, welche zu höheren technischen und wissenschaftlichen Zwecken komplizirtere Rechnungen anzustellen hat. Ich glaube, dass die Letzteren wegen ihrer Minorität ihre speziellen Wünsche dem ersteren grossen Theile des Volkes eher zum Opfer bringen können, als umgekehrt, und dieses um so mehr, da sie vermöge ihrer wissenschaftlichen Ausbildung und der damit erworbenen Rechenfertigkeit leichter im Stande sind, gewisse theoretische Schwierigkeiten zu überwinden, als die übrigen Klassen im Stande sind, die erwähnten Belästigungen beim gewöhnlichen Gebrauche der Gemässe zu ertragen. Dazu kommt noch, dass jener wissenschaftlichen Klasse manche Hülfsmittel zu Gebote stehen, um sich bei der Verwendung eines gewissen Maasses zu besonderen Zwecken von vorn herein die gewünschten Rechenvortheile zu sichern. So würden z. B. die Geodäten, welche bei ihren rein geometrischen Arbeiten der oben angeführten praktischen Vortheile des duodezimalen Maasssystemes nicht bedürfen, und denen auch die beschränkte Stufenleiter der Begriffe: Ruthe, Fuss, Zoll, Linie, gleichgültig sein kann, da sie ja doch häufig in die Lage kommen, wo diese Reihe, selbst wenn sie eine dezimale Anordnung besässe, wegen ihrer wenigen Glieder nicht ausreicht, nur die Grundeinheit ihres Maassstabes oder ihrer Messkette, z. B. die Ruthe, dekadisch abzutheilen brauchen; die

Aufzeichnung der mit solchen Stäben gemessenen Längen würde alsdann stets in Form von Dezimalbrüchen erfolgen, deren Einheit die Länge einer Ruthe ist, ohne dass jene Geometer mit dem Werthe einer jeden Zifferstelle einen anderen Begriff, als den des 10ten, 100sten, 1000sten etc. Theiles einer Ruthe verbänden.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass ein konsequent durchgeführtes Duodezimalsystem das praktischste von allen anderen ist und demnach erstrebt werden muss.

Gegen diese Ansicht scheint die Thatsache zu sprechen, dass die Franzosen in der neueren Zeit bei einer Umgestaltung ihrer Maasse dem Dezimalsysteme den Vorzug gegeben und dasselbe in ziemlicher Reinheit und Allgemeinheit eingeführt haben. Allein das blosse Faktum der Einführung eines Maasssystems beweist nur die grossen Hoffnungen, die man darauf gesetzt hatte, nicht aber die entschiedene Vorzüglichkeit jenes Systemes. Jene Hoffnungen waren bei dem französischen Dezimalsysteme lediglich auf die mancherlei Rechenvortheile gestützt, zu denen das fragliche System unbestreitbar Gelegenheit gibt; man hat also vorzüglich dem mathematisch gebildeten Publikum in die Hände gearbeitet, ohne auf die Bedürfnisse des gewöhnlichen Lebens Rücksicht zu nehmen. Dass aber das französische Maasssystem für den Gebrauch in Handel und Wandel weit unvollkommener ist, als ein konsequentes Duodezimalsystem, geht nicht allein aus den obigen allgemeinen Betrachtungen, sondern aus der Erfahrung selbst hervor.

Im französischen Längensysteme existiren dem Namen nach in aufsteigender Reihenfolge die Einheiten: Millimeter, Zentimeter, Dezimeter, Meter, Dekameter, Hektometer, Kilometer, Myriameter, wovon das Meter die Grundeinheit bildet. Wenn man jedoch die praktische Verwendung dieser Maasseinheiten, wie sie in Frankreich wirklich vorkommt, näher beachtet; so findet man, dass bei der Bestimmung der gewöhnlichen Längen in den Werkstätten und in der Natur fast ausschliesslich das Meter mit dem Zentimeter in Gebrauch ist, ohne dass die dem Meter zunächst liegenden Einheiten Dezimeter und Dekameter mit herangezogen werden, wogegen man sich bei sehr kleinen Längen des Millimeters ohne die höheren Einheiten, und bei sehr grossen Längen des Kilometers oder Myriameters ohne die niedrigeren Einheiten bedient. So sagt und schreibt man gewöhnlich 3 Meter 75 Zentimeter für eine Länge von $3^3/_4$ Meter oder von 3 Meter 7 Dezimeter 5 Zentimeter. Es erklärt sich dies leicht aus dem Umstande, dass 1 Meter mit Hülfe des Dezimeters weder in 3, noch in 4, noch in 6, also nicht einmal in die so häufig vorkommenden gleichen Theile getheilt werden kann, dass eine Theilung in 8 gleiche Theile drei nächst niedrigere Ordnungen, nämlich Dezimeter, Zentimeter und Millimeter, in Anspruch nehmen würde, und dass eine Theilung in 3, 6, 9 gleiche Theile sogar mit Hülfe aller denkbaren dezimalen Unter-Einheiten unmöglich ist, indem z. B. $^1/_3$ Meter = 3 Dezimeter 3 Zentimeter 3,3333.... Millimeter sein würde. Diesem grossen Uebelstande, welcher durch die in praktischer Beziehung höchst unwichtige Möglichkeit einer Theilung in 5 gleiche Theile nicht im entferntesten ausgeglichen wird, entgeht man nun einigermaassen durch die Unterdrückung des Dezi-

meters. Es entstehen alsdann auf dem Meter 100 Abschnitte gleich Einem Zentimeter, wodurch Theilungen in Viertel möglich werden, und die Theilungen in Drittel, Sechstel, Achtel, Neuntel mit Aufopferung der strengen Genauigkeit näherungsweise bewirkt werden können. Diese gleichwol unzulängliche Prozedur hat dann aber zum Gefolge, dass man sich stets mit einer zweiziffrigen Menge von Zentimetern befassen muss, welche in dem grossen Zwischenraume von 1 bis 100 variirt, und demnach gewiss nicht auf Bequemlichkeit Anspruch machen kann.

Noch deutlicher bethätigt sich das eben Gesagte bei dem französischen Geldsysteme, wo man sogar die nächste Untereinheit des Franken ganz aus dem Systeme gestossen und dafür die dann folgende Einheit, nämlich den 100sten Theil des Franken unter dem Namen der Zentime aufgenommen hat.

Mehr noch, als alles Vorstehende, wird aber das Vertrauen in das Ideal des französischen Dezimalsystemes dadurch erschüttert, dass sich neben jenem Systeme noch manches andere neue Duodezimalmaass in Frankreich die Bahn gebrochen hat und zur Anwendung kommt. So existirt der sogenannte neue Fuss $=\frac{1}{3}$ Meter. Dieser Fuss ist in 12 Zoll und der Zoll in 12 Linien getheilt. Man hat eine neue Elle von 12 Dezimeter Länge, welche in Halbe und Viertel getheilt ist.

Endlich haben die Franzosen es gar nicht einmal gewagt, die alte duodezimale Zeiteintheilung des Jahres in Monate, des Tages in Stunden, der Stunden in Minuten u. s. w. anzutasten und in ein dezimales System zu beugen. Nicht bloss die daraus entstehende Disharmonie mit anderen Völkern, auch die grosse Störung der Gewohnheiten im eigenen Lande würde einen solchen Versuch unmöglich gemacht haben, und so ist daher das Prinzip der Dezimaltheilung selbst in Frankreich nicht in vollkommener Reinheit auf alle Grössenmaasse übertragen worden, weil die Anforderungen des bürgerlichen Lebens ein entschiedenes Veto einlegten und sich nicht durch die dem Gelehrten zu gute kommenden Rechenvortheile übertönen liessen.

Diese Bemerkungen über das französische Dezimalsystem fallen also ebenfalls zu Gunsten des Duodezimalmaasses ins Gewicht und machen es wünschenswerth, dass das letztere mit möglichster Konsequenz für das praktische Leben eingeführt werde, wobei es den zu wissenschaftlichen Zwecken Operirenden überlassen bleiben kann, eine jede beliebige Einheit aus jenem Systeme für besondere Tendenzen besonders zu theilen, ohne diesen Theilen eigene Namen beizulegen.

§. 8.

Es wird wohl Niemand geben, welcher den im Vorstehenden erörterten Konflikt zwischen dem dezimalen Maasssysteme und den praktischen Bedürfnissen des Lebens oder den Konflikt zwischen dem duodezimalen Maasssysteme und den Bedürfnissen der Wissenschaft sehr beklagte, da dies offenbar Hindernisse sind, welche eine allseitige Vollkommenheit des Maasssystemes unmöglich

machen. Fragt man nun, ob es Mittel gebe, jene widerstreben den Pole zu vereinigen und worin dieselben bestehen; so ist klar, dass die auf den einfachen Theilungen und auf dem Streben nach möchlichst einfachen Verhältnisszahlen beruhenden Lebensbedürfnisse durch Nichts alterirt werden können: dahingegen basiren sich die Operationen der mathematischen Wissenschaft auf den Gebrauch eines rein erfundenen und durch keine äussere Nothwendigkeit bedingten Zahlensystemes. Dieses Zahlensystem ist trauriger Weise dekadisch oder nach der Grundzahl 10 geordnet, und damit bei der ersten Anlage verunglückt. Welche Berechtigung hat die aus den beiden Primfaktoren 2 und 5 bestehende Zahl 10? Es lässt sich keine nennen, als dass jene Zahl nicht übermässig gross und auch nicht übermässig klein sei, also bei ihrer Verwendung als Grundzahl ein fassliches und übersichtliches Zahlensystem ergebe, in welchem zuletzt ein jedes Grössenverhältniss seinen Platz findet. Im Uebrigen bietet sie die unerheblichsten Vortheile.

Man hätte statt der Grundzahl 10 mit gleichem Rechte auch die aus den beiden Primfaktoren 2 und 7 bestehende Zahl 14 wählen können. Das hieraus entstehende Zahlensystem würde jeden Vergleich mit unserem jetzigen aushalten, da die beiden Faktoren 5 und 7 in der Natur der Dinge gewiss sehr nahe eine gleiche Rolle spielen. Wir haben uns nur zu sehr an das jetzige Zahlensystem gewöhnt, um diese Behauptung nicht sofort mit aller Deutlichkeit einzusehen; aber eine sorgfältige Ueberlegung wird hierüber gewiss bei Wenigen einen Zweifel übrig lassen.

Es scheint mir, als ob kein erheblicherer Umstand, als der Hinblick auf die 2 mal 5 Finger an Händen und Füssen den Impuls zu unserem dekadischen Zahlensysteme gegeben hätte, und dass wir, wenn uns der Herrgott mit 2 mal 7 Fingern erschaffen hätte, jetzt ein Zahlensystem nach der Grundzahl 14 besitzen würden. Diese Vermuthung liegt nahe, wenn man erwägt, dass im rohesten Kulturzustande der Völker die Worte für Begriffe — und Zahlen sind Begriffe — seltener sind, und dass die unkultivirten Völker wie unmündige Kinder anfänglich zu ostensibelen Zeichen ihre Zuflucht nehmen. Solche Zeichen für Mengen bieten sich durch die hervorstehenden Finger sehr natürlich dar, und man sieht noch heute, wie die Menschen häufig ihre kleineren Zahlangaben durch entsprechende Gestikulationen der Hände und Finger begleiten. Auch wird jene Ansicht durch das Faktum unterstützt, dass es in Amerika, namentlich an der Mosquitoküste, eingeborene Völker gibt, welche nach Händenvoll à 5 Stück zählen, indem sie die überschiessenden Einer besonders benennen, dabei die Hände vorhalten und bei einer Menge von 20 die Hände mit ausgespreizten Fingern den Fussspitzen zuneigen, um auf die Summe der Finger und Zehen zu deuten.

So haben die zufälligsten Dinge, welche während der Kindheit des Menschengeschlechtes der Darstellung von Mengen zum ersten Anhaltspunkte dienten, den Grund zu einem Systeme gelegt, welches später mit aller Konsequenz auf die Darstellung der grössten und kleinsten Mengen ausgebildet ist, ohne dass man sich je Rechenschaft gab, ob der Nerv jenes Systemes die Be-

dingungen in sich vereinigte, welche den Umgang mit einem solchen Systeme behuf Ausführung der verschiedensten Zahlenkombinationen zu dem möglich bequemsten machte. Kann sich die erleuchtete Menschheit im fortwährenden Drängen nach Vervollkommnung aller ihrer Zustände und Beschäftigungen dabei beruhigen, dass ihren Vorvätern eine kritische Einsicht in die Folgen einer höchst wichtigen Institution unmöglich war, und dass die Kurzsichtigkeit jener Anfänger den späteren Geschlechtern eine Gewohnheit auferlegt hat, welche jetzt gewissermaassen in das Blut aller Volksklassen übergegangen und demnach nur mit grossen Schwierigkeiten zu vertilgen und durch eine neue zu ersetzen ist, welche erst nach völliger Vergessenheit der alten ihre segensreichen Früchte trägt? Gewiss nicht dürfen solche Rücksichten und Schwierigkeiten das Streben nach einem Ziele vernichten, welches als eine wahrhafte Verbesserung des bisher Bestandenen erkannt wird.

Es liegt aber zu Tage, dass das natürlichste und durch innere Gründe gerechtfertigte Zahlensystem auf keine andere, als die Grundzahl 12 basirt werden kann, dass dasselbe also dodekadisch oder duodezimal geordnet werden muss. Diese Zahl ist weder zu gross, noch zu klein, um unübersichtliche Gruppen von subordinirten Einheiten zu ergeben. Ausserdem hat sie die ausgezeichnete Empfehlung für sich, dass sie durch die Reihe der einfachsten Zahlen 2, 3, 4, 6 theilbar ist, und dass Theilungen durch 8 und 9 schon mit Hülfe von zwei unmittelbar auf einander folgenden Einheiten bewerkstelligt werden können. Diese Eigenschaft macht die Zahl 12 fähig, in die einfachsten und am häufigsten vorkommenden Theilungsverhältnisse des menschlichen Lebens einzutreten, wodurch Vortheile gewonnen werden, welche nicht bloss für die gewöhnlichsten, sondern sogar für die komplizirtesten mathematischen Operationen von Wichtigkeit sind, und welche einigermaassen aus den früheren Anführungen über die Bequemlichkeit der Grundzahl 12 zu Maasssystemen verstanden werden können. Keine kleinere Zahl als 12 bietet jene Eigenschaften dar, und unter allen grösseren Zahlen ist die Zahl 24 die kleinste, welche dieselben Eigenschaften besässe. Diese Zahl 24 ist jedoch jedenfalls zu gross, um ein übersichtliches Zahlensystem zu liefern.

Da nun durch die Einführung der Grundzahl 12 in das absolute Zahlensystem, wenn gleichzeitig auch das Maasssystem eine duodezimale Eintheilung erhält, für das letztere System nicht bloss alle früher erwähnten praktischen, sondern auch alle theoretischen Vortheile errungen werden; so folgt, dass die neueren Reformversuche, wenn sie eine höchste Vollkommenheit erstreben wollen, gleichzeitig auf ein duodezimales Maass- und Zahlensystem gerichtet sein müssen.

Es ist übrigens bereits angeführt worden, dass selbst bei der Beibehaltung des dezimalen Zahlensystemes dennoch ein duodezimales Maasssystem den Vorzug verdient, und da das jetzige unvollkommene dezimale Zahlensystem in früher oder später Zukunft jedenfalls verlassen werden muss und verlassen werden wird; so würde die bei einem dezimalen Zahlen- und einem duodezimalen Maasssysteme verbleibende Unbequemlichkeit sogar ein Grund

mehr für die jetzige konsequente Einführung des duodezimalen Maasssystemes sein, damit bei dem einsichtsvolleren Theile der Nation der Wunsch und das Bestreben um so reger gemacht wird, jenen Uebelstand durch baldige Annahme eines duodezimalen Zahlensystemes zu beseitigen. Ausserdem würde man davor geschützt sein, dem Volke späterhin nochmals die Last einer Veränderung des Maasssystemes aufzuerlegen, welche unabweislich mit eintreten müsste, wenn man von dem dezimalen zu dem duodezimalen Zahlensysteme überginge. Endlich aber würde ein konsequentes Duodezimalmaass auf eine sehr praktische Weise den an abstraktes Denken weniger Gewöhnten allmählig auf die Zweckmässigkeit eines duodezimalen Zahlensystemes hinleiten und auf die demnächstige Umgestaltung des Letzteren vorbereiten.

§. 9.

Ehe wir Einiges über die Maassregeln sagen, welche behuf Reformation des jetzigen dezimalen Zahlensystemes in ein duodezimales ergriffen werden müssten, wollen wir in der Kürze die Grundzüge entwerfen, welche das neue System annehmen würde.

Das Hauptprinzip besteht darin, dass alle denkbaren ganzen Zahlen in Gruppen geordnet werden, welche, statt 10, nunmehr immer 12 Glieder oder Einheiten enthalten. Eine jede solche Einheit ist dem Werthe nach gleich 12 Einheiten der nächst niedrigeren Ordnung. Demnach umfasst

die 1ste Ordnung der ganzen Zahlen 12 Einheiten erster Ordnung oder Grundeinheiten;

„ 2te „ umfasst 12 Einheiten zweiter Ordnung, wovon eine jede gleich 12 Grundeinheiten oder Einheiten erster Ordnung ist;

„ 3te „ umfasst 12 Einheiten dritter Ordnung, wovon eine jede 12 Einheiten zweiter Ordnung oder $12 \times 12 = 144$ Einheiten erster Ordnung enthält;

u. s. f.

Die Bezeichnung der Zahlen geschieht genau nach dem gegenwärtigen Prinzipe der Stellung der Ziffern, so dass die Einheiten erster Ordnung oder die Grundeinheiten die erste Stelle rechts, die Einheiten zweiter Ordnung die zweite Stelle von rechts nach links, die Einheiten dritter Ordnung die dritte Stelle von rechts nach links u. s. w. annehmen, wobei das Zeichen der Null (0) ebenso verwendet wird, wie jetzt, indem dasselbe in diejenige Stelle einrückt, wo eine gewisse Menge von Einheiten der betreffenden Ordnung nicht gegeben ist.

Hiernach würde z. B.

die Zahl 7 sieben Einheiten erster Ordnung;

„ „ 10 Eine Einheit zweiter Ordnung, also eine Menge von zwölf;

„ „ 23 zwei Einheiten zweiter Ordnung und 3 Einheiten

erster Ordnung, also im Ganzen eine Menge von zwei mal zwölf plus drei = siebenundzwanzig Einheiten erster Ordnung;

die Zahl 100 Eine Einheit dritter Ordnung, also eine Menge von zwölf Einheiten zweiter oder von hundertvierundvierzig Einheiten erster Ordnung;

„ „ 137 Eine Einheit dritter plus drei Einheiten zweiter plus sechs Einheiten erster Ordnung, im Ganzen also hundertvierundvierzig plus sechsunddreissig plus sieben = hundertachtundsiebzig Einheiten erster Ordnung

darstellen u. s. w.

Hiernach leuchtet ein, dass wir bei einem duodezimalen Zahlensysteme mit unseren jetzigen 10 einfachen Zahlzeichen oder Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 nicht ausreichen, dass wir vielmehr für die Zahlen zehn und elf zwei besondere Ziffern erfinden müssen, da diese beiden Zahlen zu den Grundeinheiten oder Einern des Systemes gehören und in jeder folgenden Ordnung ebenfalls die Rolle einfacher Einheiten spielen.

Ich lasse mich hier auf die Erfindung jener zwei Zeichen für die Zahlen zehn und elf nicht ein, bemerke nur, dass es Erfordernisse sind, dass jene Zeichen im Charakter der übrigen arabischen Ziffern gehalten und leicht zu schreiben sein müssen, dabei aber sich von allen übrigen Ziffern und von allen geschriebenen und gedruckten Buchstaben des in mathematischen Schriften häufig vorkommenden lateinischen, griechischen und deutschen Alphabetes kräftig unterscheiden müssen und selbst dann zu Verwechselungen nicht leicht Gelegenheit geben dürfen, wenn sie flüchtig geschrieben werden.

Ich wähle hier bloss, um mich verständlich zu machen, für die Zahl zehn die umgekehrte Letter der Zahl 3, also das Zeichen ɛ, und für die Zahl elf die umgekehrte Letter der Zahl 4, also das Zeichen ᔭ. Diese Zeichen eignen sich jedoch nicht für eine definitive Einführung, weil sie bei vielen Personen zu einer Verwirrung der Zahlen drei und zehn und der Zahlen vier und elf beitragen möchten, auch das Zeichen ɛ zu viel Aehnlichkeit mit dem griechischen Buchstaben epsilon besitzt. Im Uebrigen wird hierdurch einem jeden Schriftsteller eine leichte Gelegenheit gegeben, sich mit Hülfe der gewöhnlichen Drucklettern über das duodezimale Zahlensystem zu äussern.

Hiernach hätte man also folgende 12 einfache Zahlzeichen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ɛ	ᔭ
null	eins	zwei	drei	vier	fünf	sechs	sieben	acht	neun	zehn	elf.

Der Gebrauch derselben ist nach Vorstehendem selbstverständlich. Es sind z. B.

1ɛ Eine Einheit zweiter, plus zehn Einheiten erster Ordnung;

6ɛ2ᔭ sechs Einheiten vierter, plus zehn Einheiten dritter, plus zwei Einheiten zweiter, plus elf Einheiten erster Ordnung.



Wir kommen jetzt zu der Benennung der Zahlen. Es leuchtet ein, dass der Name einer Zahl ebenso rationell auf das Prinzip der duodezimalen Eintheilung basirt sein muss, wie die vorstehende Bezeichnung; ja sogar, dass der Name diese Berücksichtigung weit eher verdient, als die Bezeichnung, da die Letztere nur der symbolische Stellvertreter des lebenden Wortes ist.

Beachtet man nun, dass sich ein Zahlensystem nicht so leicht aus dem Volksleben verbannen lässt, als ein Maasssystem, indem Ersteres in dem subjektiven Begriffsvermögen als ein von der Aussenwelt ganz unabhängiges Verstandesgesetz wurzelt, während Letzteres sich an ein leicht über Bord zu werfendes materielles Gemäss knüpft; so kann man nicht verkennen, dass nach Einführung eines neuen Zahlensystems noch manches Jahr das alte System in dem Munde vieler Leute leben wird. Um aber durch eine solche Konkurrenz zweier Systeme bei dem gemeinen Manne keine Begriffsverwirrung herbeizuführen, ist es durchaus nothwendig, dass von dem alten Systeme in das neue System keine anderen als solche Zahlwörter übergehen, welche in beiden Systemen genau dieselbe Menge darstellen. Hat man auf diese Weise für passende Wörter für das duodezimale Zahlensystem gesorgt; so werden durchaus nur geringe Verlegenheiten aus dem Umstande zu erwarten sein, dass manche Menschen sich noch eine Zeit lang im dezimalen Systeme ausdrücken.

Aus dem alten Systeme können hiernach unbedenklich die Zahlwörter von eins bis elf beibehalten werden, welche die Einheiten erster Ordnung ausmachen.

Die Namen der Einheiten zweiter Ordnung, welche im alten Systeme aus dem Namen der Grundzahl zehn oder zig gebildet sind und: zehn, zwanzig, dreissig, vierzig etc. ausgesprochen werden, müssten im neuen Systeme auf analoge Weise aus dem Namen der Grundzahl zwölf gebildet werden. Da jedoch dieses Wort etwas schwerfällige Zusammensetzungen liefert; so substituire ich dafür in gegenwärtiger Schrift die durch vulgären Sprachgebrauch aus dem Worte Dutzend entstandene Korruptionssilbe dutz, woran sich die Begriffe vieler Menschen gewiss mit Leichtigkeit anlehnen werden, indem sie alsdann gewissermaassen nach Dutzenden zu zählen wähnen. Im Uebrigen bin ich weit davon entfernt, zu glauben, dass jene Silbe, sowie alle folgenden, welche ich zu ähnlichem Behufe hier adoptiren werde, Anspruch auf Gefälligkeit besitzen. Es ist lediglich Sache deutscher Sprachforscher, neue Zahlwörter in Vorschlag zu bringen, welche im Idiome unserer Sprache liegen.

Hiernach erhalten die sukzessiven Einheiten der zweiten Ordnung die Namen: dutz, zweidutz, dreidutz, vierdutz, fünfdutz, sechsdutz, siebendutz, achtdutz, neundutz, zehndutz, elfdutz. Dieselben werden geschrieben: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, ℰ0, ŧ0, und stellen Mengen dar, welche im dezimalen Systeme mit: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132 bezeichnet werden.

Die zwischen jenen Einheiten zweiter Ordnung liegenden Zahlen werden in derselben Weise zusammengesetzt, wie dies im alten Systeme etwa mit den Zahlen einundvierzig, zweiundvierzig.

dreiundvierzig u. s. w. geschieht. Diese Wortbildung beginnt schon nach der ersten Einheit dutz der zweiten Ordnung, indem man spricht:

10 = dutz,	20 = zweidutz,	30 = dreidutz,
11 = einunddutz,	21 = einundzweidutz,	31 = einunddreidutz,
12 = zweiunddutz,	22 = zweiundzweidutz,	32 = zweiunddreidutz,
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

Für die erste Einheit der dritten Ordnung, welche im neuen Systeme 100 geschrieben wird und nach der alten Schreibweise eine Menge von 144 darstellt, wähle ich das Wort groſſ, welches zur Unterscheidung von dem gleichnamigen Adjektive kurz auszusprechen und in der Schriftsprache hinten stets mit einem Doppel-ſ zu schreiben ist, um hierdurch an die Menge eines Gross zu erinnern, welche bekanntlich gleich zwölf Dutzend ist.

Demgemäss hat man

100 = groſſ, 200 = zweigroſſ, 300 = dreigroſſ.... 900 = neungroſſ,
ε00 = zehngroſſ, ɟ00 = elfgroſſ.

Die erste Einheit vierter Ordnung, welche 1000 geschrieben wird und eine Menge von zwölf Gross darstellt, nenne ich hier tausig, so dass

1000 = tausig, 2000 = zweitausig, 3000 = dreitausig u. s. w. ist.

Die erste Einheit fünfter Ordnung oder 10000 heisse dutztausig.

Die erste Einheit sechster Ordnung oder 100000 heisse groſſtausig.

Die erste Einheit siebenter Ordnung oder 1000000 heisse Eine Milliarde.

Die Zahlen, welche hierauf immer Milliarden mal grösser sind, als die vorhergehenden, heissen: Billiarde, Trilliarde, Quadrilliarde u. s. w.

Nach diesem Prinzipe würde man folgende Uebersicht der Zahlwörter und Zahlzeichen erhalten, wobei die links von den Wörtern unter der römischen Chiffer XII stehenden Zahlen die duodezimalen sind, auf welche sich die Wörter beziehen, und die rechts unter der Chiffer X stehenden die Werthe derselben Zahlen nach dem alten Dezimal-Systeme angeben.

XII		X
0	null	0
1	eins	1
2	zwei	2
3	drei	3
4	vier	4
5	fünf	5
6	sechs	6
7	sieben	7
8	acht	8
9	neun	9
ɛ	zehn	10
ϯ	elf	11
10	dutz	12
11	einunddutz	13
12	zweiunddutz	14
13	dreiunddutz	15
14	vierunddutz	16
15	fünfunddutz	17
16	sechsunddutz	18
17	siebenunddutz	19
18	achtunddutz	20
19	neununddutz	21
1ɛ	zehnunddutz	22
1ϯ	elfunddutz	23
20	zweidutz	24
21	einundzweidutz	25
22	zweiundzweidutz	26
23	dreiundzweidutz	27
24	vierundzweidutz	28
25	fünfundzweidutz	29
26	sechsundzweidutz	30
27	siebenundzweidutz	31
28	achtundzweidutz	32
29	neunundzweidutz	33
2ɛ	zehnundzweidutz	34
2ϯ	elfundzweidutz	35
30	dreidutz	36
31	einunddreidutz	37
32	zweiunddreidutz	38
33	dreiunddreidutz	39
34	vierunddreidutz	40
35	fünfunddreidutz	41
36	sechsunddreidutz	42
37	siebenunddreidutz	43
38	achtunddreidutz	44
39	neununddreidutz	45
3ɛ	zehnunddreidutz	46
3ϯ	elfunddreidutz	47
40	vierdutz	48
41	einundvierdutz	49
42	zweiundvierdutz	50
43	dreiundvierdutz	51
44	vierundvierdutz	52
45	fünfundvierdutz	53
46	sechsundvierdutz	54
47	siebenundvierdutz	55
48	achtundvierdutz	56
49	neunundvierdutz	57
4ɛ	zehnundvierdutz	58
4ϯ	elfundvierdutz	59
50	fünfdutz	60
51	einundfünfdutz	61
52	zweiundfünfdutz	62
53	dreiundfünfdutz	63
54	vierundfünfdutz	64
55	fünfundfünfdutz	65
56	sechsundfünfdutz	66
57	siebenundfünfdutz	67
58	achtundfünfdutz	68
59	neunundfünfdutz	69
5ɛ	zehnundfünfdutz	70
5ϯ	elfundfünfdutz	71
60	sechsdutz	72
61	einundsechsdutz	73
62	zweiundsechsdutz	74
63	dreiundsechsdutz	75
64	vierundsechsdutz	76
65	fünfundsechsdutz	77
66	sechsundsechsdutz	78
67	siebenundsechsdutz	79
68	achtundsechsdutz	80
69	neunundsechsdutz	81
6ɛ	zehnundsechsdutz	82
6ϯ	elfundsechsdutz	83
70	siebendutz	84
71	einundsiebendutz	85
72	zweiundsiebendutz	86
73	dreiundsiebendutz	87
74	vierundsiebendutz	88
75	fünfundsiebendutz	89
76	sechsundsiebendutz	90
77	siebenundsiebendutz	91
78	achtundsiebendutz	92
79	neunundsiebendutz	93
7ɛ	zehnundsiebendutz	94
7ϯ	elfundsiebendutz	95
80	achtdutz	96
81	einundachtdutz	97
82	zweiundachtdutz	98
83	dreiundachtdutz	99
84	vierundachtdutz	100
85	fünfundachtdutz	101
86	sechsundachtdutz	102
87	siebenundachtdutz	103
88	achtundachtdutz	104
89	neunundachtdutz	105
8ɛ	zehnundachtdutz	106
8ϯ	elfundachtdutz	107
90	neundutz	108
91	einundneundutz	109
92	zweiundneundutz	110
93	dreiundneundutz	111
94	vierundneundutz	112
95	fünfundneundutz	113
96	sechsundneundutz	114
97	siebenundneundutz	115
98	achtundneundutz	116
99	neunundneundutz	117
9ɛ	zehnundneundutz	118
9ϯ	elfundneundutz	119

XII		X
ɛ0	zehndutz	120
ɛ1	einundzehndutz . . .	121
ɛ2	zweiundzehndutz . .	122
ɛ3	dreiundzehndutz . .	123
ɛ4	vierundzehndutz . .	124
ɛ5	fünfundzehndutz . .	125
ɛ6	sechsundzehndutz . .	126
ɛ7	siebenundzehndutz . .	127
ɛ8	achtundzehndutz . .	128
ɛ9	neunundzehndutz . .	129
ɛɛ	zehnundzehndutz . .	130
ɛϯ	elfundzehndutz . . .	131
ϯ0	elfdutz	132
ϯ1	einundelfdutz . . .	133
ϯ2	zweiundelfdutz . . .	134
ϯ3	dreiundelfdutz . . .	135
ϯ4	vierundelfdutz . . .	136
ϯ5	fünfundelfdutz . . .	137
ϯ6	sechsundelfdutz . . .	138
ϯ7	siebenundelfdutz . . .	139
ϯ8	achtundelfdutz . . .	140
ϯ9	neunundelfdutz . . .	141
ϯɛ	zehnundelfdutz . . .	142
ϯϯ	elfundelfdutz . . .	143
100	groſſ	144
101	groſſeins	145
102	groſſzwei	146
103	groſſdrei	147
⋮		
110	groſſdutz	156
111	groſſeinunddutz . . .	157
112	groſſzweiunddutz . .	158
113	groſſdreiunddutz . . .	159
⋮		
120	groſſzweidutz	168
130	groſſdreidutz	180
140	groſſvierdutz	192
⋮		
200	zweigroſſ	288
300	dreigroſſ	432
400	viergroſſ	576
500	fünfgroſſ	720
600	sechsgroſſ	864
700	siebengroſſ	1008
800	achtgroſſ	1152
900	neungroſſ	1296
ɛ00	zehngroſſ	1440
ϯ00	elfgroſſ	1584

XII		X
1000	tausig . . .	1728
1001	tausigeins . .	1729
1010	tausigdutz . .	1740
1100	tausiggroſſ . .	1872
2000	zweitausig . .	3456
3000	dreitausig . .	5184
4000	viertausig . .	6912
5000	fünftausig . .	8640
6000	sechstausig .	10368
7000	siebentausig .	12096
8000	achttausig . .	13824
9000	neuntausig . .	15552
ɛ000	zehntausig . .	17280
ϯ000	elftausig . . .	19008
10000	dutztausig . .	20736
20000	zweidutztausig .	41472
30000	dreidutztausig .	62208
⋮		
100000	groſſtausig . .	248832
200000	zweigroſſtausig	497664
300000	dreigrosstausig	746496
⋮		
1000000	eine Milliarde .	2985984
2000000	zwei Milliarden	5971968
3000000	drei Milliarden .	8957952
⋮		
10000000	dutz Milliarden	35831808
100000000	groſſ Milliarden	429981696
1000000000	tausig Milliard.	5159780352
10000000000	dutztausig Mill.	61917364224
100000000000	groſſtaus. Mill.	743008370688
1000000000000	eine Billiarde	8916100448256

u. s. w.

Die zwischenliegenden Zahlen sind leicht zu ergänzen. Beispielsweise hat man

436	viergroſſsechsunddreidutz
7ɛ15	siebentaus. zehngroſſfünfunddutz
3ϯ259	elfunddreidutztausig zweigroſſneunundfünfdutz
86ɛ32ϯ	achtgroſſzehnundsechsdutztausig dreigroſſelfundzweidutz
2605ɛ39ϯ67	zweitausig sechsgroſſfünf Milliarden zehngroſſneununddreidutztausig elfgroſſsiebenundsechsdutz.

Bei dieser Gelegenheit kann noch auf eine andere Annehmlichkeit des duodezimalen Zahlensystemes aufmerksam gemacht werden, welche darin besteht, dass man zur Darstellung der grösseren Zahlen eine geringere Menge von Ziffern zu schreiben braucht, als bei dem dezimalen Systeme. Wollte man z. B. alle ganzen Zahlen von eins bis zu Einer Milliarde, welche = 1000000 (XII) oder = 2985984 (X) ist, notiren; so hat man folgende Mengen von Ziffern zu schreiben. (Um Missverständnisse zu vermeiden, wird bemerkt, dass alle im Nachstehenden vorkommenden Zahlen die gewöhnlichen Dezimalzahlen sein sollen, wenn nicht ausdrücklich angeführt ist, dass sie sich auf das Duodezimalsystem beziehen oder das römische Zeichen XII hinter dieselben gesetzt ist.)

A) Wenn alle jene Zahlen bis zur Milliarde aus dem Duodezimalsysteme entnommen werden:

11	Stück	einziffrige	Zahlen	mit	überhaupt	11	Ziffern
132	„	zweiziffrige	„	„	„	264	„
1584	„	dreiziffrige	„	„	„	4752	„
19008	„	vierziffrige	„	„	„	76032	„
228096	„	fünfziffrige	„	„	„	1140480	„
2737152	„	sechsziffrige	„	„	„	16422912	„
1	„	siebenziffrige	„	„	„	7	„
2985984	Stück	Zahlen mit überhaupt			. . . .	17644458	Ziffern.

B) Wenn dagegen alle jene Zahlen aus dem Dezimalsysteme entnommen werden:

9	Stück	einziffrige	Zahlen	mit	überhaupt	9	Ziffern
90	„	zweiziffrige	„	„	„	180	„
900	„	dreiziffrige	„	„	„	2700	„
9000	„	vierziffrige	„	„	„	36000	„
90000	„	fünfziffrige	„	„	„	450000	„
900000	„	sechsziffrige	„	„	„	5400000	„
1985985	„	siebenziffrige	„	„	„	13901895	„
2985984	Stück	Zahlen mit überhaupt			. . . .	19790784	Ziffern.

Das Dezimalsystem macht also zur Bezeichnung derselben vorgenannten Menge von Zahlen einen Ziffernaufwand erforderlich, welcher um mehr denn 2 Millionen Ziffern grösser ist, als wenn jene Zahlen nach dem Duodezimalsysteme geordnet und bezeichnet wären.

Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass sich, wenn man nicht mit gemeinen Brüchen rechnen will, das dodekadische Gesetz der Zahlenbildung in entsprechender Weise über die Gränze der Einer hinaus in absteigender Linie ebenso in Anwendung bringen lässt, um Duodezimalbrüche darzustellen, wie dies nach dem dekadischen Gesetze behuf Erzeugung der Dezimal-

brüche geschieht. Trennt man auch hier die Ganzen von den Brüchen durch ein Komma; so bedeutet z. B. die Zahl 5,4 eine Menge von 5 Ganzen und einem Bruche, dessen Zähler 4 und dessen Nenner zwölf oder dutz ist. Ebenso 5,46 eine Menge von 5 Ganzen, plus einem Bruche mit dem Zähler 4 und dem Nenner dutz, plus einem Bruche mit dem Zähler 6 und dem Nenner groff, oder auch gleich einer Menge von 5 Ganzen plus einem Bruche mit dem dodekadischen Zähler 46 und dem dodekadischen Nenner 100.

In gemeine Brüche verwandelt und nach der Duodezimalbezeichnung geschrieben, würde also sein

$$0,4 = \tfrac{4}{10} = \tfrac{1}{3},$$
$$5,4 = 5\tfrac{4}{10} = 5\tfrac{1}{3},$$
$$5,46 = 5 + \tfrac{4}{10} + \tfrac{6}{100} = 5\tfrac{46}{100} = 5\tfrac{1}{\cdot}.$$

Bei einem duodezimalen Maass- und Zahlensysteme würde man hiernach

5,46 Fuss = 5 Fuss 4 Zoll 6 Linien

haben.

§. 10.

Die Ausführung der vier arithmetischen Grundoperationen oder Spezies mit duodezimalen Zahlen ist ebenso einfach wie die mit dezimalen.

Bei der Addition hat man nur zu beachten, dass je dutz Einheiten irgend einer niedrigeren Ordnung dazu gehören, um eine Einheit der nächst höheren Ordnung auszumachen und demzufolge in die nächstfolgende Stelle nach der linken Seite hinüberzurücken. Als Beispiele:

```
 23ƭ6ɛ07            65ɛ7
 564ɛ719          39ƭ820
  111 1              46ƭ
 -------           23081
 7ɛ45524           11121
                  ------
                  409737
```

Bei der Subtraktion wird da, wo es erforderlich ist, stets eine Einheit der nächst höheren Ordnung geborgt, welche dem Werthe nach gleich dutz Einheiten der niedrigeren Ordnung ist. Z. B.

```
 78ɛ.517.0
  21 904 3
 ---------
 768 812 9
```

Zur Ausführung der Multiplikation und Division ist das sogenannte Einmaleins behülflich, welches in dodekadischen Zahlen folgende Gestalt annimmt.

Dodekadisches Einmaleins.

1×1 =1	2×1 =2	3×1 =3	4×1 =4
1×2 =2	2×2 =4	3×2 =6	4×2 =8
1×3 =3	2×3 =6	3×3 =9	4×3 =10
1×4 =4	2×4 =8	3×4 =10	4×4 =14
1×5 =5	2×5 =ɛ	3×5 =13	4×5 =18
1×6 =6	2×6 =10	3×6 =16	4×6 =20
1×7 =7	2×7 =12	3×7 =19	4×7 =24
1×8 =8	2×8 =14	3×8 =20	4×8 =28
1×9 =9	2×9 =16	3×9 =23	4×9 =30
1×ɛ =ɛ	2×ɛ =18	3×ɛ =26	4×ɛ =34
1×ɏ =ɏ	2×ɏ =1ɛ	3×ɏ =29	4×ɏ =38
1×10=10	2×10=20	3×10=30	4×10=40
5×1 =5	6×1 =6	7×1 =7	8×1 =8
5×2 =ɛ	6×2 =10	7×2 =12	8×2 =14
5×3 =13	6×3 =16	7×3 =19	8×3 =20
5×4 =18	6×4 =20	7×4 =24	8×4 =28
5×5 =21	6×5 =26	7×5 =2ɏ	8×5 =34
5×6 =26	6×6 =30	7×6 =36	8×6 =40
5×7 =2ɏ	6×7 =36	7×7 =41	8×7 =48
5×8 =34	6×8 =40	7×8 =48	8×8 =54
5×9 =39	6×9 =46	7×9 =53	8×9 =60
5×ɛ =42	6×ɛ =50	7×ɛ =5ɛ	8×ɛ =68
5×ɏ =47	6×ɏ =56	7×ɏ =65	8×4 =74
5×10=50	6×10=60	7×10=70	8×10=80
9×1 =9	ɛ×1 =ɛ	ɏ×1 =ɏ	10×1 =10
9×2 =16	ɛ×2 =18	ɏ×2 =1ɛ	10×2 =20
9×3 =23	ɛ×3 =26	ɏ×3 =29	10×3 =30
9×4 =30	ɛ×4 =34	ɏ×4 =38	10×4 =40
9×5 =39	ɛ×5 =42	ɏ×5 =47	10×5 =50
9×6 =46	ɛ×6 =50	ɏ×6 =56	10×6 =60
9×7 =53	ɛ×7 =53	ɏ×7 =65	10×7 =70
9×8 =60	ɛ×8 =68	ɏ×8 =74	10×8 =80
9×9 =69	ɛ×9 =76	ɏ×9 =83	10×9 =90
9×ɛ =76	ɛ×ɛ =84	ɏ×ɛ =92	10×ɛ =ɛ0
9×ɏ =83	ɛ×ɏ =92	ɏ×ɏ =ɛ1	10×ɏ =ɏ0
9×10=90	ɛ×10=ɛ0	ɏ×10=ɏ0	10×10=100

Ein Beispiel der **Multiplikation** ist hiernach folgendes:

```
   63ɼ2154
       3ɛ2
  ---------
  107ɛ42ɛ8
 53339254
16ɼ96440
-----------
20415ɼɛ828
```

Als Beispiel der **Division** diene:

```
63ɼ2154 | 20415ɼɛ828 | 3ɛ2
        | 16ɼ96440   |
          ---------
           543ɼ7682
          -53339254
           ---------
            107ɛ42ɛ8
            107ɛ42ɛ8
            --------
                   0
```

Ob eine dodekadische Zahl durch irgend Eine der einfachen Ziffern **ohne Rest theilbar** sei, erkennt man an folgenden Merkmalen.

Durch 2 ist jede Zahl theilbar, deren letzte Ziffer **gerade** ist.

„ 3 „ „ „ „ deren letzte Ziffer eine 0, 3, 6 od. 9 ist.

„ 4 „ „ „ „ deren letzte Ziffer eine 0, 4 oder 8 ist.

„ 5. Um zu erfahren, ob eine Zahl, z. B. die Zahl 135736, durch 5 theilbar sei, schneide man von dieser Zahl in der Richtung von hinten immer zwei Stellen ab, wodurch man hier 13|57|36 erhält. Addirt man nun die im 1sten, 3ten, 5ten etc. Abschnitte stehenden zweiziffrigen Zahlen für sich und dann auch die im 2ten, 4ten, 6ten etc. Abschnitte stehenden zweiziffrigen Zahlen für sich, was hier 13 + 36 = 49 und 57 ergibt; so muss die Differenz der sich hierdurch ergebenden Zahlen, also hier die Zahl 57 — 49 = ɛ durch 5 theilbar sein. Da dieser Umstand bei der Zahl 135736 stattfindet; so ist sie durch 5 theilbar.

„ 6 ist jede Zahl theilbar, deren letzte Ziffer eine 0 oder 6 ist.

„ 7. Ein jedes Kennzeichen der Theilbarkeit durch 7 ist umständlicher zu konstatiren, als ein unmittelbarer Divisionsversuch.

„ 8 ist jede Zahl theilbar, wenn die aus den beiden letzten Ziffern bestehende Zahl durch 8 theilbar ist, wie dies z. B. bei den Zahlen 114, 3628 stattfindet.

„ 9 ist jede Zahl theilbar, wenn die aus den beiden letzten Ziffern bestehende Zahl durch 9 theilbar ist, wie dies z. B. bei den Zahlen 116, 6723 stattfindet.

„ ɛ ist jede Zahl theilbar, welche mit einer **geraden** Zahl schliesst und zugleich der Theilbarkeit mit 5 entspricht.

Durch ƫ ist jede Zahl theilbar, deren Ziffernsumme durch ƫ theilbar ist, z. B. die Zahl 245, da 2+4+5=ƫ ist.

„ 10 ist jede Zahl theilbar, welche mit einer 0 schliesst.

§. 11.

Es wird häufig von Interesse sein, eine dekadische in eine dodekadische, oder umgekehrt eine dodekadische in eine dekadische Zahl zu verwandeln.

Man kann sich zu dem ersteren Zwecke einer Tabelle bedienen, in welcher der Werth sämmtlicher Einheiten der sukzessiven dekadischen Ordnungen in dodekadischen Zahlen angegeben ist, indem man dann die zu verwandelnde dekadische Zahl, wie etwa 239 (X), als die Summe 200 + 30 + 9 ansieht, und die Werthe der einzelnen Summanden in dodekadischen Zahlen zusammenaddirt. Es würde dies ergeben

X		XII
200	=	148
30	=	26
9	=	9
239	=	17ƫ

Mit einer anderen Tabelle, in welcher der Werth sämmtlicher Einheiten der sukzessiven dodekadischen Ordnungen in dekadischen Zahlen angegeben ist, kann man in analoger Weise eine dodekadische Zahl, z. B. 17ƫ (XII) in eine dekadische verwandeln, indem man 17ƫ = 100 + 70 + ƫ setzt und dann

XII		X
100	=	144
70	=	84
ƫ	=	11
17ƫ	=	239

Ohne das mechanische Hülfsmittel der Tabellen gelangt man aber in nachstehender unmittelbaren Weise zum Ziele.

Bei der Verwandelung einer dekadischen Zahl in eine dodekadische beginnt man, die erstere nach den Regeln der dekadischen Zahlen mit 12 zu dividiren. Der hierbei bleibende Rest, welcher nothwendig kleiner sein wird als 12, bildet die erste Ziffer der gesuchten dodekadischen Zahl von der rechten Seite her. Den bei jener Division sich ergebenden Quotienten dividirt man dann wieder mit 12. Der neue Rest in die zweite Ziffer der dodekadischen Zahl von der rechten Seite her. So fährt man fort die entstehenden Quotienten immer wieder aufs neue mit 12 zu dividiren, bis man auf einen Quotienten stösst, welcher kleiner ist als 12 und demnach die letzte Ziffer der gesuchten dekadischen Zahl von der rechten Seite her bildet. Es versteht sich von selbst, dass man statt der Reste 10 und 11, wo sie vorkommen, die dodekadischen Ziffern ϱ und ƫ zu setzen hat.

Wenn z. B. die dekadische Zahl 37825904 in eine dodekadische verwandelt werden soll; so hat man

37825904 (X) = 10801ɥε8 (XII)
12) 3152158 | 8
12) 262679 | ε
12) 21889 | ɥ
12) 1824 | 1
12) 152 | 0
12) 12 | 8
12) 1 | 0

Bei der Verwandelung dodekadischer Zahlen in dekadische hat man das eben beschriebene Divisionsverfahren nach den Regeln der dodekadischen Rechnung mit der Zahl ε (zehn) auszuführen.

Sollte z. B. die dodekadische Zahl 10801ɥε8 in eine dekadische verwandelt werden; so hat man

10801ɥε8 (XII) = 37825904 (X)
ε) 1324ɥɥε | 4
ε) 162ε97 | 0
ε) 19ε81 | 9
ε) 2232 | 5
ε) 276 | 2
ε) 31 | 8
ε) 3 | 7

§. 12.

Aus dem Vorstehenden wird man die Ueberzeugung geschöpft haben, dass die Eingewöhnung in das duodezimale Zahlensystem durchaus keine erheblichen Schwierigkeiten so wenig für den gebildeteren, wie für den durch geistige Beschäftigung weniger erleuchteten Mann darbietet. Bei den niedrigeren Volksklassen, welche durch eine Umwälzung des Zahlensystems scheinbar am meisten belästigt werden, bestehen die zu lösenden Rechenexempel in der Regel in den allereinfachsten Operationen des Numerirens, der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation und der Division, und die darin vorkommenden Zahlen gehen selten über die Hunderte hinaus. Alle diese Operationen und die ganze Auffassung des neuen Systemes mit seinen Benennungen und Bezeichnungen werden an der Vorstellung, dass man nunmehr nach

Dutzenden eben so zähle, wie früher nach Zehnern, bald eine kräftige Unterstützung finden und mit Leichtigkeit bewerkstelligt werden. Der mit Zahlen viel Verkehrende wird allerdings im Anfange ein Bleigewicht an seiner Feder fühlen und öfters aus dem einen System in das andere hinüberirren; allein es ist zu erwägen, dass bei einem ausschliesslichen Gebrauche des neuen Systemes bald das alte mit seinen Formen und Regeln in völlige Vergessenheit gerathen wird, und dass, wenn dieser Zustand herangekommen ist, die bloss aus der Verwechselung zweier gleichzeitig dem Verstande vorschwebenden Systeme hervorgehenden Schwierigkeiten von selbst verschwinden werden.

Ein erheblicherer Uebelstand würde darin zu erblicken sein, dass wahrscheinlich unsere Nachbarvölker nicht gleichzeitig zu einer Aenderung ihres Zahlensystemes sich entschliessen würden, und dass demzufolge bei dem internationalen Verkehre für eine geraume Zeit die beiden Systeme sich begegnen und mancherlei Unbequemlichkeiten herbeiführen würden.

Allein hiervon würde doch immer nur ein verhältnissmässig kleiner Theil unseres Volkes betroffen werden, und dieser Theil gehört zu dem gebildeten Stande, welcher mit Zuhülfenahme von Reduktionstabellen und da die Zahlen der beiden Systeme verschiedene Namen tragen, sich dennoch ohne grosse Mühe mit dem Ausländer wird verständlich machen können. Dieser Theil des Volkes wird aber auch den meisten Beruf in sich fühlen, einer guten Sache ein angemessenes Opfer zu bringen, und in dem Gedanken Beruhigung finden, dass der Vorgang Deutschlands auch in den übrigen Ländern das Streben zur Nachahmung erwecken und früh oder spät zur That werden lassen wird.

Gleichwohl ist durchaus nicht zu erwarten, dass man sich sofort zur Beseitigung des dekadischen und zur Annahme des dodekadischen Zahlensystemes entschliessen werde. Was ich für meine Person in dieser Hinsicht höchstens zu hoffen wage, besteht darin, dass der Eine und der Andere die Ueberzeugung von dem grossen Vorzuge des dodekadischen Zahlensystemes vor dem dekadischen gewinnen und den Entschluss fassen werde, nach seinen Kräften auf eine möglichst baldige Einführung jenes ersteren Systemes hinzuarbeiten.

Dieses Ziel würde gewiss sehr rasch heranrücken, wenn allen betreffenden Lehrern die Pflicht auferlegt würde, bei dem Rechenunterrichte in allen Land- und Stadtschulen die Principien des dodekadischen Zahlensystemes mit möglichster Klarheit vorzutragen und den Schülern einige Fertigkeit im Umgange mit dodekadischen Zahlen beizubringen. Ferner, wenn die über elementare Arithmetik schreibenden Schriftsteller es übernähmen, in jedem Kursus über Zahlenlehre dem dodekadischen Systeme einen angemessen Abschnitt zu widmen und die Vortheile möglichst detaillirt zu erläutern, welche mit diesem Systeme verbunden sind.

Sobald auf diese Weise die nächste Generation auf die bevorstehende Einführung des dodekadischen Zahlensystemes gründlich vorbereitet ist, was jedoch jetzt schon einen energischen Volksentschluss voraussetzt, wird man im Stande sein,

einen nahen Termin zu bestimmen, mit welchem das dekadische System den Vätern zurückgegeben und das dodekadische in Lebenskraft gesetzt werden soll.

§. 13.

Wir kehren jetzt zu dem eigentlichen Maasssysteme zurück, um nach geschehener Feststellung der duodezimalen Eintheilung desselben einige Bemerkungen über die wünschenswerthe absolute Grösse seiner Grundeinheiten beizubringen.

Es wäre zuvörderst die Frage zu berühren, ob wir die selbstständigen Grundeinheiten des Maasssystemes, insbesondere die Grundeinheit der Längenmaasse, aus einer in der Natur irgendwo sich vorfindenden unveränderlichen Grösse entlehnen sollen, indem wir entweder den ganzen Werth dieser Grösse oder einen gewissen aliquoten Theil derselben zu jener Grundeinheit annehmen, ob wir also dem Systeme ein sogenanntes Naturmaass zu Grunde legen sollen, wie dies für das Längensystem z. B. aus der Länge des Sekundenpendels, des Fallraumes in der ersten Sekunde, des Erdumfanges u. s. w. gewonnen werden könnte, oder ob wir, unbekümmert um derartige Naturgrössen, die Grundeinheiten lediglich in Rücksicht auf deren Gebrauch durch einen freien Akt des Willens zu wählen haben.

Die beiden wichtigsten Bedingungen, welche man bei der Wahl einer Grundeinheit zu erfüllen hat, sind offenbar

1) dass sie selbst für die gewöhnlichsten Vorkommnisse im menschlichen Leben möglichst bequem zu verwenden sei und zu ebenso bequemen unter- und übergeordneten Einheiten führe;

2) dass sie vollkommen sicher, unzweideutig und unveränderlich festgelegt sei, damit auch die feinsten wissenschaftlichen Messungen an allen Orten und zu allen Zeiten damit vollführt werden können.

Da einzelne Naturgrössen und die allgemeinen menschlichen Lebensbedürfnisse in keinem Kausalzusammenhange stehen; so ist klar, dass die erste der beiden vorstehenden Bedingungen nur ganz zufällig durch ein Naturmaass erfüllt werden kann, dass man also, wenn man sich auf ein Naturmaass kapriziirt, nur Gefahr laufen kann, unpraktische Maasseinheiten zu erhalten. Die französischen Grundeinheiten, welche mit eiserner Gewalt dem Schoose der Natur entrissen sind, und deren Erfinder den Zusammenhang der Maasse mit dem Reiche des Todten höher angeschlagen haben, als den Zusammenhang mit dem Reiche des Lebendigen, liefern den Belag zu dieser Bemerkung, da dieselben, wie wir weiter unten noch etwas spezieller zeigen werden, sämmtlich unzweckmässige Werthe erhalten haben.

Aber die zweite Bedingung, Sicherheit und Unveränderlichkeit der Grundeinheiten, scheint sich sehr gut durch ein Naturmaass verwirklichen zu lassen, da die Kräfte der Natur, welche

gewisse konstante Grössen erzeugen, einestheils unabhängig sind von der Unvollkommenheit der mechanischen Künste des Menschen, anderentheils auch eine Unveränderlichkeit besitzen, welche von keiner Zeit in irgend einem erheblichen Grade angefochten wird. Diese Rücksicht verleitet Viele, in einem Naturmaasse das wahre Heil der Maasssysteme zu erblicken, indem sie glauben, nur durch dieses Mittel im Stande zu sein, der spätesten Nachwelt genau dasselbe Maass zu überliefern, dessen sie sich jetzt zu ihren Messungen bedienen, ja sogar die Nachwelt zu befähigen, dieses Maass mit grösster Präzision wiederherzustellen, wenn es etwa durch irgend welche Ereignisse verloren gegangen und gleichzeitig auch alle Beziehungen verschollen wären, in welchen jenes Maass zu irgend einem anderen erhaltenen Maasse stand.

Hierbei bedenken jedoch die mit der Physik weniger vertrauten Anhänger der Naturmaasse gar nicht, wie ungemein schwierig es ist, den wahren Werth einer solchen konstanten Naturgrösse, z. B. die wahre Länge des Sekundenpendels oder des Fallraumes in der ersten Sekunde, darzustellen, so dass er nur erst einmal mit aller Schärfe erkannt werden kann. Von wie vielen ausgezeichneten Experimentatoren und zu wie vielen Malen ist wol die Länge des Sekundenpendels unter gleichen tellurischen Verhältnissen ermittelt worden, ohne dass zwei Beobachtungen genau dasselbe Resultat gegeben hätten? Hierzu kommt noch, dass der Fortschritt der Wissenschaften täglich auf neue Elemente aufmerksam macht, welche bei solchen Beobachtungen in Rechnung gebracht werden müssen, um die Wahrheit nicht zu verfehlen, und dass täglich die mechanischen Mittel und Methoden der Experimentirkunst verbessert werden, welche dann jedesmal eine Korrektion des aus früheren Bestimmungen gefolgerten Resultates nach sich ziehen, also den früher ermittelten Werth der fraglichen Naturgrösse als falsch bezeichnen, ohne doch selbst mit der Hoffnung sich brüsten zu können, nunmehr eine spätere Korrektion unmöglich gemacht zu haben. Die letztere nie zu beseitigende Unvollkommenheit der Messungsmethoden verhindert aber auch selbst dann, wenn eine Naturgrösse nicht zuvor dargestellt zu werden brauchte, sondern offen und unzweideutig zu Tage läge, wie wir dies einmal mit dem Erdumfange annehmen wollen, dass der Werth dieser Grösse genau festgestellt werde, so dass man überzeugt sein kann, in der daraus hergeleiteten Maasseinheit wirklich denjenigen bestimmten Theil jener Naturgrösse zu besitzen, welchen man erlangt zu haben wähnte, und welchen jeder spätere Experimentator ebenfalls nicht verfehlen dürfte.

In Betracht der menschlichen Mittel, welche zur Erkennung einer Naturgrösse der hier gemeinten Art aufgewandt werden müssen, kann man daher behaupten, dass ein Naturmaass das unsicherste und veränderlichste von allen sei und die zweite der obigen Bedingungen am wenigsten erfülle. Auch hierzu liefert das französische Naturmaass die Bestätigung. Die Grundeinheit des französischen Längenmaasses, auf welche dann auch das Gewichts- und Geldsystem zurückgeführt ist, soll in dem Meter den 10000000sten Theil des nördlichen Meridianquadranten für den Ort Paris darstellen. Dieser Bestimmung zufolge wurde im Jahre 1795 auf Grund der älteren Gradmessungen das Meter

zuvörderst provisorisch zu 443,442 Linien des alten pariser Fusses angenommen. Nach späteren genaueren Messungen wurde jedoch im Jahre 1801 das Meter definitiv etwa zu 443,296 festgesetzt. Allein eine neuere Revision der letzteren Gradmessung hat schon gelehrt, dass diese Länge des Meters durchaus nicht der 10000000ste Theil des fraglichen Quadranten ist, und somit ist die an die letztere Beziehung des Meters zum Erdquadranten sich knüpfende Idee eine reine Illusion, welche in Zukunft gewiss noch erheblichere Korrektionen erfahren wird, wenn man mit vollkommeneren Mitteln und Methoden eine abermalige Messung desselben Quadranten veranstalten sollte.

Die Untrüglichkeit eines Naturmaasses ist also eine Chimäre und demnach können die obigen beiden Erfordernisse, nämlich ein praktisches und möglichst unveränderliches Maass nur durch freiwillige und umsichtige Wahl befriedigt werden.

Es versteht sich von selbst, dass man auf die genaue Festlegung eines solchen Maasses, sowie auf die Konservirung desselben durch zweckmässige Deposition des Originales und getreuer Kopieen, die grösste Sorgfalt zu verwenden hat, wozu es der Scharfsinn unserer Naturforscher gewiss nicht an Rathschlägen wird fehlen lassen.

Was die Wiederherstellung eines solchen Maasses für eine Generation betrifft, welche nur unsere Schriften, nicht aber das materielle Maass und kein damit genau verglichenes vorfinden sollte, ein Ereigniss, welches durch eine ausgedehnte Verbreitung richtiger Gemässe an und für sich schon höchst unwahrscheinlich gemacht werden kann; so bietet diese Wiederherstellung keine grösseren und keine kleineren Schwierigkeiten dar, gleichviel ob das jetzige Maass ein willkürlich gewähltes oder ein Naturmaass war. Denn man braucht jetzt nur durch das adoptirte Maass mit möglichster Genauigkeit irgend eine jener festen Naturgrössen zu messen und das Resultat der Messung in Schriften zu notiren. Will alsdann die Nachwelt das etwa verloren gegangene Maass wiederherstellen; so braucht sie nur mit einem ganz willkürlichen Maassstabe dieselbe Messung an derselben Naturgrösse zu wiederholen, und das sich ergebende Resultat mit dem Resultate unserer Messung zu vergleichen, um einen Rückschluss von ihrer Maasseinheit auf unsere Maasseinheit mit aller in dem Wesen der Sache liegenden Präzision machen und demnach unsere Maasseinheit ebenso genau wieder darstellen zu können, wie wenn wir irgend einen einfachen Theil jener Naturgrösse zur Maasseinheit angenommen hätten.

Wenn nun hiernach bloss das praktische Bedürfniss die Wahl der Grundeinheiten leiten kann; so ist es doch eine Rücksicht, welche wir im eigenen Interesse auf die jetzt bestehenden Einrichtungen der Nachbarvölker zu nehmen haben, dass wir etwaige kleine Mängel unbeachtet lassen, wenn sich dadurch eine einfache Beziehung zwischen unseren Gemässen und denen eines anderen grossen Volkes, mit welchem wir in lebhaftem Verkehre stehen, erreichen lässt. In diesem Betracht wird es jedenfalls zweck-

mässig sein, die neuen deutschen Grundmaasse an die in ganz Europa viel bekannten und verbreiteten französischen Einheiten anzulehnen.

Im Nachfolgenden werde ich ein solches mir zweckmässig scheinendes System zusammenstellen und neben den projektirten Maassen zugleich deren Werthe nach dem gegenwärtigen französischen und preussischen Maasssysteme angeben. Es ist hierbei eine besondere Rücksicht nicht bloss darauf genommen, dass die Grundeinheit eines jeden Spezialsystemes einen angemessenen Werth erhalte, sondern auch darauf, dass die kleinste Untereinheit des Systemes nicht erheblich grösser ausfalle, als in den bisher bestandenen Systemen, weil durch zu grosse Minimal-Gemässe leicht die Lebensbedürfnisse der untersten Volksklassen eine empfindliche Vertheuerung erleiden.

Vorweg bemerke ich jedoch hinsichtlich der Benennung der verschiedenen Einheiten und Untereinheiten, dass es gewiss rathsam ist, sich hierbei soviel als möglich an die bisherigen deutschen Namen zu halten, ohne auf eine sogenannte rationelle Nomenklatur zu dringen, wie sie sich in dem französ. Systeme vorfindet, wo der Name der Grundeinheit für jede Grössenart durch das ganze System läuft und nur durch die Verbindung mit gewissen Zahlwörtern zu verschiedenen Begriffen umgestempelt wird. Denn einestheils geben derartige Zusammensetzungen in unserer Sprache leicht schwerfällige Wortformen oder, wenn biegsame Wörter aus fremden Sprachen zu Hülfe genommen werden, Mischlinge, welche unser Sprachidiom nur noch mehr verletzen, als es leider schon genug geschehen ist; anderentheils aber heften sich die Begriffe für die verschiedenen Einheiten bei dem grössten Theile des Volkes mit grösserer Bestimmtheit an verschiedene selbstständige Namen, welche wie Klippen aus dem gleichförmigen Strome einer von Theil zu Theil fortschreitenden Gemässskale hervorragen und die Gruppen des Systemes nicht in einander überschleifen, sondern scharf trennen.

Die Richtigkeit der letzteren Behauptung werden diejenigen empfinden, welche sich fragen, wie oft sie ihre Gedanken erst auf das Prinzip der Benennung der französischen Gemässe haben zurückführen müssen, um nicht diese oder jene zwei der Längen: Dezimeter, Zentimeter, Dekameter, Hektometer, Kilometer, oder der Flächen: Deziare, Zentiare, Dekare u. dergl. mit einander zu verwechseln.

Ausserdem aber ist es wünschenswerth, die einfachsten der hie oder da in Deutschland üblichen Maassbenennungen zu wählen, und dieselben nicht etwa mit einem Ballast von Epitheten zu behängen, um hierdurch den neueren Ursprung zu bezeichnen. Wenn es in Zukunft einmal darauf ankommen sollte, die älteren Gemässe, welche doch bald ausser dem Bereich aller Nachfrage kommen würden, von den neueren zu unterscheiden; so kann dies immer sehr leicht durch den Zusatz altes Maass geschehen.

§. 14.

Entwurf eines duodezimalen Maasssystemes.

1) Längenmaaasse.

Die Grundeinheit des französischen Längenmaasses, das *Meter*, in einer Länge von etwa $3^1/_5$ Fuss rheinländisch, ist viel zu gross, um bei den *gewöhnlichen* Längenbestimmungen des menschlichen Lebens ein bequemes Maass abzugeben. Wenn die Längenangaben nur etwas mehr als die gröbsten Annäherungen sein sollen, welche fast gar keinen praktischen Werth haben; so kann man dieselben nicht in runden Metern machen, sondern muss die untergeordneten Einheiten zu Hülfe nehmen. Dieses Faktum haben selbst die Franzosen dadurch anerkennen müssen, dass sie neben dem Meter noch einen neuen Fuss = $^1/_3$ Meter in Gebrauch setzten.

In der That empfiehlt sich die Fusslänge zu dem alltäglichen Gebrauche durch ihre angemessene Grösse sehr. Man basire daher das Längensystem auf den *Fuss* als Grundeinheit, und gebe demselben genau die Länge *des dritten Theiles des definitiven Meters*. Dies gibt folgendes System:

1 Ruthe	= 12 Fuss;	dem Werthe nach	= 4 Meter oder = 12,745... Fuss preuss.
1 Fuss	= 12 Zoll;	„ „ „	= $^1/_3$ Meter oder = 1,062 ... Fuss preuss.
1 Zoll	= 12 Linien;	„ „ „	= $2^7/_9$ Zentimeter oder = 1,062 ... Zoll preuss.
1 Linie	= 12 Skrupel;	„ „ „	= $2^{17}/_{54}$ Millimeter oder = 1,062... Linie preuss.
	1 Skrupel	„ „ „	= $^{125}/_{648}$ Millimeter oder = 1,062 ... Skrupel pr.

1 Meile = 12×12×12 = 1728 Ruthen } = 6912 Meter od.
= 12×12×12×12 = 20736 Fuss } = 22023 Fuss pr.

Nach den Einheiten dieses Systemes sind im öffentlichen Leben alle Längen zu messen, so dass aus dem Bergwerke das *Lachter*, von der See der *Faden* und aus dem Laden des Kaufmanns die *Elle* verschwindet, welche Maasse doch nur auf zufälligen Gewohnheiten oder auf unwesentlichen Eigenschaften beruhen. So hat z. B. die Elle nur das Bequeme an sich, dass sich bei ihrer Handhabung mit möglichster Leichtigkeit ein längeres Stück Zeug abmessen lässt. Dies kann jedoch mit derselben Geläufigkeit geschehen, wenn man sich statt der Elle eines Stabes von 2 Fuss Länge bedient. Im Uebrigen ist die Eintheilung der Elle in Halbe, Viertel und Achtel bei weitem nicht so zweckmässig, als die Duo-

dezimal-Eintheilung des Fusses in Zolle, welche dem Kaufmanne verstattet, Längen von grösserer Mannichfaltigkeit an den Käufer abzugeben und demnach vielseiterige Bedürfnisse zu befriedigen, besonders da eine entsprechende Duodezimaleintheilung des Geldes die Bezahlung so verschiedener Längen erleichtern wird.

Vorstehendes System schliesst nicht aus, dass der Feldmesser, so lange nicht ebenfalls das dodekadische Zahlensystem angenommen ist, die gesetzmässige Ruthe nach dem Dezimalprinzipe in Zehntel-, Hundertstel-Ruthen u. s. w. abtheile, um durch die Messung sogleich bequeme Zahlformen für seine späteren Rechnungen zu erhalten.

2) Flächenmaasse.

Die Flächen werden nach Quadratruthen, Quadratfussen, Quadratzollen u. s. w. sowie nach Quadratmeilen gemessen. Ausserdem hat man

1 Morgen = der Fläche eines Quadrates, dessen Seite 12 Ruthen enthält, also = 144 Quadratruthen; dem Werthe nach ist diese Grösse = 2304 Quadratmeter = 162,43 ... Quadratruthen preussisch.

1 Quadratmeile enthält $12 \times 12 \times 12 \times 12 = 20736$ Morgen.

3) Körpermaasse.

a) Bei der Ausmessung der Körper werden die Kuben der obigen Längeneinheiten überall da in Anwendung gebracht, wo der körperliche Inhalt aus drei räumlichen Dimensionen zu ermitteln ist.

Für sonstige Körpermaasse sei

b) Zum Abmessen der Steine und Erde beim Bauwesen

1 Schachtruthe = $^1/_{12}$ Kubikruthe = 144 Kubikfuss; dem Werthe nach = $5^1/_3$ Kubikmeter = 172,511 ... Kubikfuss preuss.

Die Schachtruthe wird in 12 Zuber à 12 Kubikfuss getheilt.

c) Zum Abmessen des Brennholzes etc.

1 Klafter = 144 Kubikfuss; dem Werthe nach = $5^1/_3$ Kubikmeter = 172,511 ... Kubikfuss preussisch.

d) Zum Abmessen des Getreides und anderer körniger Substanzen.

Die Grundeinheit sei der Scheffel, welcher 1 Kubikfuss enthalte, was dem Inhalte nach = $^1/_{27}$ Kubikmeter = 1,198 ... Kubikfuss preussisch ausmacht.

1 Wispel = 12 Malter; dem Inhalte nach 144 neue Kubikfuss = $5^1/_3$ Kubikmeter = 4,044 ... Wispel preuss.

1 Malter = 12 Scheffel; dem Inhalte nach 12 neue Kubikfuss = $^4/_9$ Kubikmeter = 8,088 ... Scheffel preuss.

1 Scheffel = 12 Metzen; dem Inhalte nach 1 neuer Kubikfuss $= \frac{1}{27}$ Kubikmeter = 0,674... Scheffel preuss.

1 Metze ist dem Inhalte nach $\frac{1}{12}$ neuer Kubikfuss $= \frac{1}{324}$ Kubikmeter = 0,898... Metzen preussisch.

e) Zum Ausmessen der Flüssigkeiten, Bier, Wein etc.

Die Grundeinheit sei das Quart, dessen Inhalt gleich dem Würfel von $\frac{3}{10}$ Fuss, also gleich $\frac{27}{1000}$ Kubikfuss sei, so dass das Gewicht von einem Quart Wasser, wie wir weiter unten sehen werden, genau 2 Pfund beträgt. Dieses Quart ist alsdann auch gleich 1 Kubikdezimeter oder gleich 1 Liter. Die Eintheilung sei:

1 Fass = 12 Tonnen oder Oxhoft; dem Werthe nach = 1728 Liter = 1509,12... Quart preussisch.

1 Tonne oder Oxhoft = 12 Anker; dem Werthe nach = 144 Liter = 125,76 ... Quart preussisch.

1 Anker = 12 Quart; dem Werthe nach = 12 Liter = 10,48... Qrt. preussisch.

1 Quart = 12 Nössel; dem Werthe nach = 1 Liter = 0,873... Qrt. preussisch.

1 Nössel ist dem Werthe nach $= \frac{1}{12}$ Liter = 0,0727... Qrt. preussisch.

4) Gewichtsmaasse.

Das französische Kilogramm, gleich dem Gewichte eines Kubikdezimeters Wasser im Zustande der grössten Dichtigkeit (ungefähr bei 3,2° R. Wärme) und im luftleeren Raume, ist für den gewöhnlichen Gebrauch zu gross, was sich auch dadurch bethätigt, dass in Frankreich ein neues Pfund $= \frac{1}{2}$ Kilogramm gesetzlich erlaubt ist. Man nehme daher als Grundeinheit des Gewichtssystemes das Pfund gleich der Hälfte des französischen Kilogrammes an, so dass 1 Pfund das halbe Gewicht eines Kubus Wasser, dessen Seite $\frac{3}{10}$ Fuss beträgt, oder das ganze Gewicht von $\frac{27}{2000}$ Kubikfuss Wasser darstellt, wonach dann 1 Kubikfuss Wasser $74\frac{2}{27}$ Pfund wiegen wird. Die Eintheilung sei folgende:

1 Tonne = 12 Zentner; dem Werthe nach = 864 Kilogramm = 1847,29 ... Pfund preussisch.

1 Zentner = 12 Stein; dem Werthe nach = 72 Kilogramm = 153,941 ... Pfund preussisch.

1 Stein = 12 Pfund; dem Werthe nach = 6 Kilogramm = 12,828 ... Pfund preussisch.

1 Pfund = 12 Loth; dem Werthe nach $= \frac{1}{2}$ Kilogramm = 1,069... Pfund preussisch.

1 Loth = 12 Quentchen; dem Werthe nach $= 41\frac{2}{3}$ Gramm = 2,850 ... Loth preussisch.

1 Quentch. = 12 Gran; dem Werthe nach $= 3\frac{17}{36}$ Gramm = 0,950 ... Quentchen preuss.

1 Gran = 12 Ass; dem Werthe nach = $^{125}/_{432}$ Gramm = 4,75 ... Gran preussisch.

1 Ass dem Werthe nach = $^{125}/_{5184}$ Gramm = 0,396 ... Gran preussisch.

Nach diesem Gewichte würden auch die Aerzte und Apotheker, sowie die Gold- und Silberarbeiter zu rechnen haben.

5) Geldmaasse.

Der französische Frank zu dem Werthe von etwa $^{4}/_{15}$ Thlr. pr. oder 8 Silbergroschen ist offenbar als gebräuchlichste Grundeinheit des Geldsystemes zu klein. Man nehme den doppelten Werth des Franken als Thaler zur Grundeinheit an und bilde folgendes System:

1 Pistole (Goldmünze) = 12 Thlr.; dem Werthe nach = 24 Franken = 6 Thaler 13,92... Silbergroschen preuss.

1 Thaler (Silbermünze) = 12 Groschen; d. Werthe n. = 2 Franken = 16,16 Silbergroschen preussisch.

1 Groschen (Silberm.) = 12 Pfennig; d. Werthe nach = $^{1}/_{6}$ Franken = 1,34 ... Silbergroschen pr.

1 Pfennig (Scheidemünze) d. Werthe n. = $1^{7}/_{18}$ Zentimen = 1,34... Silberpfennig.

Es versteht sich von selbst, dass noch verschiedene zwischen den vorstehenden Haupteinheiten liegende Münzen ausgeprägt werden müssen, welche jedoch keine anderen, als die ihnen nach diesem System zukommenden Namen in der Zusammensetzung mit den betreffenden Zahlwörtern erhalten, z. B. Doppel-Pistolen als Goldmünze, Zwei-Thalerstücke als Silbermünze u. s. w.

6) Zeitmaasse.

Der Zeitraum von Mitternacht zu Mitternacht werde auch ferner in 2 mal 12 gleich 24 Stunden getheilt. Die Stunde theile man jedoch zuvörderst in 12 Grad, wovon ein jeder ein Intervall gleich 5 alten Minuten umfassen wird. Hierdurch gewinnt man nicht bloss ein konsequentes System, sondern auch eine Erleichterung der Zeitbestimmung für das bürgerliche Leben, in welches jetzt durch den immer mehr sich ausdehnenden Eisenbahnverkehr die ganze für Manchen fast unübersehbare Menge der 60 Minuten eingeführt ist. Durch eine Eintheilung der Stunde in 12 Grad würden die Fahrpläne der verschiedenen Bahnverwaltungen gewiss eine viel einfachere Gestalt annehmen, und die nach Graden angegebenen Zeitmomente würden sich bei der bekannten Einrichtung unserer Uhren mit der grössten Bequemlichkeit ablesen lassen. Demnach sei

1 Tag	= 12 Stunden;	dem Werthe nach	= 1 jetzigen Tage.
1 Stunde	= 12 Grad;	„ „ „	= 1 jetzigen Stunde.
1 Grad	= 12 Minuten;	„ „ „	= 5 jetzigen Minuten.
1 Minute	= 12 Sekunden;	„ „ „	= 25 jetzigen Sekund.
1 Sek.	= 12 Terzien;	„ „ „	= $2^1/_{12}$ jetz. Sekund.
	1 Terzie	„ „ „	= $^{25}/_{144}$ jetz. Sekund.

7) Winkelmaasse.

Man theile den Kreisquadranten in 72, also den Halbkreis in 144 und den ganzen Kreis in 288 Grad; ferner

1 Grad in 12 Minuten,
1 Minute in 12 Sekunden,
1 Sekunde in 12 Terzien.

Die Erde durchläuft alsdann bei der Umdrehungsbewegung um ihre Axe

in dem Zeitraum von 12 Stunden die Winkelgrösse von 144 Grad;
„ „ „ „ 1 Stunde „ „ „ 12 Grad;
„ „ „ „ 1 Grad „ „ „ 1 Grad;
„ „ „ „ 1 Minute „ „ „ 1 Minute;
„ „ „ „ 1 Sekunde „ „ „ 1 Sekunde.

8) Kräftemaasse.

Behuf Messung der physischen und chemischen Kräfte aller Art suche man Systeme herzustellen, welche mit möglichster Konsequenz auf dem Duodezimalgesetze beruhen.

So theile man z. B. behuf Messung der Wärme die Thermometerskale zwischen dem Gefrier- und Siedepunkte des Wassers in 144 Grad.

9) Stückmaasse.

Die stückweise zu zählenden Güter im gewöhnlichen Leben messe man, wo es nur irgend thunlich ist, nach

Dutzenden à 12 Stück und
Groffen à 12 Dutzend,

indem man sich der viel unbequemeren Zahlmaasse: Schock, Mandel, Stiege, Zimmer u. dergl. gänzlich enthält.

Wo gewerksmässiger Gebrauch für grössere Mengen besondere Begriffe und Namen erfordert, führe man eine strenge Duodezimaleintheilung ein. So sei

bei der Garn-Fabrikation

1 Bund = 12 Lopf;
1 Lopf = 12 Gebind;
1 Gebind = 144 Fäden à 6 Fuss lang.

Bei der Papier-Fabrikation.

1 Ballen = 12 Ries;
1 Ries = 12 Buch;
1 Buch = 12 Bogen.
u. s. w.

Wenn unter Verleugnung kleinlicher Rücksichten ein in vorstehender Weise streng geordnetes Duodezimal-Maasssystem dem öffentlichen Leben übergeben und der Gebrauch desselben dem Volke zur anderen Natur geworden ist; so kann es nicht fehlen, dass bald selbst in den untersten Schichten die Idee eines duodezimalen Zahlensystemes verstanden wird und Anklang findet, so dass alsdann nur noch eine geringe Beihülfe von Seiten der Schulen, der Schriftsteller und öffentlichen Redner erforderlich ist, um das gesammte Volk zu der früher besprochenen höchst segensreichen Umwälzung des absoluten Zahlensystems bereitwillig zu machen.

Deutsche Maasse, Münzen und Gewichte.

II.

Ueber ein deutsches Maass-, Gewichts- und Münzsystem.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Das Bedürfniss eines gemeinschaftlichen deutschen Maasssystemes ist ein vielfach gefühltes und mit der Kräftigung der Nationaleinheit wird es ein immer allgemeiner empfundenes werden. Der gegenseitige Verkehr verlangt zu seiner Erleichterung ein solches, wenigstens in so weit als es sich einführen lässt, d. h. mindestens innerhalb der Gränzen desselben Staates.

Bei Einführung eines solchen scheint es jedoch nicht geradezu nothwendig zu sein, von einem Grundmaasse auszugehen, das die Natur selbst anzeige, wie Laplace sagt. Denn es kann diess doch offenbar nur aus dem Grunde geschehen, damit man das Urmaass wieder auffinden könne, wenn es je sollte verloren gehen. Allerdings ist dieser Grund ein äusserst wichtiger, allein er kann vollständig erreicht werden, wenn man irgend eine beliebige Länge zum Grundmaasse annimmt. Denn ist das Volk, das eine solche Länge als Grundmaass annimmt, eines, in dem die Wissenschaften blühen, so werden eine Menge, als unveränderlich anzusehender Längen von ihm in dem angenommenen, willkührlichen Maasse bestimmt werden, als die Pendellänge in den verschiedenen Breiten und Längen, die Länge der Erdgrade u. s. f. und dadurch ist ganz eben so gut das Mittel gegeben, das Urmaass wieder zu finden, wenn es verloren gehen sollte. Ist ein solches willkührliches Urmaass z. B. der Pariser Fuss, und man weiss, dass die Länge des Pendels im leeren Raume und bei 10° in Paris 3′0″8‴,6 ist, so kann man aus dieser Angabe schon allein

das Urmaass immer wieder finden. Freilich könnte sich, in Folge von Umwälzungen im Innern der Erde, die Pendellänge in Paris ändern, es ist aber nicht wahrscheinlich, dass diess überall geschehe, und ist daher die Pendellänge an vielen Orten genau in dem angenommenen Maasse bestimmt, so kann das Urmaass als für immer festgestellt betrachtet werden. Ich habe hier die Pendellänge nur als Beispiel angenommen; das Nämliche gilt von noch vielen andern Längen, die in der Natur als im Allgemeinen unveränderlich angesehen werden können.

Als Resultat scheint sich somit zu ergeben, dass die Zugrundelegung eines „natürlichen“ Urmaasses keineswegs nothwendig ist. Vielmehr muss man, so viel diess immer möglich ist, sich an die bestehenden Maasse, die das Bedürfniss geschaffen, anlehnen. Die nothwendige Bedingung ist nur die, dass die Unterabtheilungen dergestalt gewählt seien, dass die Rechnung erleichtert wird, d. h. dass sie nach der Theilung von 10 zu 10 geschehen. Nach diesen vorläufigen Bemerkungen wende ich mich sofort zum Vorschlage eines gemeinschaftlichen Maasssystems.

I. Längenmaass.

Als „natürliches Maass“ hat sich im Laufe der Zeit hier die beiläufige Länge des menschlichen Fusses herausgestellt. Diese Bestimmungsweise musste es mit sich bringen, dass der Fuss (das Maass) an verschiedenen Orten verschieden ausfiel, woher sich denn auch die Unzahl verschiedener Fussmaasse erklärt. Ward aber in einem Staate ein Stamm herrschend, so nöthigte er die andern Stämme zur Annahme seines Maasses, oder durch Centralisirung der Regierungsgewalt war die Möglichkeit gegeben, dasselbe Maasssystem in einem grössern Staate einzuführen. Keines dieser beiden war in Deutschland der Fall, und man konnte daher nicht anders erwarten, als dass so viele Maasse sich bilden würden, als Staaten. Wollen wir nun ein gemeinschaftliches Maass, so dürfen wir uns nicht zu weit entfernen von den bisher gebräuchlichen Einheiten, wenn wir nicht gewaltsam störend in eine Menge Verhältnisse eingreifen wollen. Zweckmässig scheint es aber zu sein, eine Einheit zu wählen, die in einfachem Verhältnisse stehe zum französischen Meter; zweckmässig des internationalen Verkehrs wegen, zweckmässig des Gebrauchs des französischen Maasses in der Wissenschaft wegen. Unter diesen Umständen scheint als Einheit des Fussmaasses die angemessenste Unterabtheilung des Meters: drei Décimètres zu sein, so dass

$$1 \text{ deutscher Fuss} = 0,^{m}3.$$

Der Fuss würde in 10 Zolle, der Zoll in 10 Linien u. s. f. abgetheilt. Das vorgeschlagene Längenmaass liegt so ziemlich in der Mitte zwischen den bisher in Deutschland gebräuchlichen. Es ist nämlich:

der wiener Fuss	=0,m316110	der böhmische Fuss	=0,m296398
„ preuss. „	=0, 313853	„ nassauische „	=0, 287844
„ badische „	=0, 300000	„ gothaische „	=0, 287618
„ hannöv. „	=0, 292094	„ lübeckische „	=0, 291002
„ bayer. „	=0, 291859	„ oldenburg. „	=0, 296415
„ kurhess. „	=0, 287699	„ bremische „	=0, 289200
„ würtemb. „	=0, 286490	„ frankfurter „	=0, 284600
„ braunschw.	=0, 285361	„ fuldaer „	=0, 282880
„ sächsische	=0, 283190	„ darmstädt. „	=0, 250000

Zugleich hätte die Schweiz dasselbe Fussmaass, während der englische (russische) Fuss nicht viel davon verschieden wäre (=0,m3047945).

Dieser Annahme nach wäre sodann:

der wiener Fuss	=1,05370	deutsche Fuss
„ preussische „	=1,04617	„ „
„ badische „	=1,00000	„ „
„ böhmische „	=0,98799	„ „
„ oldenburg. „	=0,98805	„ „
„ hannöv. „	=0,97364	„ „
„ bayerische „	=0,97286	„ „
„ bremische „	=0,96400	„ „
„ nassauische „	=0,95948	„ „
„ kurhessische „	=0,95899	„ „
„ gothaische „	=0,95872	„ „
„ würtemberg. „	=0,95496	„ „
„ braunschw. „	=0,25120	„ „
„ frankfurter „	=0,94866	„ „
„ sächsische „	=0,94396	„ „
„ fuldaer „	=0,94293	„ „
„ darmstädter „	=0,83333	„ „

Die **Elle** würde am einfachsten zu 2 Fuss angenommen, das **Klafter** zu 6 Fuss, wie diess vielfach gebräuchlich, während die eigentliche Oberabtheilung die **Ruthe**, zu 10 Fuss, wäre. Elle und Klafter wären mehr Benennungen, wie etwa Dutzend u. s. f. in den unbenannten Zahlen. Es wäre also:

1 Ruthe = 10 Fuss,
1 Fuss = 10 Zoll, 1 deutscher Fuss = 0,3 mètres,
1 Zoll = 10 Linien, 1 Wegstunde = 1000 Ruthen,
1 Linie = 10 Punkte, 2 Wegstunden = 1 Meile.

II. Flächenmaasse.

Sie ergeben sich natürlich aus dem Längenmaass, also Quadratruthen, Quadratfuss, Quadratzoll u. s. f. 100 Quadratruthen sind 1 Acker, wovon 4 einen Morgen ausmachen.

III. Körpermaasse.

Werden eben so aus dem Längenmaasse gebildet.

IV. Flüssigkeitsmaasse.

Sie müssten für alle Flüssigkeiten dieselben sein. Als Einheit wähle man, wenn man sich von den gebräuchlichen Maassen nicht zu weit entfernen will, $1/_{20}$ Kubikfuss. Zweckmässig dürfte dafür der norddeutsche Name Kanne sein. Quart (in Berlin) ist nicht deutsch, Maass (in ganz Süddeutschland) vielleicht zu unbestimmt. Es wäre dann die Kanne = 1,35 litres. Ferner wäre.

die bayerische Maass	= 0,791	Kannen
„ hessische „	= 1,481	„
„ wiener „	= 1,048	„
„ berliner Quart	= 0,866	„
„ badische Maass	= 1,111	„
„ leipziger Kanne	= 0,891	„
„ würtemberg. Maass	= 1,360	„

10 Kannen würden sodann 1 Eimer,
10 Eimer „ „ 1 Ohm,
10 Ohm „ „ 1 Fuder

ausmachen, während die Kanne in 10 Glas getheilt wäre. Für den gewöhnlichen Gebrauch hätte die Kanne 2 Flaschen, die Flasche 2 Schoppen. Die Abtheilungen wären also:

1 Fuder = 10 Ohm,
1 Ohm = 10 Eimer,
1 Eimer = 10 Kannen,
1 Kanne = 10 Glas.

1 Kanne = 1,35 litres.

V. Getreidemaasse.

Diese fielen mit den Flüssigkeitsmaassen zusammen, wenn auch unter andern Namen. Es hiesse nämlich:

Das Glas	hier	: Becher,
die Kanne	„	: Mässchen,
der Eimer	„	: Scheffel,
das Ohm	„	: Malter,
das Fuder	„	: Zuber.

VI. Gewicht.

Als Gewichtseinheit eignet sich das halbe Kilogramm, das wohl um so eher eingeführt werden dürfte, als diese Einheit im Zollverein als „Zollpfund" schon eingeführt ist. Alsdann ist:

das bayerische Pfund	=1,12	deutsche	Pfund.	
„ hessische „	=1	„	„	
„ badische „	=1	„	„	1 D. Pf. = 0,5 kilogr.
„ österreichische	=1,1203	„	„	
„ preussische „	=0,9354	„	„	
„ sächsische „	=0,9340	„	„	
„ würtemberg. „	=0,9351	„	„	

10 Pfund würden sodann 1 Stein,
10 Stein „ „ 1 Zentner ausmachen.

Die Unterabtheilungen des Pfundes nach der Zehntheilung sind bisher nicht üblich gewesen. Sie gehören jedoch nothwendig in ein geregeltes Gewichtssystem. Die Theilung könnte folgende sein:

1 Pfund = 10 Unzen,
1 Unze = 10 Drachmen,
1 Drachme = 10 Gran.

Für den gewöhnlichen Gebrauch gäbe es ½, ¼, ⅛ Pfund, ½, ¼ und ⅛ Unzen.

VII. Münzen.

Auch hier soll der Grundsatz festgehalten werden, sich nicht zu weit von dem Bestehenden zu entfernen.. Zu diesem Zwecke

dürfte es dienlich sein, in Deutschland allgemein den 14,7 Thalerfuss einzuführen (14,7 auf die feine Mark). Dieser (deutsche) Thaler würde in 10 Zehner oder 100 Kreuzer oder 1000 Heller abgetheilt werden. Alsdann wäre:

der preussische Thaler	= 105 kr.	= 1 Thlr. 5 kr.	
„ süddeutsche Gulden	= 60 kr.	= 0,6 „	
„ Silbergroschen	= $3\frac{1}{2}$ kr.		
„ österreich. Gulden	= 72 kr. (genauer $73\frac{1}{2}$).		

Es würden somit die bestehenden (Haupt-)Münzen sich genau in den neuen angeben lassen, ja sie könnten einstweilen, theilweise als Unterabtheilungen, mit in Umlauf bleiben; so wären die $\frac{2}{3}$ Thalerstücke 70 kr., die Guldenstücke 60 kr. Für den Gebrauch würde man Stücke von 50, 10, 5 kr. in Silber prägen, während in Kupfer ausser den Kreuzerstücken, $\frac{1}{2}$ kr. zu prägen wären, die für den Verkehr ausreichen würden. Die bisherigen $\frac{1}{3}$ Thalerstücke gingen für 35 kr., die $\frac{1}{2}$ Guldenstücke für 30 kr., die 2 Fl.-Stücke würden $1\frac{1}{5}$ Thlr., die 2 Thalerstücke 2,1 Thaler gelten. An Goldmünzen würden 3, 5 und 10 Thalerstücke auszuprägen sein.

III.

Vorschläge zur allgemeinen deutschen Maass-, Gewichts- und Münzregulirung. Von Dr. G. Karsten, Professor der Physik zu Kiel. Berlin. 1848. 8. 4 Sgr.

Der Verfasser dieser Schrift will den dritten Theil der Länge des einfachen Sekundenpendels unter 45° der Breite auf 0° Temperatur, den luftleeren Raum und den Meeresspiegel reducirt, als Einheit des Längenmaasses unter dem Namen **deutscher Fuss** zu Grunde legen. Ausserdem will er überhaupt bei allen Maassen die Decimal-Eintheilung möglichst consequent durchgeführt wissen, und gebraucht z. B. bei den Längenmaassen folgende Eintheilung:

1 Linie = 10 Punkte,
1 Zoll = 10 Linien,
1 Fuss = 10 Zoll,
1 Ruthe = 10 Fuss,
1 Strecke = 10 Ruthen,
1 Stadie = 10 Strecken,
1 kleine Meile = 10 Stadien;

ferner

1 Elle = 2 Fuss,
1 Klafter = 6 Fuss,
1 grosse Meile = 2 kleine Meilen.

Im kleinen Verkehr will er noch die Rechnung nach halben und viertel Zollen, halben und viertel Fussen gestatten. Das Weitere über die andern Maasse muss man in der Schrift selbst nachsehen.

IV.

Allgemeine progressive Grund- und Einkommensteuer, gleiches Maass und Gewicht für Deutschland von L. Freiherrn von Gross, Grossherz. Sächs. Geheimen Finanzrath. Jena. 1848. 8 8 Sgr.

Wir empfehlen diese Schrift namentlich in Bezug auf ihren Hauptinhalt, und auch rücksichtlich der vom Zollverein über die Einführung allgemeiner Maasse, Münzen und Gewichte gepflogenen Verhandlungen als sehr lesenswerth und instructiv. Ueber die Maasse und Gewichte macht der Verfasser folgende Vorschläge:

Längenmaass.

1 Fuss zu 3 Dezimeter, in 12 Zoll theilbar,
1 Elle zu 6 Dezimeter (halber französischer Stab),
1 Ruthe zu 15 Fuss.

Das Meilenmaass der bekannten geographischen Meile.

Flächenmaass.

1 Quadratruthe ($^1/_5$ Are),
1 Acker zu 164 Quadratruthen ($^1/_3$ Hectare).

Körpermaass.

1 Schachtruthe zu 225 Kubikfuss,
1 Klafter zu 108 Kubikfuss (bei $3^1/_2$ Fuss Scheitlänge), 3 Kilolitre,
1 Scheffel (zu 70 Litres französisches Maass) in 4 Viertel oder 16 Metzen, jede zu 5 Maass theilbar, dessen Rauminhalt einen Zollcentner Roggen mittlerer Qualität fasst,
1 Eimer gleichen Inhalts ($^7/_{10}$ Hectolitre) zu 80 Maass oder Flaschen.

Gewicht.

Der Zollcentner (50 Kilogramme) à 100 Pfund.
Das Zollpfund zu 32 Loth à 4 Quentchen.

Die Begründung dieser Vorschläge muss man in dem Gutachten S. 35 — S. 40 selbst nachlesen. Auf S. 40 — S. 44 giebt der Verfasser ein Gutachten über einen in der Beilage zur deutschen Zeitung vom 19. Oktober 1847 gestellten Antrag von einem Herrn Henschel in Bezug auf Vereins-Maass und Gewicht.

XLV.
Literarischer Bericht.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Lehrbuch der Mathematik für den Schul- und Selbst-
nterricht von Dr. W. A. Wilde, Professor am Gymna-
ium zu Stargard. Zweiter Band. Auch unter dem Titel:
ehrbuch der Arithmetik für den Schul- und Selbst-
nterricht. Zweiter Band. Die Gleichungs-, Beziehungs-
nd Combinationslehre. Mit einer Figurentafel. Leip-
ig. 1848. 8.

Der erste und dritte Band dieses empfehlenswerthen Lehrbuches
ind im Literar. Ber. Nr. XXIV. S. 357. und Nr. XXX. S. 449.
ngezeigt worden. Was dort über seine Eigenthümlichkeit und zu
einer Empfehlung gesagt worden ist, gilt auch von dem vorlie-
enden zweiten Bande, und es genügt daher, den Inhalt dessel-
en hier anzugeben: *Gleichungslehre (Algebra).* Erster
bschnitt. Einfache Gleichungen. Anhang zum ersten Abschnitt.
Elimination). Zweiter Abschnitt. Quadratische Gleichungen.
nhang zum zweiten Abschnitt. (Kettenbrüche, unbestimmte Glei-
hungen). Dritter Abschnitt. Höhere Gleichungen. Anhang
um dritten Abschnitt. Directe Auflösung der cubischen und bi-
uadratischen Gleichungen. — *Beziehungslehre.* (Verhält-
isse, Proportionen, Logarithmen, Reihen). Vierter Abschnitt.
erhältnisse und Proportionen. Fünfter Abschnitt. Logarith-
en. Sechster Abschnitt. Reihen (Progressionen). Anhang zum
echsten Abschnitt (Zins- und Rentenrechnung. Arithmetische
eihen höherer Ordnungen). Siebenter Abschnitt. Combina-
rische Grundoperationen.

Physik.

Beiträge zur meteorologischen Optik und zu verwandten Wissenschaften. In zwanglosen Heften herausgegeben von Johann August Grunert. Erster Theil. Erstes Heft. Mit einer lithographirten Tafel. Leipzig. 1848. 8. 1 Thlr.

Ein wie wichtiger und interessanter Theil der gesammten Naturlehre die meteorologische Optik ist, scheint erst in neuerer Zeit vollständig erkannt worden zu sein, und auch der Name dieser Wissenschaft ist neu, wenn auch schon in sehr alter Zeit die Lichterscheinungen in der Atmosphäre der Aufmerksamkeit der Naturforscher sich nicht entziehen konnten, und schon sehr früh mannigfaltige Versuche zu deren Erklärung gemacht worden sind. Sehr viel ist aber in dieser Wissenschaft noch zu thun, wenn sie ihrer so sehr zu wünschenden Vollkommenheit näher geführt werden soll. Deshalb habe ich jetzt den Versuch gewagt, einen schon vor längerer Zeit gefassten Entschluss, nach mehrfacher Ueberlegung desselben, in Ausführung zu bringen, und unter dem obigen Titel eine eigne der meteorologischen Optik gewidmete Zeitschrift in zwanglosen Heften herauszugeben. Es ist eine ausführliche Ankündigung dieser Zeitschrift ausgegeben, und gewissermassen als Vorrede zu dem ganzen Werke auch dem jetzt erschienenen ersten Hefte des ersten Theils vorgedruckt worden, aus welcher die Leser des Archivs den Zweck der Beiträge zur meteorologischen Optik vollständig ersehen können. Ich bemerke daher hier nur, dass Alles, was in theoretischer oder praktischer Beziehung, also auf dem Wege analytischer Entwicklungen und geometrischer Betrachtungen, oder auf dem Wege der Beobachtung und des Versuchs, auf dem Wege historischer und antiquarischer Untersuchungen, so wie auch durch populäre Darstellungen, zur Förderung der meteorologischen Optik beitragen kann, in den Kreis der neuen Zeitschrift gezogen werden soll. Von den eigentlichen atmosphärischen Lichterscheinungen gehören also u. A. hierher: die Durchsichtigkeit der Atmosphäre; die Bläue des Himmels; die Morgen- und Abendröthe, überhaupt die verschiedene Färbung des Himmels; die scheinbare Gestalt des Himmelsgewölbes; die verschiedene Grösse und Gestalt der Sonne und des Monds in verschiedenen Höhen über dem Horizonte; die Dämmerung und was damit zusammenhängt; der Polarisationszustand der Atmosphäre; die sogenannten Rayons crépusculaires und die Bandes polaires; das sogenannte Wasserziehen der Sonne; der Regenbogen, natürlich auch der Mondregenbogen; die kleineren und grösseren Höfe, die Nebensonnen und Nebenmonde, so wie die für diese Lehre sehr wichtige Krystallisation des Eises; das Funkeln der Sterne; die Luftspiegelung; die terrestrische und astronomische Strahlenbrechung im weitesten Umfange; der in vielen Beziehungen so wichtige Zusammenhang der atmosphärischen Lichterscheinungen mit den übrigen meteorologischen Er-

scheinungen; die atmosphärischen Lichterscheinungen als Vorboten des Wetters; und manches Andere, was hier nicht alles namhaft gemacht werden kann. Ausser diesen eigentlichen atmosphärischen Lichterscheinungen sollen aber auch noch manche andere Phänomene, welche mit Lichterscheinungen am Himmel verbunden sind, wie z. B. das Nordlicht, das noch sehr in Dunkel gehüllte Zodiakallicht, selbst auch, wenigstens zum Theil, die Sternschnuppen und Feuerkugeln, in den Kreis der neuen Zeitschrift gezogen werden, um an einem und demselben Orte Vieles zu vereinigen, was sonst nur an verschiedenen Orten sehr zerstreut angetroffen wird.

So wie schon in der besonders ausgegebenen Ankündigung erlaube ich mir nun auch hier die geehrten Leser des Archivs aufzufordern, mich durch recht viele Beiträge zu der neuen, der meteorologischen Optik vorzugsweise gewidmeten Zeitschrift, sei es durch theoretische Abhandlungen, oder durch Mittheilung von Beobachtungen, bei denen besonders auch, wo es die Natur des Gegenstandes und die Verhältnisse gestatten, auf sorgfältige Messungen Rücksicht zu nehmen sein möchte, auf welche genaue Rechnungen gegründet werden können, ferner durch populäre Aufsätze oder durch historische Untersuchungen, bei der Herausgabe der Zeitschrift zu unterstützen, wobei ich zugleich bemerke, dass, was mir in fremden Sprachen als Originalabhandlung mitgetheilt wird, in der Regel auch in derselben Sprache in die Zeitschrift aufgenommen werden wird, wodurch aber Uebersetzungen aus neu erscheinenden ausländischen Werken natürlich nicht ausgeschlossen werden.

Das vorliegende erste Heft des ersten Theils enthält eine theoretische Abhandlung über den Regenbogen und einige Bemerkungen über die Krystallisation des Eises von dem Herausgeber der Zeitschrift. In der Abhandlung über den Regenbogen ist die Theorie dieser prachtvollen Erscheinung auf einem mehr elementaren geometrischen Wege, und auch mit Anwendung der durch die analytische Geometrie dargebotenen Hülfsmittel dargestellt, und namentlich ist dabei auch die bekanntlich in einer besondern Beziehung wichtige elliptische Gestalt der Tropfen ausführlich berücksichtigt worden. Vielleicht dürfte auch die vollständige Auflösung der in der Theorie des Regenbogens vorkommenden cubischen und biquadratischen Gleichungen im ersten Theile der Abhandlung ein besonderes Interesse darbieten. Den noch nicht ganz vollständig und einleuchtend erklärten überzähligen oder sekundären Bogen ist besondere Aufmerksamkeit geschenkt, und die verschiedenen Erklärungsweisen derselben sind vollständig angeführt worden; für den von dem Herausgeber selbst aufgestellten Erklärungsversuch dieser überzähligen Bogen nimmt derselbe die besondere Nachsicht der Leser in Anspruch und bittet zugleich, die Hauptabsicht bei diesem Erklärungsversuche nicht zu verkennen, welche darin bestand, die Newton'sche Theorie des Regenbogens auf eine so vollständige und consequente Weise wie möglich durchzuführen, ohne zu ganz neuen, dieser Theorie an sich fremden Hülfsmitteln bei der Erklärung des Regenbogens seine Zuflucht nehmen zu müssen.

Ich würde mich sehr freuen, wenn es auch dieser neuen Zeitschrift gelingen sollte, sich die Theilnahme und das Interesse des betreffenden Publikums bald zu erwerben.

Der Preis eines aus vier Heften bestehenden Bandes wird 3 Thlr. nicht übersteigen. Gr.

Vermischte Schriften.

In Mager's Pädagogischer Revue. Neunter Jahrgang. Band XVIII. XIX. XX. April 1848. Nro. 4. S. 226 ff. findet sich die erste Abtheilung einer Abhandlung, welche überschrieben ist: „Ueber die sogenannten organisch-wissenschaftlichen Lehrgebäude der Elementar-Mathematik, welche der Herr Prof. Reuter zu Aschaffenburg nun schon seit geraumer Zeit erfunden, und zur wahren Heilsförderung des Unterrichts in wenigstens 24 Heften der Neuen Jahrbücher für Philologie und Pädagogik nicht bloss auf das Deutlichste beschrieben, sondern auch auf das Angelentlichste der allgemeinen Beachtung empfohlen hat. Von Professor Grabow in Kreuznach." — Es wäre zu wünschen, dass noch manchen andern mathematischen Recensionsfabriken und Recensionsfabrikanten eine gleiche Abfertigung zu Theil werden möchte.

Die Jahrbücher für Wissenschaft und Leben. Herausgegeben von Dr. Ludwig Noack. Der Jahrbücher für speculative Philosophie dritter Jahrgang. 1848. 1. Heft. Januar. Darmstadt. 1848. enthalten S. 5 — S. 20. den Anfang eines sehr lesenswerthen Aufsatzes von Herrn Prof. Dr. Reuschle, welcher die Ueberschrift führt: „Kepler, Probe einer philosophischen Lebensskizze."

Berichtigung.

Von dem geehrten und höchst einsichtsvollen Recensenten meiner im Liter. Ber. Nr. XLII. S. 602. angezeigten Schrift: „Ueber die mittlere Entfernung einer Figur von einem Punkte" in den Heidelberger Jahrbüchern. 1848. Mai und Juni. S. 459. bin ich auf ein Paar Druckfehler (oder vielmehr Schreibfehler) aufmerksam gemacht worden, die ich hier mit dem schuldigsten Danke für den Herrn Recensenten, zur Kenntniss der geehrten Leser des Archivs bringe:

S. 72. Z. 8. v. u. statt „der Spitze $\mathfrak{A}$" und „Gegenseite" s. m. „dem Punkte O" und „Seite"; S. 73. Z. 3. v. o. statt „der Spitze $\mathfrak{B}$" und „Gegenseite" s. m. „dem Punkte O" und „Seite"; S. 73. Z. 13. v. o. statt „der Spitze $\mathfrak{C}$" und „Gegenseite" s. m. „dem Punkte O" und „Seite"; S. 75. Z. 8. v. o. statt „ersten" s. m. „letzten"; S. 75. Z. 10 v. o. statt „$E_b,\mathfrak{B}$" s. m. „$E_a,\mathfrak{B}$".

XLVI.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Der Lebensvertrag. Zwei neue Sätze und fünf und zwanzig neuberechnete Lebenstafeln. Von Dr. M. G. von Paucker. Besonderer Abdruck aus dem III. Heft der Kurl. Gesellschaft für Literatur und Kunst. Mitau. 1847. 8.

Diese kleine Schrift scheint uns aus mehreren Gründen eine allgemeinere Beachtung und Verbreitung sehr zu verdienen:

1) weil die betreffenden Rechnungen sämmtlich ohne Hülfe von Formeln und algebraischen Entwickelungen, bloss mit Hülfe der gemeinen Arithmetik in derselben auszuführen gelehrt werden;

2) wegen der ihr angehängten neu berechneten sehr zweckmässigen und die Rechnungen wesentlich erleichternden Tafeln;

3) weil in derselben die Einrichtung oder die Statuten einer grossen Anzahl „**Baltländischer Lebensstiftungen**“ die als Vorbilder für ähnliche Stiftungen dienen können, mitgetheilt werden.

Jedenfalls hat sich der Herr Verfasser um die betreffenden Anstalten und solche, die mit der Einrichtung von Lebensstiftungen sich zu beschäftigen beabsichtigen, ein Verdienst erworben, und machen wir daher die Leser des Archivs recht sehr auf dieselbe aufmerksam.

Geometrie.

Lehrbuch der Elementargeometrie, mit einer Sammlung von Aufgaben von F. Rummer, Hauptlehrer an der höhern Bürgerschule und an der Gewerbschule zu Heidelberg. Erster Theil. Ebene Geometrie. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Heidelberg. 1848. 8. 14 Sgr.

Dieses deutlich und zweckmässig verfasste Elementarlehrbuch ist aus seiner ersten Auflage hinreichend bekannt.

Die merkwürdigen Punkte des Dreiecks mit Rücksicht auf harmonische Theilung. Eine reiche Fundgrube von Uebungsaufgaben aus der construirenden Geometrie, ebenen Trigonometrie und Algebra. Von Dr. August Wiegand. Zweite, gänzlich umgearbeitete und vermehrte Auflage. Halle. 1848. 8. 15 Sgr.

Jeder Mathematiker weiss, wie viele interessante Beziehungen die sogenannten merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks darbieten. Es war daher ein glücklicher Gedanke des Herrn Verfassers, diese ganze Lehre in systematischem Zusammenhange ausführlich zu bearbeiten, und dadurch zugleich ein System höchst zweckmässiger Uebungsaufgaben für die auf dem Titel genannten Theile der Wissenschaft aufzustellen. Die Ausführung dieses Gedankens von Seiten des Herrn Verfassers lässt nichts zu wünschen übrig, und die verschiedenen Aufgaben sind oft mit besonderer Eleganz behandelt; zugleich ist, wenn auch vorzugsweise die trigonometrische und algebraische Methode, die der Herr Verfasser in dieser Schrift mit vorzüglichem Geschick und oft auf sehr einfache und elegante Weise handhabt, Anwendung gefunden zu haben scheinen, für möglichste Abwechselung der Methoden gesorgt worden, so dass wir diese Schrift, so wie zu allgemeiner Berücksichtigung in Bezug auf ihren interessanten Inhalt an sich, namentlich auch allen denen sehr empfehlen, welche sich in der feineren Geometrie zu üben beabsichtigen. Der Inhalt in einem nur ganz allgemeinen Umrisse ist folgender:

I. *Die merkwürdigen Punkte des gleichschenkligen Dreiecks.* **Erster Abschnitt.** Vier merkwürdige Punkte. Kap. I. Einleitende Bemerkungen über die Reihenfolge der merkwürdigen Punkte. Kap. II. Trigonometrische Bestimmung der Abstände der merkwürdigen Punkte von einander und von den Höhenpunkten. Kap. III. Bestimmung der Abstände der merkwürdigen Punkte von einander und von den Höhenpunkten durch Höhe und Seiten. Kap. IV. Die merkwürdigen Punkte und die Höhenpunkte als harmonische Punkte. **Zweiter Abschnitt.**

Sieben merkwürdige Punkte. Kap. I. Gegenseitige Lage und Abstände. Kap. II. Neue Gruppen harmonischer Punkte. Kap. III. Schlussbetrachtungen. **Dritter Abschnitt. Neun Punkte.** Kap. I. Der Mittelpunkt des Kreises, welcher die Seiten halbirt. Kap. II. Der Mittelpunkt der Höhe. — II. *Die merkwürdigen Punkte des ungleichseitigen Dreiecks.* **Vierter Abschnitt.** Kap. I. Vorbereitung. Kap. II. Harmonische Strahlenbüschel.

Die äussere Ausstattung ist in jeder Beziehung vorzüglich.

Möchte es doch dem Herrn Verfasser gefallen, auch die merkwürdigen Punkte des sphärischen Dreiecks in ähnlicher lehrreicher Weise zu behandeln.

Das Malfattische Problem, algebraisch gelöst von C. Adams. Programm der Gewerbschule zu Winterthur für das Schuljahr 1848. Winterthur. 1848. 4.

Der Herr Verfasser hat sich schon durch eine frühere, im Literar. Bericht Nr. XXX. S. 451. angezeigte Schrift um das Malfatti'sche Problem verdient gemacht, in welcher er namentlich eine neue einfache Construction dieser Aufgabe nebst deren vollständiger Analysis mittheilte. Das Malfatti'sche Problem ist indess bis jetzt überhaupt, und auch von dem Herrn Verfasser in seiner früheren Schrift, zu einseitig aufgefasst worden, indem sich die Auflösung auf den einzigen Fall, wo die Seiten des Dreiecks selbst, nicht ihre Verlängerungen berührt werden, beschränkt. Lässt man jene Verallgemeinerung zu, wie es dem Geiste der neueren Geometrie durchaus gemäss ist, so giebt es nicht nur einen, es giebt sechzehn verschiedene Fälle der Lösung. In diesem umfassenden Sinne die Aufgabe zu behandeln, ist der Zweck der vorliegenden Abhandlung, welche daher als ein Supplement zu der früheren Abhandlung des Herrn Verfassers über denselben Gegenstand zu betrachten ist. Für alle diejenigen Leser, welche mit den früheren ausgezeichneten geometrischen Schriften des Herrn Verfassers bekannt sind, brauchen wir nicht noch zu bemerken, dass auch diese neue Schrift durch Einfachheit und Eleganz der Darstellung und der Entwickelungen, so wie durch Eigenthümlichkeit, welche überall dem Gegenstande neue Seiten abzugewinnen versteht, sich auszeichnet, und empfehlen dieselbe allen denen, welche sich für die feinere Geometrie interessiren, angelegentlichst zur sorgfältigsten Beachtung.

Cubaturen durch elementare Summationen. Eine Abhandlung von Dr. E. A. Wolfram, K. Lehrer der Mathematik an der technischen Anstalt zu Hof. Hof. 1848. 8. 6 Sgr.

Wir haben in diesem Schriftchen nicht eben etwas Neues gefunden, indem alle Cubaturen sich auf die Summirung der Potenzen der natürlichen Zahlen gründen, was bekanntlich eine schon oft angewandte Methode ist. Weil jedoch auch Körper vorkommen, die nicht in die gewöhnlichen Elemente gehören, so mag die Schrift für manche Leser lehrreich sein. Die behandelten

Körper sind: Rotationskörper im Allgemeinen, Kegel, Kugelsegment, Appollonisches Rotationsparaboloid, Cubisches Rotationsparaboloid, Rotationsellipsoid, Rotationshyperboloid, Pyramide.

Analytische Geometrie in der Ebene und im Raume nebst der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Von Lefebure de Fourcy. Nach der fünften Original-Auflage ins Deutsche übertragen von Fr. Gruner, Hauptlehrer an der K. Realanstalt in Stuttgart. Stuttgart 1848. 8. 1 Thlr. 21 Sgr.

Ein in Frankreich sehr beliebtes Lehrbuch, was eine Uebertragung in's Deutsche wohl verdiente. Die Uebersetzung und äussere Ausstattung lassen nichts zu wünschen übrig. Dass der Herr Uebersetzer in der sphärischen Trigonometrie die Gaussischen Gleichungen beifügte, verdient Anerkennung. Den schönen Lehrsatz von Cauchy über die Anzahl der zwischen gegebenen Gränzen liegenden imaginären Wurzeln einer Gleichung (m. vrgl. Archiv. Theil I. S. 19.), welcher seine Entstehung geometrischen Betrachtungen verdankt, so wie überhaupt Vieles über die trigonometrische Auflösung der Gleichungen, hat Herr Lefebure de Fourcy auch in dieses Werk aufgenommen, was demselben jedenfalls zu besonderer Empfehlung gereichen wird.

Praktische Geometrie.

Die Elemente der Geometrie und deren praktische Anwendung für den Bürger und Landwirth. Nach einer veranschaulichenden Methode bearbeitet von Dr. Aug. Wiegand, Königl. Oberlehrer an der Realschule zu Halle. Mit vielen in den Text eingedruckten Holzschnitten. Halle. 1848. 8. 10 Sgr.

Der geodätische Messapparat und sein Gebrauch. Ein Hülfsmittel beim Vortrage der Geometrie auf höheren Lehranstalten zur Hinweisung auf die praktische Anwendung dieser Wissenschaft. Von Dr. Aug. Wiegand, Königl. Oberlehrer an der Realschule zu Halle. Halle. 1848. 8. 6 Sgr.

Diese beiden in gewisser Beziehung zusammengehörenden und sich gegenseitig ergänzenden Schriften entsprechen ihrem auf dem Titel genannten Zwecke recht wohl. In der zweiten Schrift möchten freilich die Holzschnitte etwas besser sein, was jedoch natürlich nicht Schuld des Herrn Verfassers ist. Dass derselbe in der zweiten Schrift auch die Messinstrumente des bekannten Pastors Rommershausen beschrieben hat, ist ganz recht und zweckmässig, da diese Instrumente meistens sinnreich eingerich-

tet sind und eine weitere Verbreitung wohl verdienen; jedoch darf man von denselben, wie uns selbst die Erfahrung gelehrt hat, ja nicht mehr verlangen, als sie zu leisten im Stande sind, was namentlich von dem sonst ganz sinnreich eingerichteten Spiegelniveau gilt.

Die Instrumente und Werkzeuge der höheren und niederen Messkunst, so wie der geometrischen Zeichnenkunst, ihre Theorie, Construction, Gebrauch und Prüfung. Zum Unterricht und Selbststudium bearbeitet von C. F. Schneitler, Civ.-Ingenieur. Mit 213 Figuren in Holzschnitt. Leipzig. 1848. 8. 1 Thlr. 12 Sgr.

Es war jedenfalls ein sehr glücklicher Gedanke, einmal eine vollständige Beschreibung aller in der niederen und höheren Messkunst (Geodäsie mit Einschluss der Markscheidekunst und selbst auch der wichtigsten nautischen Instrumente) zur Anwendung kommenden Instrumente zu liefern und Anleitung zu deren Gebrauch und Berichtigung in systematischem Zusammenhange zu geben, nach dem gegenwärtigen Zustande der Kunst und der Wissenschaft, gewissermassen eine neue Ausgabe von der zu ihrer Zeit in grosser Achtung stehenden Mathematischen Werkschule von Bion, 3. Aufl. von J. G. Doppelmayr. 3 Thle. Nürnberg. 1726. 4., und einiger anderen ähnlichen Werke, deren Anzahl jedoch nicht gross ist, an's Licht zu stellen. Auch können wir dem Herrn Verfasser aus Ueberzeugung das Zeugniss geben, dass er sich seiner Aufgabe mit vollkommener Sachkenntniss und auf eine wahrhaft praktische Weise unterzogen hat; die Verlagshandlung aber hat rücksichtlich der Ausstattung, namentlich auch rücksichtlich der trefflichen Holzschnitte, 213 an der Zahl, Alles gethan, was man nur verlangen und erwarten kann, so dass in dieser Beziehung kaum etwas zu wünschen übrig bleiben dürfte. Wir halten daher dieses Buch für ein einem jeden Geodäten nicht bloss nützliches, sondern geradezu unentbehrliches Buch, und empfehlen es der sorgfältigsten und allgemeinsten Beachtung. Leider müssen wir uns hier mit der folgenden nur oberflächlichen Angabe des Inhalts begnügen, der wir nachher noch einige wenige Bemerkungen beifügen wollen:

Einleitung. I. Die Instrumente und Werkzeuge. A. Die Instrumente und Werkzeuge zum Messen und Abstecken. B. Die Instrumente zum Abstecken und Messen horizontaler Winkel. C. Instrumente zum Messen vertikaler Linien und Winkel. D. Instrumente zum Bestimmen horizontaler Richtungen und Ebenen oder Nivellir-Instrumente. E. Instrumente und Hülfsmittel zur graphischen Darstellung oder geometrischen Zeichnung des Gemessenen. II. Die Conservation der Instrumente. Anhang I. Die Preise der Instrumente und Werkzeuge der gesammten Messkunst. II. Tabelle der bekanntesten Längenmaasse.

In dem Abschnitte A. hätte der Herr Verfasser immer auch das zwar sehr einfache, aber für die Schifffahrt höchst wichtige Log (oder die Logge) nach seiner gewöhnlichen und nach der verbesserten Einrichtung von Bouguer beschreiben können. In

dem die Theodoliten betreffenden Abschnitte haben wir ungern eine vollständige bildliche Darstellung der trefflichen und auch in ihrem äusseren Bau höchst eleganten Theodoliten von Pistor (oder Reichenbach) vermisst; auch hätte in diesem Abschnitte wohl etwas über die Theodoliten mit sogenanntem gebrochenen Fernrohre gesagt und eine Abbildung eines solchen Instruments gegeben werden sollen, da dergleichen Instrumente allerdings verschiedene eigenthümliche Bequemlichkeiten darbieten, welche andere Instrumente nicht in gleichem Maasse zu gewähren im Stande sind. Dass der Herr Verfasser den Reflections-Instrumenten besondere Aufmerksamkeit gewidmet hat, verdient alle Anerkennung; jedoch hätten wir neben der Beschreibung der neuen Pistor'schen patentirten Reflections-Instrumente auch eine Beschreibung der Steinheil'schen Prismenkreise zu finden gewünscht. Dass bei den Nivellir-Instrumenten nicht ausführlich auf die trefflichen, aus dem Wiener polytechnischen Institute hervorgehenden Nivellir-Instrumente, und deren eigenthümlichen Gebrauch, worüber man alles Erforderliche in der Theoretischen und praktischen Anleitung zum Nivelliren. Von S. Stampfer. Zweite Auflage. Wien. 1847. findet, Rücksicht genommen worden ist, halten wir für einen wesentlichen Mangel des vorliegenden, sonst, wie schon gesagt, in vieler Beziehung sehr zu empfehlenden Buchs; auch wäre in diesem Kapitel wohl etwas über die sogenannten Kollimatoren, welche überhaupt grössere Berücksichtigung verdienen dürften, als sie bis jetzt gefunden zu haben scheinen, zu sagen gewesen. Ueberhaupt hat sich der Herr Verfasser vorzugsweise an die Constructionen des Herrn Breithaupt in Kassel, dessen Preisverzeichniss auch am Ende des Buchs mitgetheilt ist, gehalten, die zwar wegen der Wohlfeilheit und der meist zweckmässigen Anwendung der durch dieselben hergestellten Instrumente in der Praxis bei den Geodäten mit Recht sehr beliebt, aber doch nicht überall so vortrefflich sind, dass sie nicht von anders construirten Instrumenten in mehreren Fällen übertroffen werden dürften. Endlich hätten wir noch gewünscht, dass der Herr Verfasser den einzelnen Instrumenten noch hin und wieder eine schärfere Kritik und genauere Angaben und Bestimmungen über das, was dieselben zu leisten vermögen, beigefügt hätte, da namentlich darin von angehenden Praktikern häufig gefehlt wird, dass sie von einem Instrumente zuweilen mehr verlangen, als es seiner Einrichtung nach zu leisten im Stande ist, im Gegentheil aber auch durch nicht ganz richtigen Gebrauch aus der Anwendung eines Instruments nicht alle diejenigen Vortheile ziehen, die es bei ganz richtigem Gebrauche zu gewähren geeignet ist.

Aber abgesehen hiervon, wiederholen wir hier nochmals das im Eingange ausgesprochene günstige Urtheil über das vorliegende, gewiss einem Zeitbedürfnisse abhelfende Buch, und empfehlen es namentlich angehenden Praktikern, die oft in ihrer Lernzeit weiter nichts als eine Messkette und eine gewöhnliche Boussole mit Dioptern, kommts hoch einen einfachen Messtisch und ein halbkreisförmiges Astrolabium und etwa eine Kanal- oder Keith'sche Quecksilberwage zu sehen bekommen, zur sorgfältigsten Beachtung und eifrigsten Benutzung; denn gerade für solche junge Praktiker, die zu einem Conducteur in die Lehre gehen, wird dieses

Buch gewiss sehr nützlich sein, und zu der sehr zu wünschenden Verbreitung einer grösseren Instrumental-Kenntniss wesentlich beitragen.

Astronomie.

Beiträge zur Dynamik des Himmels in populärer Darstellung von Dr. J. R. Mayer, Stadtarzte in Heilbronn. Heilbronn. 1848. 8. 16 Sgr.

Diese Schrift beschäftigt sich mit der Beantwortung der Frage: „Wodurch wird die Sonne, die auf eine so grossartige und herrliche Weise die Räume des Weltalls mit ihren Strahlen erfüllt, in ewig ungeschwächter Kraft und Jugend erhalten? Wodurch wird einer endlichen Erschöpfung, einem Zustande des Gleichgewichts vorgebeugt, damit nicht Nacht und Todeskälte die Räume des Planetensystems erfülle? — Dieselbe zeugt von Kenntnissen und besonnener ruhiger Betrachtung, und verdient wohl gelesen zu werden, wenn man auch nicht überall mit dem Herrn Verfasser von einerlei Meinung sein sollte.

Bahnbestimmung des von de Vico am 24. Jänner 1846 entdeckten Cometen. Von Dr. C. Jelinek, Adjunkten der k. k. Sternwarte (zu Prag) und ausserordentlichem Mitgliede der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 4.

Eine sehr fleissige Berechnung des auf dem Titel genannten Cometen, mit sorgfältiger Benutzung aller vorhandenen Beobachtungen, und geführt nach den neuesten und schärfsten Rechnungsmethoden.

Nautik.

(Bei dem neuen Aufschwunge, welchen, so wie die praktische, auch die wissenschaftliche Nautik jetzt nothwendig nehmen muss und wird, halte ich es für nöthig und zeitgemäss, in den Lit. Ber. eine eigene, derselben gewidmete Rubrik aufzunehmen, und bemerke zugleich, dass es mir sehr angenehm sein wird, wenn mir dazu befähigte Männer Aufsätze über die verschiedenen Theile der Nautik, auch über Schiffsbaukunst u. drgl.,

für das Archiv zuzusenden die Güte haben, welche immer bereitwillige und baldige Aufnahme finden werden. Gelingt es übrigens, einen Verleger und eine hinreichende Anzahl von Mitarbeitern für ein eigenes der Nautik in ihrer weitesten Bedeutung gewidmetes Journal zu gewinnen, so werden solche Beiträge dann am besten dieser neuen Zeitschrift zugewiesen werden.)

Mein hochverehrter Freund, der Director der Hamburger Sternwarte und der dortigen Navigations-Schule, Herr C. Rümker, hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass die im 11ten Theile des Archivs S. 56. von Herrn Doctor M. A. F. Prestel in Emden mitgetheilte Auflösung der beim rechtwinklichten sphärischen Dreieck vorkommenden Aufgaben, vermittelt durch das sphärische Fünfeck, im Wesentlichen ganz mit der in seinem ausgezeichneten Handbuche der Schifffahrtskunde. Vierte Auflage. Hamburg 1844., welches den Lesern des Archivs aus der im Liter. Bericht. Nr. XXII. S. 340. gelieferten, ziemlich ausführlichen Anzeige hinreichend bekannt ist, auf S. 28. ff. gegebenen Ableitungsweise übereinstimme. Ich muss die Richtigkeit dieser Bemerkung des Herrn Director Rümker vollkommen anerkennen und würde dem Aufsatze des Herrn Dr. Prestel, der übrigens eine längere Zeit bei mir auf den Abdruck gewartet hatte, gewiss die Aufnahme in das Archiv versagt haben, wenn mir die von Herrn Director Rümker in Anregung gebrachte nahe Uebereinstimmung desselben mit seiner Arbeit beim Abdruck aufgefallen wäre. Wenigstens wäre es jedenfalls meine Pflicht gewesen, vor dem Abdruck an Herrn Dr. Prestel und Herrn Director Rümker zu schreiben, und um nähere Aufklärung des Sachverhältnisses zu bitten. Ich kenne das treffliche Werk des Herrn Director Rümker namentlich in seinem eigentlichen nautischen und astronomischen Theile sehr genau und ziehe es häufig bei eignen Arbeiten zu Rathe; dass mir aber die Vorbereitungslehren aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie nicht so häufig wieder vor die Augen kommen, werden die Leser des Archivs und der Herr Director Rümker auch selbst gewiss begreiflich finden, und mich deshalb wohl einigermassen entschuldigen, wenn ich die Pflichten eines Redacteurs eines Journals im vorliegenden Falle nicht vollständig erfüllt habe. Jedenfalls wird es am besten sein, dass ich den von Herrn Director Rümker in dieser Angelegenheit an mich gerichteten Brief, so weit er hierher gehört, im Nachfolgenden abdrucken lasse.

G.

„Ich wollte es Ihrer gefälligen Beurtheilung anheim stellen, ob der Dr. Prestel Seite 56 im ersten Hefte des eilften Theiles des Archiv's der Mathematik und Physik über die rechtwinklige sphärische Trigonometrie etwas gesagt, oder es besser gesagt hat als es zuvor von mir Seite 28. im Handbuche der Schifffahrtskunde, welches ich Ihnen zu überreichen die Ehre hatte, gesagt ist. Das Beste ist, dass Herr Dr. Prestel auch meine Abänderungen in den Neper'schen Original-Regeln getreu nachgeahmt hat. Dass er mein Buch gelesen, beweisen seine Briefe an mich.

Wenn Herr Dr. Prestel keinen Werth auf den von mir zuerst geführten Beweis setzte, so hätte er Ihnen denselben nicht anbieten dürfen, und wenn er Werth darauf setzte, so war es unrecht, dass er sich denselben zuzueignen suchte, welches übrigens nicht das erste Mal ist; in seiner Trigonometrie für Ingenieure etc. finden Sie mehr dergleichen. Bei Compilationen ist mir dies gleichgültig.

Da sich der Herr Doctor aber durch einen Aufsatz in Ihrem Journale offenbar das Eigenthumsrecht anmasset, so ist mir der Verdacht, als ob ich in der jetzt unter einem späteren Datum erscheinenden neuen Auflage des Handbuches den Herrn Doctor benutzen wollte, eben nicht gleichgültig.

Mich in einen Federkrieg einzulassen, habe ich keine Zeit und keine Lust. Wenn Sie vielleicht bei passender Gelegenheit darauf hinweisen wollten, dass die von dem Baron Neper entdeckte Eigenschaft der rechtwinkligen sphärischen Trigonometrie, dass alle darin vorkommenden Fälle sich durch zwei einfache symmetrische Regeln auflösen lassen, lange eines allgemeinen Beweises entbehrt hat, und dass ein solcher in meinem Handbuche zu finden ist, so würden Sie mich ganz befriedigen*).

Hamburg. Aug. 2. 1848.

Ausser dem Abdruck dieses Briefes halte ich mich noch verpflichtet, einen zweiten Brief des Herrn Director Rümker, welcher hauptsächlich die vom Herrn Dr. Prestel in Emden herausgegebene Trigonometrie betrifft, hier vollständig abdrucken zu lassen, und entnehme die Erlaubniss hiezu einem anderweitigen Briefe des Herrn Director Rümker vom 17. October 1848, in welchem er sich ausdrücklich dahin ausspricht, „dass es keineswegs seine Absicht sei, in dieser Streitsache anonym zu bleiben“, und „dass er es allein mir überlasse, das von ihm Gesagte dem Raume, den ich daran wenden wolle, anzupassen“, worüber ich bemerke, dass es mein fester Grundsatz ist, in Fällen wie der vorliegende durchaus nichts nur einigermassen Wesentliches wegzulassen oder selbst Etwas hinzuzuthun, was ich nicht vollkommen verantworten zu können glauben darf. Am allerwenigsten darf ich dies aber im vorliegenden Falle thun, wo die Streitfrage die Rechte eines Mannes betrifft, dessen Charakter als im höchsten Grade ehrenwerth und anspruchslos allgemein bekannt ist, und der mir selbst, wenn wir uns auch leider noch nicht persönlich kennen, schon sehr viele Beweise wahrer Freundschaft und im höchsten Grade ehrenwerther Gesinnung gegeben hat. Indem ich nun in Bezug auf den folgenden Brief noch bemerke, dass ich selbst die Trigonometrie des Herrn Doctor Prestel nicht besitze und mir dieselbe von dem Herrn Verfasser auch nicht zugesandt worden ist, lasse ich den Brief des Herrn Director Rümker vollständig folgen.

„Ich danke Ihnen sehr für Ihren gütigen Brief, und darin ausgesprochenes Versprechen. Sobald meine jetzt mit zu viel

---

*) Dieser letzte Wunsch des Herrn Director Rümker erledigt sich durch den Abdruck seines Briefs von selbst. G.

Geschäften überladene Zeit es gestattet, will ich an den Vorschlag, eine nautische Zeitschrift herauszugeben, oder doch wenigstens Antheil daran zu nehmen, namentlich wenn Sie sich dabei betheiligen wollten, denken.

Vielleicht hat der Herr Dr. Prestel Ihnen auch seine Trigonometrie zugesandt, welche er der Hannöverschen Regierung statt meines Handbuches zur Einführung in den Hannöverschen Navigations-Schulen vorgeschlagen hat. Nun wollte ich Sie bitten nur einen Blick auf die folgenden Gegenstände zu werfen.

Seite 34 etc..... Uebungs-Aufgaben, wo Längen- und Bogenmaass unverständlich durch einander gemengt.

Den Beweis von

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a+b+c)\,(b+c-a)}{4bc}}$$

aus der Figur hat er mit der von mir zuerst gegebenen Figur Seite 14. meines Handbuches entlehnt, aber durch Fehler entstellt. Abgesehen von den die Grösse der Sinusse und Cosinusse der Summe und Differenz der Winkel, und $\sin 2a$— u. s. w. $1-\cos a$.. betreffenden Sätzen sind bis dahin wenige von den Gleichungen unter den trigonometrischen Hülfslinien synthetisch durch die Figur bewiesen gewesen. Sie werden wissen, dass ich dies Seite 6, 7, 8 meines Handbuches durch die Figuren, welche ich Raum-Ersparniss halber in einer einzigen Figur Seite 6 zusammengestellt habe, allemal unter dem analytischen Beweise synthetisch in den Nrn. (8), (9), (10), (11) ......(32) ausgeführt. Herr Dr. Prestel hat die Figuren und Beweise, so weit er es konnte, getreu benutzt.

In seiner Figur 21 ist

Dreieck *CBJ* identisch mit meinem *EBP* Seite 6.
„ *B'DJ* „ „ „ *UGB*

und der Beweis derselbe.

Figur 20 sein Dreieck *AFB* identisch mit meinem *EGB*,
„ 22 „ „ *B'OB* „ „ „ *FCB*;

und so durchgehends Figuren und Beweise dieselben.

Ich habe die zwischen den Segmenten der anliegenden und gegenüberliegenden Winkel und Seiten des durch einen Perpendikel von der Spitze auf die Grundlinie getheilten schiefwinkligen sphärischen Dreiecks stattfindenden Gleichungen anderweitig nicht so zusammengestellt gesehen wie ich es Seite 42 gethan habe. Der Herr Dr. Prestel hat es aber getreu befolgt. Aber mit welchem Erfolg!!

Seite 60 statt $\operatorname{cosec} a^2 = 1 \operatorname{cotg} a^2$ lies $\operatorname{cosec}^2 a = 1 + \operatorname{cotg}^2 a$.

„ 61 „ $\sqrt{1} + \operatorname{tg} a$ lies $\sqrt{(1+\operatorname{cotg}^2 a)}$.

N(12) Seite 61 statt $\cot g\, a = \sqrt{\operatorname{cosec} a^2}$ lies $\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 a - 1)}$.

N(13) „ 61 „ $\frac{1}{\sqrt{1 - \sin a^2}}$ lies $\frac{1}{\sqrt{(1 - \sin^2 a)}}$.

N(25) „ 63 „ $\cot g^2 a$ lies $\cot g\, a$.

N(31) „ 63 „ $\cos \frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{1 + \cos a}}{2}$ lies $\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$.

Seite 66 Zeile 5 ist in $DP = BO \sin b$ der Nenner 2 ausgelassen.

„ 67 Zeile 7 statt $\sin CIB^2 \sin \frac{1}{2}(a+b)$ lies $\sin CIB' = \sin \frac{1}{2}(a+b)$.

„ 71 Zeile 2 statt $\frac{\sin a + \sin b}{\sin a + b}$ lies $\frac{\sin a + \sin b}{\sin (a+b)}$.

„ 80 Zeile 11 statt $KA = KA \cos b$ lies $KC = KA \cos b$.

„ 75 Formel 53 ein $\cos a$ zu viel.

„ 76 Formel 56 statt $\sin a + b$ lies $\sin (a + b)$.

„ 76 Formel 55 statt $\sin a - b$ lies $\sin (a - b)$.

„ 76 statt Formel 5 lies (57).

„ 83 Zeile 15 von unten statt $\sin (90 - c) \sin (90 - c)$ lies $\sin (90 - b) \sin (90 - c)$.

„ 132 Zeile 4 von unten statt $\cos 2a = \cos^2 a - \cos^2 a$ lies $\cos^2 a - \sin^2 a$.

„ 132 Zeile 3 von unten soll heissen: „wenn man $2a = A$ und $a = \frac{A}{2}$ setzt.

„ 133 Zeile 12 von oben statt $\cos^3 a - 3 \cos a \sin a$ lies $\cos^3 a - 3 \cos a \sin^2 a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$.

„ 133 Zeile 19 von oben statt $\cos 4a = \cos^4 a - b \sin^2 a \cos^2 a + \sin^4 a$ lies $\cos 4a = \cos^4 a - 6 \sin^2 a \cos^2 a + \sin^4 a$.

„ 134 Formel 30 und 31 statt $\times$ lies x.

„ 134 Formel 32 statt $\frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a}$ lies $\frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$.

„ 136 Zeile 11 von oben statt $\sin A - \cos B$ lies $\cos A - \cos B$. (51)

„ 136 Zeile 16 statt $\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B}$ lies $\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$ (53)

Seite 136 fehlt Formel (52).

„ 138 Zeile 10 statt $\cos a = \sqrt{1 - \sin a\, 2^2}$ lies $\sqrt{1 - \sin^2 a}$.

„ 138 Zeile 15 von oben statt $\cos^2 a \sin^2 a$ lies $\cos^2 a - \sin^2 a$.

„ 139 Zeile 24 von oben statt grösser BP lies grösser als BP.

„ 149 Zeile 21 so wie auch 23 statt $\frac{a+b}{b}$ und $\frac{a-b}{b}$ lies $\frac{c+b}{b}$ und $\frac{c-b}{b}$.

„ 147 statt wenn Seite $a > b$ so ist $B > A$ lies so ist $A > B$.

„ 153 Zeile 10 von unten statt $\sqrt{\frac{(a+b+c)(a-b+c)}{4ac}}$ lies $\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4ac}}$.

„ 152 Zeile 5 von unten statt $\cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ac}}$ lies $\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+c-b)}{4ac}}$.

153 Zeile 5 von unten statt $\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b-c)(b+c-a)}}$ lies $\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(b+c-a)}}$.

„ 156 statt $-CD^2 + CE^2$ lies $= CD^2 + CE^2$.

„ 156 Zeile 5 Setzt man diesen Werth von CD^2 lies CE^2.

„ 158 sind von Zeile 8 an alle Formeln ohne Ordnung durch-einander gemengt.

„ 159 statt $\cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin s . \sin (s-a)}{\sin a . \sin c}}$ lies $\sqrt{\frac{\sin s \sin (s-b)}{\sin a \sin c}}$.

„ 169 Zeile 14 von oben lies statt Fig. 48. Fig. 43.

„ 169 Zeile 16 von unten statt $ACA = \varphi$ lies $ACB = \varphi$.

„ 169 3te Zeile von unten φ fehlt.

„ 169 unterste Zeile statt $s - c = \frac{1}{2}(\varphi + \beta - x)$ lies $\frac{1}{2}(\varphi + \beta - \alpha)$

„ 170 statt $\frac{1}{2}(\varphi + \beta' - \alpha) = 33.2.25,35$ lies 33.1.55,4.

Seite 170 statt $\frac{1}{2}(\varphi+\alpha-\beta)=33.28.13,55$ lies 33.28.42,6.

welches von einer falschen Anwendung der —1 oder negativen Höhe herkömmt, welche er subtrahirt statt addirt hat. Ueberhaupt hat er in diesem Beispiele, die Reduction auf den Horizont betreffend, welches von ihm selbst ist, (die anderen Beispiele sind von mir), einen Beweis der crassesten Ignoranz gegeben. Abgesehen davon, dass er den Gebrauch des Minuszeichens missverstanden, setzt er den CpL. cosin — 1 = 9,9999949, das heisst er hat den log cos — 1 von 1 subtrahirt, indem er das Zeichen des Winkels auf den Logarithm des Cosinus, einen negativen Logarithmen, übertragen hat!! abgesehen davon, dass das Zeichen des Cosinus sich im 4ten Quadranten nicht ändert! — und wo giebt es ein CpL cosinus mit 9 für Kennziffer. Endlich macht er sich Schwierigkeiten wo keine gewesen wären, wenn er statt negativer Höhen Zenith-Distanzen gebraucht hätte. Die übrigen Beispiele (besonders auch das letzte) sind aus meinem Handbuche entnommen; sein Exempel Seite 176 ist mein Exempel Seite 139, sein Exempel 168 ist mein Exempel Seite 138, sein Exempel 169 ist mein Exempel Seite 138. Sein Exempel 182 ist nicht von mir, deswegen ist es auch falsch, für $3^h 3^m 15^s$... Zeit setzt er 36.3.15 und für den log cosin 36.3.15 schlägt er 9,769738..... auf. Sein Exempel 168 §. 54. ist mein Exempel 75 Seite 140.

Endlich Dr. Prestel beobachtet zu runden Minuten, nimmt die Decimalen zu runden Minuten, wie auch die Breite, häuft aber Decimalen auf Decimalen von Logarithmen, und schlägt die Zeit zu Decimalen von Tertien auf!! — Ein klarer Beweis, dass er nichts vom Beobachten versteht. Astronomen, mit den vollkommensten Instrumenten versehen, sind zufrieden mit $\frac{1}{10}$ Secunden. Noch ist kein Instrument erfunden, die Zeit zu vergrössern, die Optik lässt sich nicht darauf anwenden. Wenn sich der Dr. Prestel dieses unsterbliche Verdienst erworben hätte, so würde er sich Musse verschafft haben, die Fehler seines Machwerks zu berichtigen, in dessen Herausgabe kein periculum in mora war. Ich lasse die Unmasse von Rechenfehlern in seinen Uebungs-Aufgaben (womit meine Schüler sich amüsirt haben) unerörtert. Sie werden keine Schwierigkeit finden, noch viel mehr Fehler in den Formeln seines Werkes, welches ich jetzt nicht mehr vor mir habe, zu entdecken. Noch möchte ich Sie bitten die Eleganz, Deutlichkeit und logische Richtigkeit des folgenden Satzes zu bewundern.

„Der Cosinus einer Seite des sphärischen Dreiecks ist gleich „der Summe aus dem Producte der Sinus der beiden andern „Seiten in dem von ihnen eingeschlossenen Winkel „und dem Producte der Cosinus derselben Seiten.“

Claudite rivos pueri ......!!

Ich bitte Sie zu entschuldigen, dass ich Sie so lange mit solchem Zeuge belästiget. Aber solche Werke finden doch ihren Weg im Publicum, weil sich wenige Leute Zeit lassen, den Kram näher zu untersuchen; und wenn der Hannöverschen Regierung die Augen nicht geöffnet werden, so wird es als Schulbuch eingeführt.



Hinsichtlich des sphärischen Fünfecks und des Neper'schen Canons der rechtwinkligen Dreiecke muss ich noch erwähnen, dass es mein Schüler Funk war, welcher den Herrn Dr. Prestel darin instruirte, der vorher nie davon gehört hatte.

Ich bitte Sie nochmal zu entschuldigen, dass ich Ihre Geduld so lange in Anspruch genommen, auch dass ich nicht besser auf Schrift und Styl achten kann. Ich bin jede Nacht bis 4 Uhr Morgens auf, Astraea, Neptun, Vesta, den Encke'schen Cometen, Hebe und Iris zu beobachten, und den Tag über die Navigations-Schule und Redaction der Beiträge*).

Hamburg. October 1. 1848.

Dass diese Bemerkungen des Herrn Director Rümker über die Trigonometrie des Herrn Dr. Prestel sehr geeignet sind, die Leser und Besitzer dieses Buchs, namentlich solche, welche ihre ersten Studien aus demselben zu machen beabsichtigen, oder Lehrer, welche es ihrem Unterrichte als Leitfaden zum Grunde legen wollen, aufzufordern, sehr vorsichtig bei dessen Gebrauche zu sein, brauche ich wohl nicht noch besonders zu erinnern. G.

Physik.

Zur Entscheidung der Frage über den Luft- und Wasserdruck. Von Dr. F. Strehlke, Director der Petrischule zu Danzig. (Programm der Petrischule zu Danzig von Michaelis 1848.). Danzig. 1848. 4.

Durch diese Schrift, welche lediglich die Widerlegung der bekannten Drieberg'schen Entdeckungen (!!) betrifft, hat uns der Herr Verfasser eine grosse Freude gemacht, und wir können allen Physikern einen gleichen Genuss, wie dieselbe uns gewährt hat, mit Bestimmtheit versichern, halten dieselbe aber auch namentlich für Schüler und überhaupt für Anfänger in der Physik für äusserst lehrreich, weil diese aus derselben lernen können, wie durch sinnreich angeordnete, im Ganzen übrigens nur einfache, aber eben dadurch höchst lehrreiche Versuche eine physikalische Behauptung zur vollkommensten Evidenz gebracht werden kann, weshalb diese Schrift auch den Zwecken eines physikalischen Schulprogrammes so vollkommen entspricht wie nicht leicht eine andere. Dass die übrigens nur 12 Seiten starke Schrift hier keinen Auszug gestattet, versteht sich von selbst, und wir bemerken daher

*) Dies sind Beiträge zur nautischen Astronomie, die Herr Director Rümker jetzt drucken lässt, und durch welche er sich gewiss neue Verdienste um die Nautik erwerben wird. Der Unterzeichnete sieht denselben mit grossem Verlangen entgegen. G.

als eine den angestellten Versuchen besondere und höchst interessante Eigenthümlichkeit nur, dass die hauptsächlichsten derselben in der grossen Taucherglocke in dem Hafen von Neufahrwasser bei Danzig angestellt worden sind. Dazu wurden drei Fahrten unternommen: die erste am 15. Juni 1847 in Gesellschaft der Herren Hafenbau-Inspector Pfeffer, Justiz-Commisarius Martens, gegenwärtig Deputirter in Frankfurt, und Uhrmacher Hallmann in der Nähe der Festung Weichselmünde bis zu einer Tiefe von 31 Fuss unter dem Wasserspiegel; die zweite am 30. Juni 1847 bei dem Orte Legan in der Nähe von Danzig in Gesellschaft der Herren Hafenbau-Inspector Pfeffer, Oberlehrer Tröger und Oberlehrer Menge bis zu einer Tiefe von 30 Fuss; die dritte am 24. Juli 1848 bei Legan in Gesellschaft des Herrn Mechanikus Saxe und eines Arbeiters. Andere Versuche wurden im Locale der naturforschenden Gesellschaft in Danzig angestellt, und alle diese Versuche zeichnen sich vor anderen bisherigen Versuchen dadurch besonders aus, dass sie in sehr grossem Maassstabe angestellt wurden. Leider gestattet der Raum uns grössere Ausführlichkeit hier nicht, und wir verweisen daher des Weiteren wegen alle Leser des Archivs auf die interessante Schrift selbst.

Wenn Herr v. Drieberg sein Versprechen mit den bewussten 2000 oder, wir wissen nicht mehr recht, wie viel 1000 Thalern, gegen Herrn Strehlke jetzt nicht löst, dann wird er wohl sein Geld immer in der Tasche behalten! — Auch gut, wenn nur, wie kein vernünftiger Mensch bezweifeln kann, die alte Lehre von dem Luft- und Wasserdruck unantastbar dasteht, und gegen die Angriffe des Herrn v. Drieberg vollständig gerettet ist!

Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten. Von Hrn. Hagen. (Mathematische Abhandlung der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1846). Berlin 1848. 4.

Aus den in dieser Schrift beschriebenen interessanten Versuchen über die Oberfläche der Flüssigkeiten zieht der Herr Verfasser am Schluss derselben die folgenden Resultate:

1) Der Grad der Flüssigkeit ist ohne Einfluss auf die Festigkeit der Oberfläche.

2) Die Festigkeit der Oberfläche, oder der Werth von T, ist um so grösser, je weniger die Flüssigkeit an andern Körpern haftet, oder dieselben benetzt. Für Quecksilber ergab sich der Werth von T etwa acht mal so gross als für Wasser, für Oliven-Oel war er dagegen kleiner und für Alkohol noch kleiner. Alkohol netzt aber stärker als Oel: wenn man auf eine mit Oel bestrichene Platte Alkohol giesst, so zieht sich dieser, obgleich er specifisch leichter als Oel ist, unter dem Oele fort und entfernt dasselbe. Dass Wasser weniger als Oel und Alkohol, und Quecksilber noch weniger netzt, bedarf keines weitern Beweises. Aber selbst das Wasser scheint, wenn es ganz frisch ist, weniger zu netzen als später. Auf frischem Wasser sieht man nämlich oft einzelne kleine Tröpfchen einige Sekunden lang liegen, was auf einer ältern Oberfläche niemals geschieht.

Was der Herr Verfasser unter „Grad der Flüssigkeit" versteht wird man daraus sogleich entnehmen, wenn er z. B. S. 1. sagt: „Oliven-Oel besitzt ohne Zweifel einen auffallend geringern Grad der Flüssigkeit als das Wasser, Alkohol dagegen einen bedeutend grössern." —

Das Einzelne über die angestellten Versuche muss man in der Schrift selbst nachsehen.

Beiträge zur meteorologischen Optik und zu verwandten Wissenschaften. In zwanglosen Heften herausgegeben von Johann August Grunert. Erster Theil. Zweites Heft. Mit 4 lith. Tafeln. Leipzig. 1848. 8. 21 Sgr.

Das erste Heft des ersten Theils dieser neuen Zeitschrift ist im Liter. Ber. Nr. XLV. S. 632. angezeigt worden. Auch habe ich dort die ganze Tendenz dieser neuen Zeitschrift deutlich anzugeben versucht, verweise aber deshalb nochmals auf die besonders ausgegebene ausführliche Ankündigung derselben, die auch dem ersten Hefte vorgedruckt worden ist. Es bleibt mir daher jetzt nur noch übrig, den Inhalt des so eben erschienenen zweiten Hefts anzugeben. Dasselbe enthält zunächst eine Abhandlung von Herrn W. E. T. Kuhse, welche überschrieben ist: „Die drei wichtigsten älteren Hof- und Nebensonnen-Phänomene, nämlich das Römische, das Danziger und das Petersburger Phänomen, genau nach den Quellen dargestellt, nebst Bemerkungen über derartige Phänomene überhaupt." Die drei genannten höchst merkwürdigen Phänomene sind in dieser Abhandlung nach den eigentlichen Quellen sehr genau und ausführlich beschrieben; auch ist in derselben eine vollständige Uebersetzung der kleinen merkwürdigen und seltenen Schrift von Hevelius: „Mercurius in Sole visus" worin sich die Danziger Phänomene beschrieben finden, geliefert worden; diese prachtvollen alten Phänomene sind aber auf drei Figurentafeln durch, wie ich hoffe, sehr schöne, und in einem ziemlich grossen Maassstabe ausgeführte bildliche Darstellungen erläutert und dem Leser vor die Augen geführt worden. Ausserdem enthält dieses Heft zwei Abhandlungen von dem Unterzeichneten: „Ueber die Lehre von der Dämmerung" und „Berechnung der Lambert'schen Dämmerungsbeobachtungen." Bei der letzteren mühsamen Rechnung ist der Herausgeber von einem seiner Schüler, Herrn W. Schlesicke a. Königsberg i. Pr., unterstützt worden, und hofft, dass in den beiden genannten Abhandlungen die ganze Lehre von der Dämmerung nach dem jetzigen Zustande der Wissenschaft in ihrem wahren Lichte dargestellt worden ist, was bis jetzt noch nicht in gleich ausführlicher und möglichst tief in die eigentliche Natur des Gegenstandes eindringender Weise geschehen sein dürfte. Den Beschluss des vorliegenden Heftes macht die Mittheilung der neuesten Bestimmungen der Brechungsexponenten des Eises und des flüssigen Wassers von Herrn A. Bravais.

Das dritte Heft des ersten Theils, dessen Druck jetzt begonnen ist, wird zunächst eine ausführliche Abhandlung über das so wichtige und interessante Phänomen der Luftspiegelung bringen.

Dass diese Zeitschrift durch Beiträge zu derselben in der, in der Ankündigung dargelegten Weise, reichlich unterstützt werden möge, wünscht der Unterzeichnete sehr, und fordert zu denselben nochmals hiermit auf. G.

XLVII.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Theorie der Differenzen und Summen. Ein Lehrbuch von Dr. O. Schlömilch, ausserordentlichem Professor an der Universität zu Jena. Halle. 1848. 8.

Es war jedenfalls ein guter Gedanke des Herrn Verfassers, die Theorie der (endlichen) Differenzen und Summen einmal in streng systematischem Zusammenhange darzustellen, weil diese Theorie in vielen Beziehungen so wichtig ist, und namentlich auch bei den praktischen Anwendungen der Mathematik so häufig zur Sprache kommt. Die ganze Schrift besteht aus drei Haupttheilen: I. Differenzenrechnung. II. Summenrechnung. III. Differenzengleichungen. Einige literar-historische Notizen machen den Schluss. Wir halten die Darstellung für ziemlich vollständig und haben durchaus nichts Wesentliches vermisst, müssen es auch ganz billigen, dass der Herr Verfasser auf die von der eigentlichen Differential- und Integralrechnung dargebotenen Hülfsmittel nicht verzichtet, sondern sich derselben vielmehr häufig bedient, und immer auf die beiden letzteren Wissenschaften gehörig Rücksicht genommen hat. Die wissenschaftliche Behandlung des dargebotenen Stoffs entspricht ganz der Strenge und Bestimmtheit, welche mit Recht die neuere Analysis fordert, und lässt in dieser Beziehung, zugleich bei manchen, nicht selten vorkommenden, dem Herrn Verfasser eigenthümlichen Entwickelungen und Ausführungen, nichts zu wünschen übrig. Wir können daher dieses Lehrbuch allen denen, welche die Differenzen- und Summenrechnung in systematischem Zusammenhange und grösserer Ausführlichkeit, als dies aus den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung, wo die Differenzen- und Summenrechnung gewöhnlich gewissermaassen nur entweder als eine Einleitung (wie z. B. bei

Euler) oder als ein Anhang (wie z. B. in dem Traité élémentaire von Lacroix) zur eigentlichen Differential- und Integralrechnung, aber nicht als selbstständige Wissenschaft, auftritt, möglich ist kennen lernen wollen, aus voller Ueberzeugung als einen sichern Führer recht sehr empfehlen.

Geometrie.

Lehrbuch der ebenen Geometrie zum Gebrauch bei dem Unterrichte in Gymnasien und höheren Unterrichtsanstalten von W. Nerling, Russisch-Kaiserl. Hofrath und Oberlehrer am Gymnasium zu Dorpat. Mitau und Leipzig. 1848. 8.

Ein gewöhnliches, übrigens ganz deutlich und recht zweckmässig in euklidischer Weise verfasstes Lehrbuch der ebenen Geometrie, das auch bei jedem Abschnitte eine Reihe von Aufgaben, die zum Theil als Uebungsaufgaben dienen können, enthält, und das in den Händen eines geschickten Lehrers, wie der Herr Verfasser jedenfalls ist, recht Gutes wirken kann, an welchem uns aber besondere Eigenthümlichkeiten, die eine ausführlichere Besprechung in diesem Literar. Ber. rechtfertigen und nöthig machen könnten, nicht entgegen getreten sind.

Vollständige Verwandlung des elften Euklidi'schen Grundsatzes in einen gewöhnlichen Lehrsatz. Von Gottfried Wiessner. Jena 1848. 4 gGr.

(Wir wiederholen die schon mehrmals gemachte Bemerkung, dass wir Parallelentheorien einer Kritik in diesem Literar. Ber. nicht unterwerfen, weil dies meistens einen viel zu grossen Raum in Anspruch nehmen würde).

Topologie.

Vorstudien zur Topologie. Von Johann Benedict Listing. Mit eingedruckten Holzschnitten. Abgedruckt aus den Göttinger Studien 1847. Göttingen. 1848. 8. 12½ Sgr.

„Unter der Topologie“ sagt der Herr Verfasser S. 6., „soll die Lehre von den modalen Verhältnissen räumlicher Gebilde ver-

standen werden, oder von den Gesetzen des Zusammenhangs, der gegenseitigen Lage und der Aufeinanderfolge von Punkten, Linien, Flächen, Körpern und ihren Theilen oder ihren Aggregaten im Raume, abgesehen von den Maass- und Grössenverhältnissen. Durch den Begriff der Aufeinanderfolge, der mit dem der Bewegung nahe verwandt ist, tritt die Topologie zur Mechanik in ähnliche Beziehung wie zur Geometrie, wobei natürlich wiederum die Winkelgeschwindigkeit drehender Bewegung, desgleichen Masse, Bewegungsgrösse, Kräfte oder Momente ihrer Quantität nach nicht in wesentlichen Betracht kommen, sondern nur die modalen Beziehungen zwischen beweglichen oder bewegten Gebilden im Raume. Die Topologie wird, um den Rang einer exacten Wissenschaft zu erreichen, zu dem sie berufen scheint, die Thatsachen der räumlichen Anschauung auf möglichst einfache Begriffe zurückführen müssen, mit welchen sie unter Beihülfe geeigneter, den mathematischen analog gewählter Bezeichnungen und Symbole die vorkommenden Operationen nach einfachen Regeln, gleichsam rechnend, vollzieht."

Man sieht hieraus, dass die von dem Herrn Verfasser mit dem Namen Topologie belegte neue Wissenschaft im Ganzen dasselbe ist und denselben Zweck zu erreichen sucht, welchen schon Leibniz durch seine Geometrie der Lage mittelst einer eigenthümlichen Charakteristik zu erreichen suchte, worüber die Jablonowski'sche Gesellschaft zu Leipzig für das Jahr 1845 eine Preisaufgabe stellte (Liter. Ber. Nr. XVIII. S. 288.), und später den Preis Herrn H. Grassmann in Stettin für die im Literar. Ber. Nr. XXXIV. S. 501. angezeigte Schrift ertheilte. Jedenfalls müssen wir Herrn Professor Listing das Zeugniss ertheilen, dass er in seiner vorliegenden Schrift den eigentlichen Begriff einer Geometrie der Lage (er erlaube uns, diesen Ausdruck hier der Kürze wegen zu gebrauchen) weit bestimmter fest gehalten, und dem, was schon Leibniz erstrebte, weit näher getreten ist, als dies in der Grassmann'schen Schrift geschehen sein dürfte, ohne dass wir den Werth der letzteren für die Geometrie im Geringsten zu verkennen oder in den Schatten zu stellen beabsichtigen. Auch sind alle Betrachtungen, die er in seiner Schrift anstellt, an sich so einfach und so gänzlich von allem Calcul oder andern hier gewiss als völlig fremdartig anzusehenden mathematischen Hülfsmitteln entkleidet, wie es der Begriff einer Geometrie der Lage nothwendig erfordert. Wir halten daher diese Schrift für den ersten Schritt zu der bezeichneten neuen Wissenschaft, überhaupt für einen sehr dankenswerthen Beitrag zur Mathematik, in welche die Lage gewiss eben so gut gehört wie die Grösse, und wünschen dem Herrn Verfasser Muth und Ausdauer, um auf der betretenen Bahn weiter fortzuschreiten. Dabei wird er freilich nach unserer Ansicht sein Hauptaugenmerk zunächst auf strenge systematische Gestaltung und Einführung einer möglichst durchgreifenden Charakteristik zu richten haben; denn was er bis jetzt giebt, sind, wie ja auch der Titel sagt, nur „Vorstudien" zu der eigentlichen Topologie, und stehen meistens nur noch vereinzelt da; alle diese Vorstudien sind aber so interessant, und bringen viele so allgemein ansprechende Punkte zur Sprache, dass wir

allen Lesern unserer Zeitschrift aus der Lectüre dieser Schrift einen wahren Genuss mit Bestimmtheit versprechen können, weshalb wir dieselbe hier auch zu möglichst allgemeiner Beachtung noch besonders zu empfehlen nicht unterlassen wollen.

Dass Gauss nach S. 5. den Herrn Verfasser bei öfteren Gelegenheiten auf die Wichtigkeit des Gegenstandes, die auch niemand in Abrede stellen wird und kann, aufmerksam gemacht und demzufolge mit die Veranlassung zur Abfassung dieser Schrift gegeben hat, wird derselben noch zu ganz besonderer Empfehlung gereichen.

Astronomie.

Eléments d'Astronomie, par A. Quetelet. 4e édition, revue et augmentée. Tome I. II. Bruxelles. 1848. Duod.

Dieses treffliche ganz populäre Lehrbuch der Astronomie scheint in Deutschland bei Weitem nicht so allgemein, wie es verdient, bekannt zu sein, weshalb wir für unsere Pflicht halten, die Leser des Archivs auf die im vorigen Jahre erschienene vierte Ausgabe desselben aufmerksam zu machen. Dieses Buch ist mit so grosser Deutlichkeit, in so einfacher Darstellung, in so schöner Sprache verfasst, und nimmt so vollständig, dabei doch aber mit so zweckmässiger Kürze, auf alle neueren Entdeckungen Rücksicht, dass wir dasselbe allen Liebhabern der Astronomie, die wahrhafte Belehrung, zugleich aber auch eine angenehme Lectüre suchen, recht sehr empfehlen können. Um auch die Reichhaltigkeit seines Inhalts nachzuweisen, wollen wir eine Uebersicht desselben in der Kürze hier mittheilen.

Avant-Propos. *Livre premier. Du ciel etoilé.* I. Notions préliminaires. 1. Mouvement apparent des étoiles. 2. Détermination de la position des étoiles par rapport à l'équateur. 3. Détermination de la position des étoiles par rapport à l'horizon. 4. Détermination de la position des astres par rapport à l'écliptique. — II. De la formation d'un observatoire et d'un catalogue d'étoiles. 1. Formation d'un observatoire. 2. Formation d'un catalogue d'étoiles. — III. Des constellations. 1. Indication des constellations. 2. Position des étoiles à un instant donné. 3. Croyances relatives aux constellations. (Astrologie). — IV. Des étoiles. Particularités que présentent les étoiles. — *Livre second. Du système planétaire.* I. De la terre. 1. De la forme de la terre. 2. De la sphère terrestre. 3. Détermination des longitudes et des latitudes sur

terre et sur mer. 4. Cartes géographiques. 5. De la rotation de la terre. 6. De l'atmosphère et des réfractions. — II. Du soleil. 1. De l'obliquité de l'écliptique et des phénomènes qui en dependent. 2. Du zodiaque et des saisons. 3. Du mouvement de la terre autour du soleil. 4. Du diamètre apparent et de la parallaxe du soleil. 5. Des lois de Kepler. 6. De l'anomalie et de l'équation du temps. 7. De la nature du soleil.— III. De la lune. 1. Du mouvement propre de la lune. 2. Des phases de la lune. 3. Distance et grandeur de la lune. 4. Du mouvement de rotation et de translation de la lune. 5. De la libration de la lune. 6. De la nature de la lune. — IV. Du soleil et de la lune. 1. De la mesure du temps. 2. Des cadrans solaires. 3. Du calendrier. 4. Des éclipses. — V. Des planètes. 1. Des planètes en général. 2. De Mercure. 3. De Vénus. 4. De Mars. 5. Des asteroides Hébé, Iris, Astrée, Vesta, Flore, Junon, Cérès et Pallas. 6. De Jupiter et de ses satellites. 7. De Saturne. 8. Satellites de Saturne. 9. D'Uranus. 10. Satellites d'Uranus. 11. Neptune. — VI. Des comètes, des aérolithes et des étoiles filantes. 1. Des comètes. 2. Les comètes obéissent aux lois de Kepler. 3. Des aérolites et des étoiles filantes. — *Livre troisième. Des forces qui régissent notre système planétaire.* I. 1. Des différentes opinions des philosophes. 2. Du principe de la pesanteur universelle et des forces qui régissent notre univers. — II. Perturbations. 1. Des perturbations des planètes. 2. Des perturbations des satellites. 3. Des perturbations des comètes. — III. Masses planétaires. 1. Des masses des planètes. 2. Des lois de la pesanteur à la surface des planètes et de la force centrifuge. 3. De la figure des planètes, de la théorie du pendule et du système décimal.— IV. Théorie de la lune. — V. Théorie de la terre. — VI. Des marées. — Conclusion.

Wir haben den Inhalt so ausführlich angegeben, weil wir in der That gegenwärtig kein populäres Buch über Astronomie wüssten, welches unsern Wünschen in jeder Beziehung so vollständig entspräche, wie das vorliegende.

Physik.

Untersuchungen über thierische Elektricität von Emil Du Bois-Reymond. Erster Band. Mit sechs Kupfertafeln. Berlin. 1848. 8. 4 Thlr. 20 Sgr.

Dieses grosse Werk über den auf seinem Titel genannten Gegenstand, welches grösstentheils auf eignen Untersuchungen beruhet, aber auch zugleich die Vorarbeiten anderer Naturforscher

in grosser Ausführlichkeit und Vollständigkeit berücksichtigt, ist für die thierische Elektricität jedenfalls von grosser Wichtigkeit, und darf von keinem Physiker und Physiologen unberücksichtigt bleiben. Näher auf dasselbe einzugehen, gestatten die Gränzen dieses literarischen Berichts nicht, da es hier auch nur unsere Absicht war, auf die jedenfalls grosse Wichtigkeit desselben für den fraglichen Gegenstand aufmerksam zu machen und hinzuweisen, weshalb wir schliesslich nur noch bemerken wollen, dass der Herr Verfasser, wie er auch in der Vorrede ausführlich auseinandersetzt, sich an mehreren Stellen der mathematischen Darstellungs- und Betrachtungsweise bedient, was diesem Werke, wenigstens bei allen Lesern des Archivs, gewiss nur zu ganz besonderer Empfehlung gereichen wird, wenn vielleicht auch namentlich manche Physiologen hierüber anders denken sollten, gewiss aber mit grossem Unrecht und nur deshalb, weil ihnen die nöthige mathematische Vorbildung abgeht, was in vielen Fällen sehr zu beklagen ist.

Sur le climat de la Belgique. Deuxième partie. Direction, intensité, durée et caractères distinctifs des vents. Par A. Quetelet. Bruxelles. 1848. 4.

Observations des phénomènes périodiques. Par A. Quetelet. (Extrait du tome XXI. des mémoires de l'Académie Royale de Belgique.).

Magnetische und meteorologische Beobachtungen zu Prag. Achter Jahrgang: vom 1. Jänner bis 31. December 1847. Prag. 1848. 4. 3 Thlr.

Die Telegraphie von ihrem Ursprunge bis zur neuesten Zeit mit besonderer Berücksichtigung der ausgeführten telegraphischen Systeme. Von Dr. Adolph Poppe. Frankfurt a. M. 1848. 10 Sgr.

Briefe über Alexander von Humboldt's Kosmos. Ein Commentar zu diesem Werke für gebildete Laien. Erster Theil. Bearbeitet von Bernhard Cotta, Professor. Leipzig. 1848. 8. 2 Thlr. 12 gGr.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien.

Von diesen Sitzungsberichten liegen uns bis jetzt drei Hefte vor, deren Inhalt, so weit derselbe die Verhandlungen der mathe-

matisch-naturwissenschaftlichen Klasse betrifft, und in den Bereich unserer Zeitschrift fällt, wir im Folgenden angeben wollen.

Erstes Heft. 1848. Dieses Heft ist fast nur geologischen, geognostischen und mineralogischen Inhalts, und fällt daher, so interessant und beachtungswerth auch die betreffenden Verhandlungen, unter denen wir insbesondere die über die Anfertigung einer „Geognostischen Uebersichtskarte der Oesterreichischen Monarchie“ hervorheben, sind, nicht in den Kreis unserer Zeitschrift. Mathematisches Interesse gewähren in diesem Hefte nur die in den Sitzungen vom 8. und 13. Januar 1848 Statt gehabten Verhandlungen über genaue Normalmaasse, aus denen wir als eine für manche Leser vielleicht interessante Notiz herausheben, dass bei Herrn Professor v. Steinheil in München, welcher durch die ungemeine Genauigkeit seiner Arbeiten bekannt genug ist, eine Copie des Platin Mètre primitive aus Glas, bei der eine Genauigkeit bis auf $\pm$ 0,001 Millimetre verbürgt wird, 200 Fl. Rhn.; ein Kilogramme aus Messing, vergoldet, bei dem eine Genauigkeit von $\pm$ 0,1 Milligramme verbürgt wird, 100 Fl. Rhn. kostet.

Zweites Heft. 1848. Auf S. 122. — S. 129. finden wir zuerst einen Bericht über eine von Herrn Professor v. Ettingshausen überreichte Abhandlung über die Differenzialgleichungen der Lichtschwingungen. Diese Abhandlung enthält eine Ableitung der Differenzialgleichungen der Lichtschwingungen aus den einfachsten Principien der Mechanik, und zwar in solcher Allgemeinheit, dass daraus auch jene Gleichungen folgen, welche man bis jetzt nur auf empirischem Wege zur Nachweisung der eigenthümlichen Fortpflanzung des Lichtes in den Stoffen, worin die Polarisationsebene eine Drehung erleidet, aufgestellt hat. Die Leser sehen hieraus, dass diese Abhandlung den Hauptzweck hat, die physikalische Theorie des Lichts auf einem völlig festen, durch die ersten und einfachsten Principien der Mechanik dargebotenen Fundamente aufzubauen, und wer irgend mit den Schwierigkeiten bekannt ist, welche einem, namentlich dem, welcher nach völliger mathematischer Strenge und vollkommener Unzweifelhaftigkeit sucht, bei dem Studium dieser Theorie sehr bald entgegentreten, wird die Wichtigkeit dieser Arbeit des Herrn Professors v. Ettingshausen erkennen, und dieselbe als ein wahres Bedürfniss mit Freudigkeit begrüssen. Ueber die Leistungen seiner Vorgänger Mac Cullagh, Cauchy, O'Brien, Laurent, u. s. w., namentlich auch über das, was in denselben noch schwankend und unbestimmt ist, oder bloss auf hypothetischer Annahme beruhet, spricht sich Herr v. Ettingshausen in dem der Akademie über seine Abhandlung erstatteten Berichte auf so belehrende Weise aus, dass wir alle Leser unserer Zeitschrift, welche ein sicheres Urtheil über die bisherigen Arbeiten in der physikalischen oder mechanischen Theorie des Lichts gewinnen wollen, auf denselben verweisen, indem wir selbst unsere vollkommene Uebereinstimmung mit den in diesem Berichte ausgesprochenen Ansichten aussprechen, da auch uns bei dem Studium der Theorie des Lichts Zweifel mancherlei Art aufgestossen sind. Mögen uns dieselben durch die Abhandlung des Herrn v. Ettingshausen, der wir mit grossem Verlangen

entgegen sehen, vollkommen gelöset werden. — Auf S. 131. — S. 137. erstattet Herr Bergrath Haidinger einen interessanten Bericht über seine dichroskopische Loupe, welche den Lesern des Archivs schon aus Poggendorff's Annalen für 1844 bekannt sein wird, und vorzüglich zur Untersuchung der Krystalle im polarisirten Lichte in Bezug auf ihre Farben dient. Das interessante kleine Instrument, welches in dem vorliegenden Berichte sehr deutlich erläutert wird, kostet bei dem Mechaniker Herrn Eckling in Wien mit Etui nur 6 Fl. C. M. — S. 142. — S. 143. Herr Bergrath Haidinger übergiebt eine Druckschrift, betitelt: Theorie der schiefen Gewölbe und deren praktische Ausführung von Eduard Heider. Wien 1846. Diese Schrift scheint namentlich für den Eisenbahnbau wichtig zu sein. — S. 152. — S. 153. theilt der Vice-Präsident der Akademie Herr Baumgartner der Klasse eine von ihm gemeinschaftlich mit Herrn Kreil in Prag in Angriff genommene Anwendung der galvanischen Telegraphie zur geographischen Längen-Bestimmung mit. Herr Baumgartner bemerkt, dass man bei diesen Längenbestimmungen mit der Genauigkeit viel weiter als bei Blickfeuern gehen könne, indem bei letzteren nach Herrn Kreil's Schätzung bei der Zeitbestimmung kaum eine Genauigkeit von 0,4 Secunden zu erreichen möglich sei. — S. 170. erklärt Herr Professor Schrötter eine von ihm erdachte neue Einrichtung des Barometers, durch welche es als Normal-Barometer dienen, und hinsichtlich der Sicherheit, Genauigkeit und Bequemlichkeit der Ablesung des Barometerstandes, mit allen bis jetzt versuchten Constructionen mit Vortheil in die Schranken treten kann, im Preise aber nur halb so hoch zu stehen kommt wie die bekannten Pistor-schen Normalbarometer, nämlich bei dem ausgezeichneten Künstler Herrn Kappeller in Wien nur 75 Gulden. — S. 175. Der k. k. Oberst Herr Herrmann hat an die Akademie die folgende Note eingesandt: Verbesserung der II. Callet'schen Tafel der gemeinen Logarithmen mit 20 Decimalen, nebst Vorschlägen für die weitere Förderung dieses Zweckes. Auf den Bericht des Herrn Professor Stampfer hat die Klasse den Abdruck sämmtlicher von Herrn Herrmann angezeigten Verbesserungen, die übrigens fast nur die letzte Decimale betreffen, verfügt. Für die Leser des Archivs möge jedoch bemerkt werden, dass Herr Herrmann auch folgenden Fehler in den Callet'schen Tafeln aufgefunden hat. Die Mantisse des log 106888 ist nämlich nicht 02892995, wie in der Callet'schen Tafel steht, sondern die richtige Mantisse ist nach Herrn Herrmann 02892895. Dieser Fehler findet sich allerdings in der uns vorliegenden Tirage 1829 der Callet'schen Tafeln. — S. 202. Herr v. Ettingshausen berichtet über Soleil's Sacharometer. — S. 211. Herr Regierungsrath P. Marian Koller überreicht eine Abhandlung: „Ueber die Berechnung periodischer Naturerscheinungen.“ Diese Abhandlung enthält eine vollständige Theorie der Berechnung periodischer Naturerscheinungen mit Berücksichtigung aller dabei in Betrachtung kommenden Umstände, namentlich auch in Rücksicht der Convergenz der betreffenden mathematischen Ausdrücke, und wird gewiss für die schärfere Begründung dieser für die gesammte Naturwissenschaft so wichtigen Rechnungsmethode von grosser Bedeutung sein.

weshalb auch die Klasse den Abdruck dieser Abhandlung, welche auch ein vollständig ausgerechnetes Beispiel enthält, sogleich ver fügt hat.

Drittes Heft. 1848. S. 21. Die Herren Stampfer und Burg erstatten ein günstiges Gutachten über eine von Herrn Franz Moth, Professor der Mathematik an dem Lyceum zu Linz, eingesandte Abhandlung: „Begründung eines eigenthümlichen Rechnungs-Mechanismus zur Bestimmung der reellen Wurzeln der Gleichungen mit numerischen Coefficienten. Das von den Herren Berichterstattern abgegebene Gutachten erregt grosses Verlangen, die Abhandlung ihres durch frühere gründliche Arbeiten hinreichend bekannten Herrn Verfassers selbst bald kennen zu lernen. — S. 26. Herr Bergrath und Professor C. Doppler zu Schemnitz (jetzt, so viel wir wissen, in Wien) überreicht eine Abhandlung: „Versuch einer auf rein mechanische Principien sich stützenden Erklärung der galvano-elektrischen und magnetischen Polaritäts-Erscheinungen. — S. 57. Der Vice-Präsident Herr Minister Baumgartner widmet seinen Functionsgehalt (nach §. 17. des Statuts 2500 Gulden) der Ausstattung meteorologischer Observatorien mit Instrumenten. Dergleichen von dem reinsten Eifer für die Wissenschaften zeugende Handlungen hier ganz mit Stillschweigen übergehen zu wollen, wäre gewiss sehr unrecht. — S. 58. — S. 95. giebt Herr Kreil einen ausführlichen „Entwurf eines meteorologischen Beobachtungs-Systems für die österreichische Monarchie“ welcher des allgemein Belehrenden so Vieles enthält, dass wir alle diejenigen Leser unserer Zeitschrift, welche sich für meteorologische Beobachtungen interessiren, dringend auf denselben aufmerksam machen, da er in Rücksicht auf Instrumente, Beobachtungsmethoden, Rechnungsmethoden u. s. w. in zweckmässiger Kürze fast Alles enthält, was bei meteorologischen Beobachtungen zu wissen nöthig ist. — S. 106. Herr v. Ettingshausen theilt eine Note über eine directe und strenge Ableitung der Taylor'schen Formel mit. Da es unsere Absicht ist, diese Note in einem der nächsten Hefte unserer Zeitschrift zu ihrer weiteren Bekanntwerdung, die sie sehr verdient, vollständig mitzutheilen, so sagen wir hier jetzt nichts weiter über dieselbe. — S. 136. Derselbe theilt eine Note über den Ausdruck der zwischen einem galvanischen Strom und einem magnetischen Punkte stattfindenden Action mit. — S. 140. Baumgartner, über die Wirkungen der natürlichen Elektricität auf magnetische Telegraphen. — S. 149. v. Ettingshausen, über einen Satz Green's, das elektrische Potenzial betreffend.

Ausser diesen vorzugsweise in den Kreis unserer Zeitschrift gehörenden Abhandlungen und Notizen enthalten die Sitzungsberichte des Wichtigen und Interessanten in naturwissenschaftlicher Rücksicht noch so Vieles, dass wir alle Leser unsers Archivs im Allgemeinen noch schliesslich dringend auf dieselben aufmerksam zu machen nicht unterlassen können.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Tome XIV. II[e] Partie. 1847. Tome XV. I[re] Partie. 1848. (Vergl. Literar. Ber. Nr. XXXVIII. S. 559.).

Tome XIV. II[e] Partie. p. 12. Rapport de M. M. Verhulst et Timmermans sur une note de M. Möhl relative à la théorie des parallèles. — p. 13. Rapport de M. M. Pagani et Timmermans, sur un mémoire de M. A. de Laveleye, concernant la métaphysique du calcul différentiel. — p. 14. Sur la base géodésique que l'on mesure actuellement dans les environs de Bonn, note de M. Meyer. — Sur l'incandescence des fils métalliques dans le sein des liquides, par M. Maas. — Considerations sur le mouvement de la dynamique électrique, par A. J. Maas. — p. 100. Sur l'héliotrope de Bertram, note de M. Meyer. — p. 240. Sur les systèmes de locomotion aérienne de M. M. Van Hecke et Van Esschen. — p. 321. theilt Herr Timmermans folgendes Theorem ohne Beweis mit: „Si, autour de chaque point d'un axe qui traverse un corps, on construit l'ellipsoide des moments d'inertie, l'axe sera un diamètre dans chacun de ces ellipsoides, et les plans diametraux conjugués à ces diamètres, passeront tous par une même droite, représentant la direction du choc qui ne produit aucune percussion sur l'axe.“ — „Cette droite est, en général, oblique au plan passant par l'axe et le centre de gravité. Elle n'est perpendiculaire que si l'axe est axe d'inertie principal relativement à l'un de ces points. Dans le cas de l'obliquité, c'est à dire lorsque l'axe n'est principal relativement à aucun de ses points, un choc exercé suivant la direction de l'intersection commune ne produit aucune percussion proprement dite sur l'axe, mais il fait naitre une action dans le sens de sa longueur.“ — p. 498. Sur les révolutions du globe terrestre, par M. d'Omalius d'Halloy.

Tome XV. I[re] Partie. Sur le renversement du signe électrique qui se présente immédiatement après la décharge des condensateurs, par M. A. J. Maas. — Sur le renversement apparent du signe électrique après la décharge des condensateurs, par M. J. G. Crahay. — p. 201. Théorémes sur les polyèdres, par M. Meyer. Diese Theoreme sind folgende: I. Dans tout tetraèdre, l'excès de la somme des angles dièdres sur la somme des angles solides est égale à quatre angles dièdres droits. — II. Dans toute pyramide, l'excès de la somme des angles dièdres sur celle des angles solides est égale à autant de fois deux angles dièdres droits qu'il y a de côtés dans la base moins un. — III. Dans tout polyèdre convexe, l'excès de la somme des angles dièdres sur celle des angles solides est égale à autant de fois deux angles dièdres droits que le polyèdre a de faces moins deux. — p. 268. Cinquième Mémoire sur l'Induction; par M. Elie Wartmann.—p. 277. Quelques réflexions théoriques sur le changement de signe électrique d'une bouteille déchargée, par M. A. J. Maas. — Quelques mots en réponse à la note de M. Maas, par M. J. G. Crahay.—

p. 283. Sur des actions électriques exercées à distance, par M. J. G. Crahay. — p. 341. Sur l'état de la végétation à Bruxelles, pendant les mois de février et de mars 1848, par M. A. Quetelet. — p. 442. Note sur les tremblements de terre en 1847, par M. Alexis Perrey. — p. 469. Note supplémentaire sur le mouvement dynamique de l'électricité, par M. A. J. Maas. — p. 482. Quelques expériences relatives au vol des oiseaux, par M. M. Thiernesse et Gluge. — p. 578. Sur les lignes longitudinales dans le spectre solaire, par M. J. G. Crahay. — p. 580. Des proportions du corps humain, par M. A. Quetelet. — p. 605. Sur une anomalie dans les réactions électriques, par M. A. J. Maas.

Ausser diesen grösseren Aufsätzen enthalten die beiden vorliegenden Bände noch eine grosse Menge kleinerer interessanter und wichtiger Notizen und Mittheilungen, von denen sehr viele von Herrn Quetelet herrühren.

Das Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Quatorzième année. Bruxelles 1848. enthält p. 125. eine im höchsten Grade interessante und anziehend geschriebene, von Herrn Quetelet verfasste Notice biographique sur le Colonel G. P. Dandelin, membre de l'Académie Royale de Belgique, né le 12. avril 1794, mort le 15. février 1847, der durch mehrere ausgezeichnete mathematische, vorzüglich geometrische Arbeiten auf das Vortheilhafteste bekannt, und der Wissenschaft leider durch einen zu frühen Tod entrissen worden ist.

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, M. A., F. R. S. E., Fellow of St. Peter's College, Cambridge, and Professor of Natural Philosophy in the University of Glasgow. Vergl. Literar. Ber. Nr. XLIV. S. 629.

No. XVII. XVIII. Notes on Hydrodynamics. IV. Demonstration of a Fundamental Theorem. By G. G. Stokes. — On Symbolical Geometry. By Sir William Rowan Hamilton. — On certain points in the Theory of the Calculus of Variations. By the Rev. Harvey Goodwin. — Suggestion on the Integration of Rational Fractions. By Professer De Morgan. — Application of certain Symbolical Representations of Functions to Integration. By the Rev. Brice Bronwin. — On the Strength of Materials, as influenced by the Existence or Nonexistence of certain Mutual Strains among the particles composing them. By James Thomson. — On the Elasticity and Strength of Spiral Springs, and of Bars subjected to Torsion. By James Thomson. — On the Mathematical Theory of Electricity in Equilibrium. IV. Geometrical Investigations regarding Spherical Conductors. By William Thomson. — On Differentiation with

Fractional Indices, and on general Differentiation. By the Rev. W. Center. — Mathematical Notes: Demonstration of Pascal's Hexagramme. By T. Weddle. — On an Integral Transformation. By A. Cayley. — On certain Curves traced on the Surface of an Ellipsoid (Poinsot's Poloids). By G. J. Allman.

No. XIX. will be published on the 1st of February 1849.

Berichtigungen.

Zu Thl. XI. S. 232. Seit dem dort Angeführten, was übrigens seit längerer Zeit geschrieben ist, kam mir das „Lehrbuch der Arithmetik von Dr. Theodor Wittstein" zu Gesicht, das in seiner zweiten Abtheilung S. 102 ff. vollständige Regeln enthält.

Thl. XI. S. 224 Zeile 8, 12, 13, 14 v. o. muss statt r stehen m.

J. Dienger.

XLVIII.
Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Sammlung von algebraischen Aufgaben zum Gebrauch bei dem Unterricht von W. H. v. Rouvroy, Hauptmann im K. Sächs. Artillerie-Corps und Lehrer der Math. an der Militair-Bildungsanstalt. Erste Abtheilung. Aufgaben. Dresden. 1848. 8. Preis ½ Thlr.

Der Inhalt dieser Sammlung algebraischer Aufgaben ist folgender: Vorübungen. — Aufgaben über die vier Rechnungsarten der Buchstabenrechnung. — Uebungen in der Factorenzerfällung, im Quadriren und Kubiren algebraischer Ausdrücke und im Rechnen mit algebraischen Brüchen. — Ausziehung der Wurzeln und Rechnung mit Wurzelgrössen. — Reduction der Gleichungen mit einer Unbekannten. — Auflösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten. — Auflösung von Aufgaben durch Gleichungen. — Uebungen in der Anwendung der Anfangsgründe der Combinationslehre und der Lehre von den Reihen so wie im Gebrauch des Newton'schen Binomium. — Uebungen im Rechnen mit Logarithmen. — Berechnung der reellen Wurzeln höherer Gleichungen.

Die Aufgaben sind in allen Abschnitten in hinreichend grosser Anzahl vorhanden, und bieten durch ihre Verschiedenartigkeit Stoff zu vielfachen Uebungen dar, scheinen auch meistens zweckmässig gewählt zu sein. Die Auflösungen der Aufgaben enthält dieses Heft nicht, und werden dieselben wohl in einem zweiten Hefte nachfolgen sollen. Eine solche Trennung der Aufgaben und Auflösungen scheint zweckmässig zu sein, da sich dann die Aufgabensammlung in den Händen der Schüler, die Auflösungen nur in den Händen des Lehrers befinden können, wenn es auch nicht fehlen wird, dass manche Schüler sich bald in den Besitz des die Auflösungen enthaltenden Hefts setzen werden. Da Lehrer dergleichen Aufgaben eigentlich nie genug haben können, so werden sie gewiss auch dieses Büchlein schon von selbst nicht ganz unbeachtet lassen.

Geometrie.

Geometrische Aufgaben mit besonderer Rücksicht auf geometrische Constructionen. von E. Adams. Zweiter Abschnitt. Aufgaben über Theilung. Mit sieben Kupfertafeln. Winterthur. 1849. 8. Preis $1\frac{1}{2}$ Thlr.

Der erste Abschnitt dieser sehr empfehlenswerthen Sammlung geometrischer Aufgaben mit besonderer Rücksicht auf geometrische Constructionen ist im Literar. Ber. Nr. XLI. S. 590. angezeigt worden. Den früher mitgetheilten 47 Aufgaben über ein- und umschriebene Figuren hat der Herr Verfasser jetzt noch 8 zwar nicht ganz in dieselbe Kategorie gehörende, aber doch verwandte Aufgaben hinzugefügt, und der zweite Abschnitt über Theilungen enthält 45 Aufgaben, so dass die ganze Schrift überhaupt 100 Aufgaben enthält. Jedenfalls gehört diese Sammlung zu den instructivesten Büchern ihrer Art, und muss Lehrern und weiter vorgerückten Schülern angelegentlichst empfohlen werden. Dass die gegebenen Auflösungen fast alle elegant sind und viele Eigenthümlichkeiten darbieten, brauchen wir denen, die des Herrn Verfassers frühere geometrische Schriften kennen, nicht erst zu versichern. Von den meisten Aufgaben giebt der Herr Verfasser verschiedene Auflösungen, welches zu lehrreichen Vergleichungen Veranlassung giebt. Möge das lehrreiche Buch recht vielen Nutzen stiften und zu immer grösserer Belebung des so wichtigen geometrischen Unterrichts, und des mathematischen Unterrichts überhaupt beitragen, dessen hohe Bedeutung namentlich in der jetzigen auf das wahrhaft Nützliche mit Recht immer mehr hinstrebenden, und vielen eiteln veralteten Kram (hoffentlich auch bei'm Unterrichte) von sich werfenden Zeit gewiss immer mehr erkannt und beherzigt werden wird.

Die Winkelcoordinaten. Ein neues Coordinatensystem. Mathematische Abhandlung von B. Sommer. Mit drei Figurentafeln. Coblenz. 1848. 4. 1 Thlr. 15 Sgr.

Diese ausgezeichnete Schrift verdient jedenfalls allgemeiner bekannt zu werden und eine etwas weitläufigere Besprechung, als sonst in diesem literarischen Berichte gewöhnlich ist. In der Einleitung sagt der Herr Verfasser: „Das Bestreben, die räumlichen Verhältnisse durch Zahlenwerthe auszudrücken, hat die analytische Geometrie hervorgerufen, und grade hieraus entspringt die Quelle der grossartigen Resultate, durch welche das Feld der ermittelten Wahrheiten so bedeutend vergrössert worden, da man nun auch umgekehrt sich in den Stand gesetzt sah, allen den unendlich mannichfaltigen Umformungen in der Arithmetik eine geometrische Bedeutung unterlegen zu können. — Die erste Bedingung einer solchen Uebersetzung in die Zahlensprache ist nun die gehörige Bestimmung eines Punktes; aus den verschiedenen Arten, wie diese vorgenommen werden kann, entspringen die verschiedenen Zweige der analytischen Geometrie. — Wir wollen die

einfacheren Bestimmungsarten hier kurz aufzählen: — Die erste, die ihrer Natur nach am frühesten angewendet wurde, verlangt die Angabe der parallelen Abstände des bezüglichen Punktes mit den Schenkeln eines als der Lage nach fest angenommenen Winkels. Dies sind die Punktcoordinaten, die in den meisten Fällen rechtwinklig, nach dem festen Winkel, gewählt werden. — Die zweite Art geschieht dadurch, dass man nur eine Grade und in ihr einen Punkt, den Pol, als fest betrachtet, wo dann zur Auffindung eines beliebigen Punktes die Entfernung desselben vom Pole und die Neigung dieser letztern gegen die gegebene feste Grade hinreicht. Dies sind die Polarcoordinaten. — Diejenige Art nun, die diese Abhandlung in's Leben gerufen hat, bestimmt einen Punkt durch die Winkel, welche die Entfernungen desselben von zweien festen Punkten mit der durch diese letzteren laufenden Graden bilden. Wir wollen diese Ermittelungsweise die der Winkelcoordinaten nennen. — In den erwähnten drei Systemen ist demnach die Bestimmung vollführt, entweder durch zwei Abstände, oder durch einen Abstand und einen Winkel, oder drittens durch zwei Winkel. — Man hat noch eine andere Bestimmung zu einem ungemein fruchtbaren Systeme gewählt*), bei welchem der Punkt mittelbar durch gerade Linien, die durch ihn gehen, aufgefunden wird, während diese Graden selbst durch ihre Abschnitte an den Schenkeln eines festen Winkels ermittelt werden."

Auf die Winkelcoordinaten hat nun der Herr Verfasser ein schönes System der analytischen Geometrie gegründet, welches allgemeiner beachtet zu werden recht sehr verdient, und wenn er selbst auch in der Vorrede in sehr bescheidener Weise bei den Lesern seiner Schrift Entschuldigung wegen der kleinen Zahl der gegebenen Entwickelungen anspricht, so reicht doch das von ihm bis jetzt Gegebene jedenfalls vollständig hin, um die Fruchtbarkeit des neuen Coordinatensystems deutlich übersehen zu lassen, und legt zugleich ein schönes Zeugniss von der Gewandtheit des Herrn Verfassers in analytisch-geometrischen Betrachtungen ab. Der Hauptinhalt, auf dessen Angabe wir uns hier beschränken müssen, ist folgender: *Einleitung.* — *Erstes Kapitel.* Die selbstständige Behandlung der Winkelcoordinaten auf den Punkt und die gerade Linie angewendet. *Zweites Kapitel.* Die Winkelcoordinaten in Beziehung auf die Punktcoordinaten betrachtet, jedoch nur insoweit dies die Theorie der graden Linie betrifft. — *Drittes Kapitel.* Die Winkelcoordinaten auf die Curven des zweiten Grades angewendet. — *Viertes Kapitel.* Relationen, welche allen Curven zukommen. — *Schlussbemerkung.*

Bemerken müssen wir noch, dass der Herr Verfasser in der Grundidee, aus welcher seine Schrift hervorgegangen ist, mit Herrn Doctor Swellengrebel in der im Literarischen Bericht Nr. XXXVIII. S. 549. angezeigten Schrift zusammengetroffen ist. Dass aber hier von einem Plagiat nicht im Entferntesten die Rede

*) Plücker im 2ten Bande seiner Entwicklungen.

sein kann, zeigt die in beiden Schriften, deren jede ihre sehr verdienstlichen Seiten hat, befolgte Behandlungsweise und auch der materielle Inhalt auf das Deutlichste. Die Grundidee des Herrn Verfassers ist ja auch an sich eine so einfache und sich so leicht von selbst darbietende, dass es gar nicht zu verwundern ist, dass zwei Personen fast gleichzeitig auf dieselbe kommen können; und das Verdienstliche liegt ja auch bei mathematischen Dingen meistens nicht in der Grundanschauung, sondern in der Art und Weise, wie das Gebäude auf derselben aufgeführt ist, was gerade im vorliegenden Falle recht in die Augen fallend hervortritt. Die Schrift des Herrn Verfassers ist jedenfalls eine ganz selbstständige Arbeit, woran kein Vernünftiger, der beide gleich verdienstlichen Schriften mit einander vergleicht, einen Augenblick zweifeln kann.

Namentlich ist auch jüngern Mathematikern, die mit der gewöhnlichen analytischen Geometrie schon hinreichend bekannt sind, die vorliegende Schrift zu weiterer Uebung in diesem schönen und fruchtbaren Theile der Mathematik recht sehr zu empfehlen.

Trigonometrie.

M. s. weiter unten: Nautik.

Praktische Mechanik.

Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen. Von J. V. Poncelet. Deutsch herausgegeben von Dr. E. H. Schnuse. Zweiter Band. Zweite Abtheilung. Mit einer lithographirten Tafel. Darmstadt 1848. 8. 1 Thlr. 7 Sgr. 6 Pf.

Schon im Literar. Ber. Nr. XXII. S. 338. haben wir uns über die Verdienstlichkeit der Verpflanzung dieses ausgezeichneten Werkes eines der ersten französischen Mathematiker auf deutschen Boden ausgesprochen, weil manchem Praktiker doch die Darstellung in einer fremden Sprache manche Schwierigkeit darbieten, und auch der hohe Preis des Originals manchen von der Anschaffung abhalten möchte. Deshalb hat es uns Wunder genommen, dass zwischen dem Erscheinen der ersten Abtheilung des zweiten Bandes im Jahre 1845 (m. s. Liter. Bericht. Nr. XXVII. S. 401.) und dem erst jetzt (1848 steht zwar auf dem Titel, aber nur eben erst in diesem Augenblicke ist das Buch in unsere Hände gelangt) erfolgten Erscheinen der zweiten Abtheilung desselben Bandes ein so langer Zeitraum verflossen ist, wenn darin von unserer Seite kein Irrthum obwaltet, was wir jedoch nicht glauben. Die

Uebersetzung liest sich gut, die Ausstattung lässt nichts zu wünschen übrig, und wir wünschen daher recht sehr, dieses ausgezeichnete Werk in den Händen aller derer zu sehen, welche sich mit dem Bau und der Beurtheilung von Maschinen zu beschäftigen Beruf und Veranlassung haben, wobei wir schliesslich noch bemerken wollen, dass die vorliegende zweite Abtheilung des zweiten Bandes hauptsächlich die Theorie des Widerstandes fester Körper, und die Theorie der Dampfmaschinen und Locomotiven, endlich auch einen Abschnitt über die von **Girard** erfundene neue Schiffschleuse mit Schwimmer enthält.

Nautik.

Loxodromische Trigonometrie. Ein Beitrag zur Nautik. Von Johann August Grunert. Leipzig. 1849. 8. 21 Ngr.

Diese Schrift enthält die Darstellung einer neuen mathematischen Doctrin, die dem einen der beiden Theile, in welche sich füglich die Steuermannskunst theilen lässt, zur wissenschaftlichen Grundlage dient, und liefert, unter Voraussetzung der sphäroidischen Gestalt der Erde, die vollständige Auflösung aller in diesem Theile der Steuermannskunst vorkommenden Aufgaben. Der Schiffer, welcher immer eine längere Zeit denselben Curs beizubehalten genöthigt ist, segelt während dieser Zeit nach einer alle Meridiane unter demselben Winkel schneidenden Linie, die unter dem Namen der Rhumb-Linie oder der loxodromischen Linie bekannt ist. Unter einem loxodromischen Dreieck wird ein Dreieck zwischen drei Punkten auf der Oberfläche des Erdellipsoids verstanden, dessen eine Spitze immer in dem einen Erdpole liegt, der mit den beiden andern Spitzen durch Meridianbogen verbunden ist, und die beiden andern Spitzen selbst sind durch eine Loxodrome mit einander verbunden, woraus sogleich die Analogie solcher Dreiecke mit den sogenannten sphäroidischen Dreiecken erhellen wird. In einem loxodromischen Dreiecke sind aber, da die Loxodrome gegen alle Meridiane unter gleichen Winkeln geneigt ist, nicht wie in einem sphäroidischen Dreiecke sechs, sondern nur fünf Stücke zu betrachten, nämlich die Breiten seiner beiden nicht mit den Erdpolen zusammenfallenden Spitzen, die Längendifferenz dieser beiden Spitzen, der Curs (Winkel der Rhumb-Linie mit den Meridianen) und die sogenannte gesegelte Distanz, d. h. die Loxodrome oder Rhumb-Linie, welche die beiden in Rede stehenden Spitzen mit einander verbindet, und die loxodromische Trigonometrie beschäftigt sich mit der vollständigen Auflösung dieser Dreiecke; da wie in allen Trigonometrieen auch hier immer drei Stücke als gegeben betrachtet, die beiden anderen Stücke gesucht werden, so kommen in der loxodromischen Trigonometrie überhaupt zehn Aufgaben vor. Was nun die „ebene Trigonometrie“ für die „niedere Geodäsie“, die „sphä-

rische Trigonometrie" für die „höhere Geodäsie" und die „sphäroidische Trigonometrie" für die „höchste Geodäsie" ist, dasselbe ist die „loxodromische Trigonometrie", — als eine neue vierte Trigonometrie—, für den Theil der „Steuermannskunst", welcher gewissermassen die Geodäsie auf dem Meere ist, sich bei seinen Messungen nur des Logs, des Sandglases und des Kompasses bedient, und daher nicht in das Gebiet der nautischen Astronomie, als den andern Theil der Steuermannskunst, fällt. Wie schon gesagt, sind alle Aufgaben der loxodromischen Trigonometrie in dieser Schrift aufgelöst worden, so dass dieselbe eine vollständige systematische Behandlung dieser neuen Wissenschaft liefert, immer ganz allgemein für die Erde als Ellipsoid, wovon aber der Uebergang zur Kugel in allen Fällen leicht dadurch vermittelt wird, dass man die Excentricität als verschwindend betrachtet. Ausserdem enthält diese Schrift auch die mit der loxodromischen Trigonometrie unmittelbar zusammenhängende Theorie der Seekarten mit wachsenden Breiten oder der sogenannten Mercator's-Karten, und die Theorie der Meridionaltheile, welche der Zeichnung der anwachsenden Seekarten zur nothwendigen Grundlage dient. Dass dann auch endlich noch die graphische Auflösung der in der nautischen Praxis am häufigsten vorkommenden Aufgaben der loxodromischen Trigonometrie mit Hülfe der Seekarten, was der Schiffer vorzugsweise „Besteckseztzen" oder „Absetzen" nennt, gegeben worden ist, braucht wohl kaum noch besonders erinnert zu werden.

Ich hoffe und wünsche, dass diese Schrift sowohl wegen ihres theoretischen Inhalts und der in ihr gegebenen streng systematisch geordneten und gegliederten Darstellung einer neuen mathematischen Wissenschaft für den Mathematiker, als auch wegen der höchst wichtigen praktischen Anwendungen, denen diese neue Wissenschaft ihre Enstehung verdankt, für den wissenschaftlich gebildeten Seemann von Werth und Interesse sein werde und möge. Da Deutschland in der jetzigen bewegten Zeit das Glück seiner Zukunft vorzugsweise mit auf die Herstellung einer den übrigen seefahrenden Nationen Achtung gebietenden Flotte gründet, so kann es nicht fehlen, dass auch die nautischen Wissenschaften bald einen grösseren Aufschwung als bisher in unserem Vaterlande nehmen müssen, und hierzu ein Scherflein beizutragen, ist mit ein Zweck dieser Schrift. Hoffentlich wird es aber dem Verfasser bald vergönnt sein, die weiteren Früchte seiner schon seit einer Reihe von Jahren aus besonderer Neigung unternommenen nautischen Studien und Arbeiten in einem grösseren Werke über die Principien der Schiffsbaukunst und des Schiffsmanoeuvres dem mathematischen und nautischen Publikum vorzulegen; möge so wie die vorliegende loxodromische Trigonometrie auch künftig dieses grössere Werk freundliche Aufnahme finden! Gr.

Vermischte Schriften.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. Nr. 105. bis Nr. 130. (Vom 20. December 1847 bis 15. Juni 1848).

Wegen des sich immer mehr anhäufenden Materials ist die Anzeige der obigen Nummern dieser sehr verdienstlichen Mittheilungen, deren Nr. 104. im Literar. Ber. Nr. XLII. S. 608. angezeigt worden ist, ungebührlich verspätet worden.

C. Brunner, Sohn, Bericht über neue Untersuchungen der Cohäsion der Flüssigkeiten. (Nr. 105 u. 106.)

Bei diesem lehrreichen Aufsatze befindet sich auch ein Brief von Herrn Rud. Merian, Sohn, in Basel, der eine scharfe Kritik der von Herrn Dr. Buys-Ballot in seinem Aufsatze: „Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Synaphie (Poggendorff's Annalen. B. 71. S. 177.)“ angewandten Berechnungsweise enthält, welche die von Herrn Dr. Buys-Ballot a. a. O. erhaltenen Resultate als sehr zweifelhaft erscheinen lässt.

S. 155. führt Herr Brunner einen schönen Spruch von Fontenelle an, der uns bisher unbekannt gewesen ist, und vielleicht manchem Leser des Archivs eben so viel Vergnügen machen wird, wie er uns gewährt hat:

„Partout dans la nature il y a de la géométrie; mais elle est ordinairement fort compliquée, et celle qui avait fondé nos raisonnements était trop simple pour attraper juste les effets tels qu'ils sont.“

Noch ein in anderer Beziehung eben so schöner Spruch von Cuvier über die Natur im Allgemeinen wird S. 160. angeführt, und mag hier auch noch stehen: „Tout se lie, tout se tient; chaque existence est enchainée à une autre existence, et cette chaine dont nous ne pouvons appercevoir que quelques anneaux imperceptibles, est infinie en longueur, en étendue, et en durée.“

R. Wolf, Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. (Nr. 107 und 108.)

Hierin auch einige schätzbare Notizen über des grossen L. Euler bei Weitem nicht nach Verdienst hinreichend bekannten Sohn Johann Albrecht Euler, von dem der Herr Verfasser mit Recht sagt: „er stand neben der Sonne, und diese vermochte er nicht zu überglänzen“. J. A. Euler war den 16. November 1734 zu Petersburg geboren, und starb daselbst am 5. September 1800, als Sekretair der K. R. Akademie der Wissenschaften. Sieben Preisschriften von ihm wurden von den Akademien zu Paris, Petersburg, München und Göttingen gekrönt.— Vielleicht ist es den Lesern des Archivs angenehm, die Abhandlungen, welche J. A. Euler überhaupt verfasst hat, bei dieser Gelegenheit dem Titel nach kennen zu lernen, und wollen wir dieselben daher hier angeben, so weit unsere Kenntniss reicht:

Ad dissertationem patris de tribus numeris, quorum tam summa, quam summa productorum ex binis sit quadratum (Acta Acad. Petrop. 1779. P. I. Mem. p. 40.).

Recherches des mouvemens d'un globe sur un plan horizontal (Mem. de Berlin. 1758. p. 284. 1760. p. 261.).

Des cerfs-volans (Mem. de Berlin. 1756. p. 322.).
Eine weitere Ausführung und theilweise Berichtigung dieser Theorie J. A. Eulers der Cometes ou cerfs volans (das unter dem Namen fliegende Drachen bekannte Spielwerk der Kinder) enthält, beiläufig gesagt, das für die Schiffsbaukunst und das Schiffsmanoeuvre wichtige Werk: „De la construction et de la manoeuvre des vaisseaux et autres bâtiments, ou examen maritime théorique et pratique; par Don George Juan; traduit de l'Espagnol par M. Levêque. T. I. Paris. 1792. 4°. p. 372. Die Theorie der cerfs volans ist wegen der immer noch sehr im Argen liegenden Theorie des Widerstandes flüssiger Massen gegen in ihnen bewegte feste Körper wichtig und verdient mit Rücksicht auf diese früheren Untersuchungen weiter bearbeitet zu werden.

Sur le tems de la chute d'un corps attiré vers un centre de forces, en raison reciproque des distances. Mem. de Berlin. 1760. p. 250.

Von der Bewegung ebener Flächen, wenn sie vom Winde getrieben werden. Abhandlungen der Bairischen Akademie. B. 3. Thl. 2. S. 3.

Projet de quelques nouvelles experiences a faire, dont l'idée m'est venue en examinant les differens fourneaux, qui ont été recommandés au grand Directoire comme les meilleurs relativement a l'epargne du bois. Mem. de Berlin. 1766. p. 302. 319.

Recherches sur l'arrimage des vaisseaux, et quelles bonnes qualités on en peut procurer à un vaisseau. Prix de l'Acad. des Sc. de Paris. T. VII. Mem. 6.

Sur les diverses manières de faire avancer les vaisseaux sans employer la force du vent. Mem. de Berlin. 1764. p. 240.

J. A. Euler war auch ein fleissiger astronomischer und meteorologischer Beobachter.

Mögen diese gelegentlichen historischen und literarischen Notizen geeignet sein, das Andenken an einen mit Unrecht fast ganz vergessenen Mathematiker wieder zu erneuern.

R. Wolf, über den gelehrten Briefwechsel der Bernoulli. Nr. 109.

C. Brunner, Sohn, Beiträge zur Kenntniss der schweizerischen Nummuliten- und Flyschformation (Nr. 110. u. 111.).

R. Wolf, Note über die Transformation rechtwinkliger Coordinaten im Raume (Nr. 112. u. 113.).

C. Schläfli, über die Relationen zwischen den neun Cosinus, durch welche die gegenseitige Lage zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme bestimmt wird. (Nr. 112. u. Nr. 113.).
(Auf die beiden vorstehenden Aufsätze hoffen wir später im Archiv zurückzukommen).

R. **Wolf**, Nachrichten über die Sternwarte in Bern. Historische Notiz. Beobachtungen eines Mondhofes. (Nr. 114. u. 115.).

C. **Brunner**, Sohn, Diamagnetismus des Eises. (Nr. 114. u. 115.).

R. **Wolf**, Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. (Nr. 114. u. 115.).

Ein für die Geschichte der Mathematik interessanter Aufsatz. Der Schweizer **Bürgi** hat nämlich wahrscheinlich wenigstens gleichzeitig mit **Neper**, wo nicht vor demselben, die Logarithmen erfunden. Obgleich dies bekanntlich schon **Scheibel** und **Kästner** bemerkt haben, der letztere auch **Bürgi's** sogenannte **Progresstabul**, die er zufällig in einem Pack alter Schriften auffand, in seiner Fortsetzung der Rechenkunst beschrieben hat, so scheint doch Herr **Wolf** allerdings jetzt von Neuem ein Exemplar dieser Progresstabul Bürgi's auf der Königl. Bibliothek in München aufgefunden zu haben. Da die Sache jedenfalls historisch wichtig ist, so dürfte es zweckmässig sein, den ganzen Aufsatz des Herrn R. **Wolf**, wozu derselbe seine Erlaubniss ertheilt hat, im Folgenden abdrucken zu lassen, da die Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern wohl nicht in die Hände sehr vieler Leser kommen möchten. Alle im Folgenden eingeklammerte Zahlen sind in der Urschrift roth gedruckt, was sich hier ohne Weitläufigkeit nicht gut bewerkstelligen liess.

Ueber Bürgi's Logarithmen.

Die ungemein grosse Wichtigkeit der Logarithmen für die reine und angewandte Mathematik stempelt ihre Erfindung zu einer der schönsten des 17ten Jahrhunderts, und berechtigt England mit Stolz seines **Neper** zu gedenken. Aber auch die Schweiz darf sich mit Freuden ihres **Bürgi** erinnern, denn es ist mehr als wahrscheinlich, dass **Bürgi** wenigstens gleichzeitig, wo nicht vor **Neper**, ähnliche Tafeln construirte, und nur durch das ihm eigenthümliche und von **Kepler** mit Recht bitter getadelte Zögern im Bekanntmachen seiner Erfindungen um den Ruhm der ersten oder wenigstens Miteutdeckung der Logarithmen gebracht wurde.*)

Scheibel theilt im zehnten Stücke seiner *Einleitung zur mathematischen Bücherkenntniss* mit, dass Benjamin Bramer in seiner *Beschreibung eines sehr leichten Perspectiv- und grundreissenden Instruments auf einem Stande* (Cassel 1630) in einer Zuschrift an Faulhaber bemerke: „Aus diesem Fundament hat mein lieber „Schwager und Praeceptor Jobst Burgi, vor zwanzig und mehr Jah„ren, eine schöne progress-tabul mit ihren differentzen von 10 zu „10 in 9 Ziffern calculirt, auch zu Prag ohne Bericht in Anno 1620 „drucken lassen. Und ist also die Invention der Logarith.: nicht „des Neperi, sondern von gedachtem Burgi (wie solches vielen „wissend, und ihm auch Keplerus**) zeugniss gibt) lange zuvor „erfunden.“ Niemand hatte aber in neuerer Zeit diese Progress-

---

*) Vergleiche hierüber und wegen Bürgi überhaupt Pag. 162 bis 166 der Mittheilungen aus dem Jahre 1846.

**) Nach Scheibel VII in Praeceptis Tabul. Rudolph. C. III. Pag. 11.

tabul gesehen, bis sie Kästner zufällig in einem Pack alter Schriften, das aus Doppelmayrs oder Joh. Christ. Sturms Bibliothek stammte, auffand. Er beschrieb sie auf Pag. 94—105 seiner *Fortsetzung der Rechenkunst* und nach ihm Montucla im zweiten Bande (Pag. 10 und 11) seiner Geschichte der Mathematik.

Bürgi's Progresstabul mochte um so eher unbekannt geblieben sein, als ihm seine Bescheidenheit nicht erlaubt hatte, sie mit seinem Namen auszustatten, und auch die Wiederauffindung wurde dadurch natürlich ungemein erschwert. Nachdem ich sie auf mehreren grossen Bibliotheken Deutschlands vergebens gesucht hatte, fand ich endlich auf der königlichen Bibliothek in München eine mit Kästners Beschreibung übereinstimmende, aus 30 Quartblättern bestehende, jedes Textes oder Vorwortes entbehrende Tafelnsammlung, betitelt: *Aritmetische und geometrische Progress-Tabulen, sambt gründlichem unterricht, wie solche nützlich in allerlei Rechnungen zu gebrauchen und verstanden werden sol. Gedruckt in der alten Stadt Prag im Jahr* 1620. Auf dem Titelblatt stehen im Kreis herum folgende Zahlen:

(5000)	105126407
(10000)	110516539
(15000)	116182553
(20000)	122139055
(25000)	128400937
(30000)	134983856
(35000)	141904272
(40000)	149179486
(45000)	156827690
(50000)	164868006
(55000)	173320536
(60000)	182206414
(65000)	191547858
(70000)	201368223
(75000)	211692064
(80000)	222545191
(85000)	233954743
(90000)	245949244
(95000)	258558685
(100000)	271814593
(105000)	285750111
(110000)	300400081
(115000)	315801133
(120000)	331991744
(125000)	349012483
(130000)	366905819
(135000)	385716518
(140000)	405491613
(145000)	426280547
(150000)	448135298
(155000)	471110508
(160000)	495263623
(165000)	520655030
(170000)	547348216
(175000)	575409920

(180000) 604910306
(185000) 635923131
(190000) 668525936
(195000) 702800236
(200000) 738831728
(205000) 776710499
(210000) 816531257
(215000) 858393564
(220000) 902402087
(225000) 948666860
(230000) 997303557
(230270) 1000000000

Mitten im Kreise steht:

T. B.

(Die ganze Rote Zahl 230270022)
Die ganze Schwarze Zahl 1000000000

Jede Seite hat in vertikalem Eingange die Nummern 0, 10, 20...500. Die Ueberschriften dagegen laufen von 0, 500, 1000, 1500.....230000 fort. Bei dieser letztern Zahl steht 997303557. Dann ist noch eine nicht mehr in das vorige Schema passende Fortsetzung bis auf

(230270023) 999999999

Die nähere Einrichtung der Tafel ist im Uebrigen in folgendem Muster enthalten:

	(4000)	(4500)	(5000)	(.....)	(7500)
(0)	104080869	104602551	105126847	. .	107788011
(10)	91277	13011	37359	.	.
(20)	104101686	23472	47873	.	.
(30)	12097	33935	.....	.	.
(40)	22508	44398	.	.	.
(50)	.....	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
(500)	104602551	105126847	.	. .	.

Die Betrachtung dieser Tafel zeigt zunächst, dass die rothen Zahlen eine arithmetische Progression, die schwarzen Zahlen aber eine geometrische Progression darstellen, also die rothen Zahlen Logarithmen der schwarzen Zahlen sind. Ferner wird sogleich klar, dass Bürgi, während die gewöhnlichen Logarithmentafeln nach dem Vorgange von Neper und Brigg die Logarithmen einer bestimmten Zahlenfolge enthalten, umgekehrt zu einer Logarithmenfolge die Zahlen berechnete. Da Bürgi in seiner Tafel die Ganzen und Decimalstellen nicht trennt, so ist hierüber eine derselben entsprechende Annahme zu treffen. Nimmt man nun z. B.

an, Bürgi habe die Logarithmen auf 5, die Zahlen auf 8 Dezimalen gegeben, d. h. es sei

$$1{,}00000 = \log 2{,}71814593$$

oder es sei 2,71814593 die Basis der Bürgischen Logarithmen, so erhält man durch Anwendung der gewöhnlichen Reihen für die Logarithmenberechnung

$$\log 10 = 2{,}30270022$$

was ganz mit Bürgis Tafel übereinstimmt. Die gleiche Uebereinstimmung zeigt sich, wenn man in Beziehung auf jene Basis den Logarithmus irgend einer andern in Bürgis Tafel enthaltenen Zahl berechnet, und es ist daher die obige Annahme eine richtige. Die Basis der natürlichen Logarithmen ist bekanntlich 2,71828183 und weicht somit nur wenig von der Basis Bürgis ab. Zur Erläuterung der Abweichung darf man wohl nicht annehmen, dass sie auf einem Rechnungsfehler Bürgis beruhe: denn wenn man sich der Berechnung einer Tafel von bedeutender Ausdehnung unterzieht, so geht man gewiss nicht über ihr Fundament weg, ohne es vorher gründlich geprüft zu haben. Im Gegentheil lässt sich jene Abweichung auf eine Weise erklären, die Bürgis ohnehin erwiesenem praktischen Sinne Ehre macht: Unter Voraussetzung der natürlichen Logarithmen musste nämlich Bürgi, wenn die Logarithmen um 0,00010 fortschreiten sollten, seine Zahlen mit 1,0000100005 multipliziren. Vernachlässigte er aber die 5 Tausendmillionstel, so hatte er immer nur, um aus einer Zahl die folgende zu erhalten, zu ihr ihren zehntausendsten Theil zu addiren, wodurch die Berechnung seiner Tafel ungemein erleichtert wurde, ohne dass sie für praktische Zwecke auch nur das Mindeste an Brauchbarkeit verlor. Dass er aber seine Zahlen auf letztere Weise fand, und so zu jener etwas veränderten Basis gelangte, dafür scheint seine Tafel hinlänglich zu bürgen.

Nepers logarithmischer Canon erschien 6 Jahre vor Bürgis Progresstabul, und es kann daher von einem Prioritätsstreite nie die Rede sein; dagegen sichern einerseits die Zeugnisse von Kepler und Bramer, und anderseits die im Obigen enthaltene Auseinandersetzung der Abweichungen zwischen den Tafeln von Neper und Bürgi dem Letztern jedenfalls zum wenigsten die Selbsterfindung. Die historische Gerechtigkeit hat also Bürgi von der auf ihn hin und wieder gewälzten Anklage des Plagiats freizusprechen, und ihn bei Erfindung der Logarithmen wenigstens in zweiter Linie ehrenvoll zu erwähnen.

C. Brunner, Sohn, Ueber die Wirkung, welche verschiedene Substanzen durch Berührung auf nervenkranke Personen ausüben. (Nr. 116—120.).

R. Wolf, Notiz zur Geschichte der Gradmessungen (Nr. 116—120.).

L. Schläfli, Ueber eine Verallgemeinerung des Lagrange'schen Lehrsatzes, für die der Beweis noch gefordert wird (Nr. 121. und 122.).

(Wir hoffen späterhin auf diesen Aufsatz zurückzukommen).

C. Fischer-Ooster, Ueber Vegetationszonen und Temperaturverhältnisse in den Alpen (Nr. 123. — 126.).

(Wir empfehlen diesen interessanten Aufsatz auch Mathematikern, da er die herrschenden Gesetze in mathematischen Formeln darzustellen sucht).

R. Wolf, Nachrichten von der Sternwarte in Bern. Beobachtung der totalen Mondfinsterniss am 19. März 1848. (Nr. 127. u. 128.).

L. R. v. Fellenberg, Destillation von Pfirsichblättern. (Nr. 127. u. 128.).

M. Perty, Bemerkungen über Bacillarien. (Nr. 129.)

R. Wolf, Nachrichten von der Sternwarte in Bern. Sonnenflecken-Beobachtungen. (Nr. 130.).

Ausserdem hat Herr R. Wolf in mehreren Aufsätzen seine Auszüge aus A. v. Hallers Briefen fleissig fortgesetzt.

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, M. A. F. R. S. E. etc. Vergl. Literar. Ber. Nr. XLVII. S. 661.

No. XIX. On the Perfect Blackness of the Central Spot in Newton's Rings, and on the Verification of Fresnel's Formulae for the Intensities of Reflected and Refracted Rays. By G. G. Stokes. — On a General Theorem of Definite Integration. By George Boole. — On Differentiation with Fractional Indices, and on General Differentiation. Part. II. By the Rev. William Center. — On the Theorems in Space analogous to those of Pascal and Brianchon in a Plane. By Thomas Weddle. — Abstract of a Memoir by Dr. Hesse on the Construction of the Surface of the Second Order which passes through Nine given Points. By Arthur Cayley. — On the Simultaneous Transformation of Two Homogeneous Functions of the Second Order. By Arthur Cayley. — On the Attraction of an Ellipsoid, By Arthur Cayley. Part. I. On Legendre's Solution of the Problem of Attraction of an Ellipsoid on an External Point. Part II. On a Formula for the Transformation of certain Multiple Integrals. — On a Class of Curves on the Hyperboloid of One Sheet connected with Generatrices of the Surface. By R. Townsend. — Geometrical Demonstration of some Properties of Geodesic Lines. By Andrew S. Hart. — On Symbolical Geometry. Continued. By Sir William Rowan Hamilton. — Notes on Hydrodynamics. By William Thomson. — Mathematical Notes. I. On a Solution of a Cubic Equation. By James Cockle. II. Remarks on the Deviation of Falling Bodies to the East and to the South of the Perpendicular; and Corrections of a previously published Paper on the same subject.

No. XX. will be published on the 1st of May, 1849.



Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Literar. Ber. Nr. XLVII. S. 656.).

Viertes Heft. S. 7. macht Herr Profes. v. Steinheil in München der Akademie die folgende interessante Mittheilung: „In neuester Zeit habe ich eine Ihnen schon bekannte Idee — ein Wurfgeschoss durch Benutzung des Fugalschwunges — auf Veranlassung des Ministers Heintz im Grossen ausgeführt. Ein an drei Centner schwerer Kreisel wird vom Dampfe einer Locomotive durch eine Reactionsturbine in Rotation versetzt und bis zu einer Geschwindigkeit von hundert Umgängen in der Secunde beschleunigt, wozu etwa zwei Minuten Zeit erforderlich sind. Der Kreisel schleudert jetzt dreilöthige Kartätschenkugeln von geschmiedetem Eisen mit einer Initialgeschwindigkeit von circa 1100 Fuss so schnell hinter einander nach dem beabsichtigten Ziele, als man Kugeln in die Maschine einlaufen lässt. Das Geschoss ist auf einem Eisenbahnwagen aufgestellt, gestattet rasche und sichere Azimuthal- und Höhen-Einstellung und wird von der Locomotive geschoben, wenn man eine Vertheidigung der Bahnlinie oder der Bahnhöfe beabsichtigt. Gestern wurden die ersten Versuche mit dieser Maschine angestellt. Sie haben ganz den von der Theorie gegebenen Erwartungen entsprochen. Die Aufstellung auf der Eisenbahn kann jedoch erst nach meiner Rückkehr (von einer amtlichen Reise) erfolgen. Für die Dauerhaftigkeit der Maschine bei so überaus grossen Geschwindigkeiten musste auf ganz eigne Weise Sorge getragen werden. Sie könnte jetzt Monate lang in Bewegung bleiben, ohne sich merklich abzunützen. „Die mathematische Klasse der K. Akademie erachtete es für angemessen, das Kriegs-Ministerium auf diese Mittheilung aufmerksam zu machen." — S. 8. Herr Professor Franz Moth in Linz überreicht eine Abhandlung: „Die mathematische Zeichensprache in ihrer organischen Entwickelung. — S. 9. — S. 87. ist eine ausführliche, der Beachtung der Physiker sehr werthe Abhandlung von dem Director der Realschule in Meiningen, Herrn Knochenhauer: „Ueber die Veränderungen, welche der Entladungsstrom einer elektrischen Batterie erleidet, wenn mit dem Schliessungsdrahte eine zweite Batterie in Verbindung gesetzt wird" mitgetheilt. — S. 87. Jelinek: „Elemente des von de Vico am 20. Februar 1846 entdeckten Cometen." — S. 90. Ryll: „Abhandlung über Ortsversetzungen durch Rechnung oder über die Elemente der Lagerechnung." Beachtenswerth in Bezug auf die neuen, aus den Literarischen Berichten hinreichend bekannten Bestrebungen und Versuche, eine Geometrie der Lage im eigentlichen Sinne zu begründen; m. s. z. B. des Herrn Prof. Listing in Göttingen im Literar. Ber. Nr. XLVII. S. 652. angezeigte Vorstudien zur Topologie, die allgemeiner und in einem weitern Kreise bekannt zu werden sehr verdienen. — S. 127. Hartmann Edler v. Franzenshuld: „Ein neues allgemeines Gesetz der Dreieckseiten und dessen Anwendungen." Der Herr Verfasser geht von folgendem Lehrsatze aus: Wird in einem Dreiecke vom Scheitel des von den Seiten a und b eingeschlossenen Winkels zur dritten Seite eine Gerade s

gezogen, wodurch die Segmente c und d entstehen, so findet die Gleichung

$$(a^2-c^2-s^2)\,d+(b^2-d^2-s^2)\,c=0$$

Statt. — Peche: „Ueber die Bestimmung der Integrale

$$\int\frac{x^{\pm n}\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}}\text{ und }\int\frac{x^{\pm n}\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}},$$

wenn n eine ganze Zahl vorstellt, in geschlossenen Formen." — Herrmann: „Bestimmung der trigonometrischen Functionen aus den Winkeln und der Winkel aus den Functionen, bis zu einer beliebigen Grenze der Genauigkeit. Herr Oberst Herrmann hat in der mit der Ueberschrift: Rapports des longueurs des degrés au rayon pris pour unité versehenen Callet'schen Tafel die folgenden Fehler entdeckt, was wegen der grossen Anzahl dieser Fehler jedenfalls sehr merkwürdig und wichtig ist, da alle Callet'schen Tafeln bekanntlich immer für sehr richtig und genau gehalten werden; in den hier folgenden verbesserten Bogenlängen ist jede Ziffer, welche in die Callet'sche Tafel statt der fehlerhaften einzutragen ist, umklammert:

53″	=0,00025	69512	5(0)988	05407	66027
59″	=0,00028	60400	71854	62623	6218(0)
	Degrés modernes:				
13°	=0,20420	35224	8333(6)	56050	00718
14	=0,21991	14857	51285	52669	(2)3850
17	=0,26703	5375(5)	55132	42526	93247
24	=0,37699	11184	30775	(1)8861	55172
38	=0,59690	26(0)41	82060	71530	79022
59	=0,92676	98328	08989	00534	6479(8)
71	=1,11526	5(3)920	24376	59965	42384
74	=1,16238	9(2)818	28223	49823	11781
75	=1,17809	72450	9617(2)	46442	34913

Ausser den hier angeführten mathematischen und physikalischen Abhandlungen finden sich in dem vorliegenden vierten Hefte der Sitzungsberichte noch viele interessante Abhandlungen naturwissenschaftlichen und andern Inhalts, und es macht in der That grosse Freude zu sehen, eine wie grosse Thätigkeit selbst in der jetzigen, den Wissenschaften weniger günstigen, Zeit die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften entfaltet.



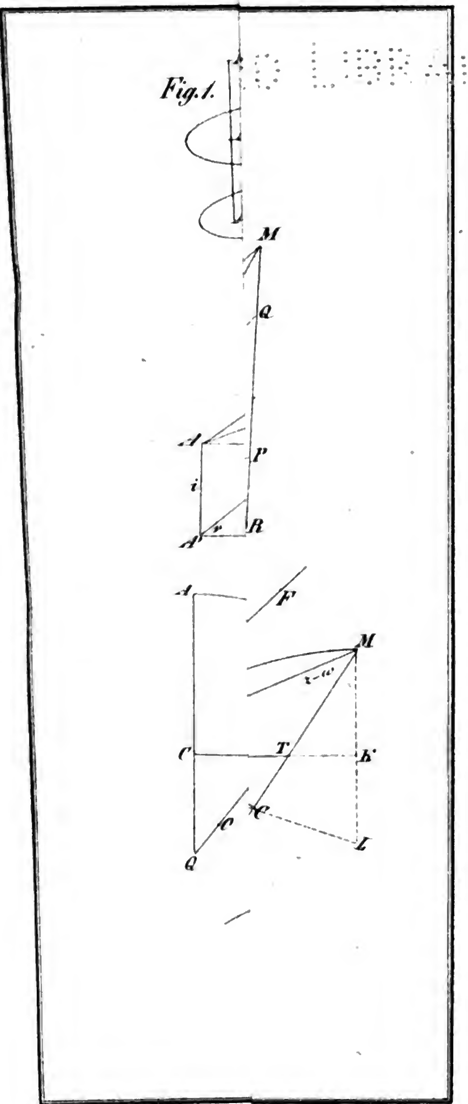
Anzeige.

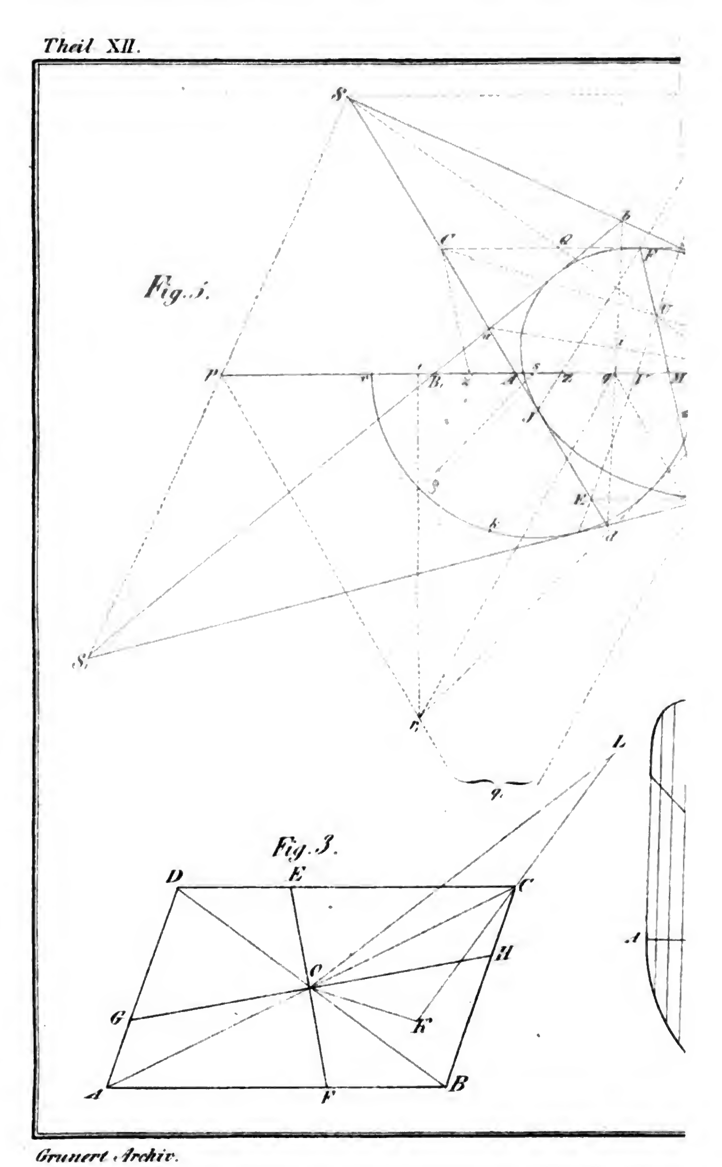
Herr Professor Dr. Schlömilch, welchem das Archiv schon eine so grosse Anzahl werthvoller Beiträge verdankt, hat bereits im September v. Jhrs. gegen mich den Wunsch ausgesprochen, dass ich seinen zahlreichen Freunden durch das Archiv anzeigen möchte, dass in seiner amtlichen Stellung Michaelis 1848 eine Aenderung eintreten werde. Diese für den Umschlag bestimmte Anzeige hat aber bisher immer nicht recht Platz finden können, weshalb ich jetzt am Schlusse des 12ten Theils dazu den Literarischen Bericht benutze. Herr Professor Dr. Schlömilch hat nämlich Jena verlassen und eine Lehrerstelle an der neu gegründeten Realschule in Eisenach angenommen, jedoch mit Reservirung seiner Stelle in Jena, und gewissermassen nur mit Urlaub von dort. Die Veranlassung zu dieser Veränderung liegt lediglich darin, dass Herr Professor Dr. Schlömilch in Jena gar kein Gehalt erhält und auch in der nächsten Zukunft keine Aussicht hat, welches zu erhalten. Wenn sich Herrn Professor Dr. Schlömilch auch ohne Zweifel in Eisenach ein sehr segensreicher Wirkungskreis eröffnen wird, und die Thätigkeit an einer Schule, namentlich im mathematischen Lehrfache, der Freuden so mancherlei darbietet, wie ich selbst mit freudigem Rückblicke auf meine zwölfjährige Wirksamkeit als Gymnasiallehrer dankbarlichst zu bekennen nie unterlassen werde, so dass mir der Rücktritt in ein solches Amt gewiss nie schwer werden würde: so muss ich doch jede Universität wahrhaft beklagen, die einen so ausgezeichneten Lehrer, Gelehrten und Schriftsteller wie Herrn Prof. Dr. Schlömilch, dessen Stelle sehr schwer wieder zu ersetzen sein wird, wegen einiger hundert Thaler Gehalt sich verloren gehen lässt. Der neuen Realschule in Eisenach, die gewiss auch eine erfreuliche Geburt der neuen fortschreitenden Zeit ist, wünsche ich aber aus dem Grunde meines Herzens Glück zu der Erwerbung eines so trefflichen Lehrers!

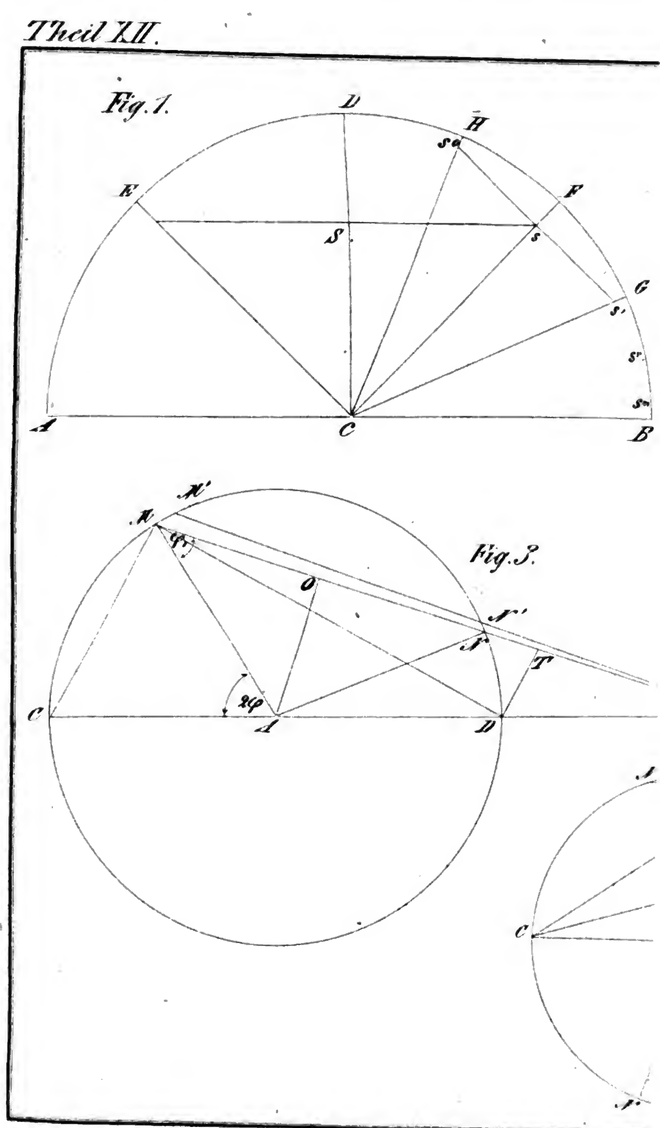
Wenn nun die geehrten Leser des Archivs in demselben Herrn Schlömilch immer noch als Professor in Jena, anderwärts aber vielleicht als Lehrer an der neuen Realschule in Eisenach bezeichnet finden, so werden sie aus dem Obigen leicht das wahre hier obwaltende Sachverhältniss zu beurtheilen im Stande sein. G.

Druckfehler.

S. 257. Z. 6. statt 5277868 setze man: „52778687“.


Fig. 1.
M
Q
P
i
R
r
F
M
C
T
K
L
Q


Fig. 1.
Fig. 3.
D
E
C
H
O
G
K
A
F
B
L


Fig. 1.
D
H
s''
E
F
S
s
G
s'
s''
s'''
A
C
B
N'
N
φ
Fig. 3.
O
N'
N
T
C
2φ
A
D
C

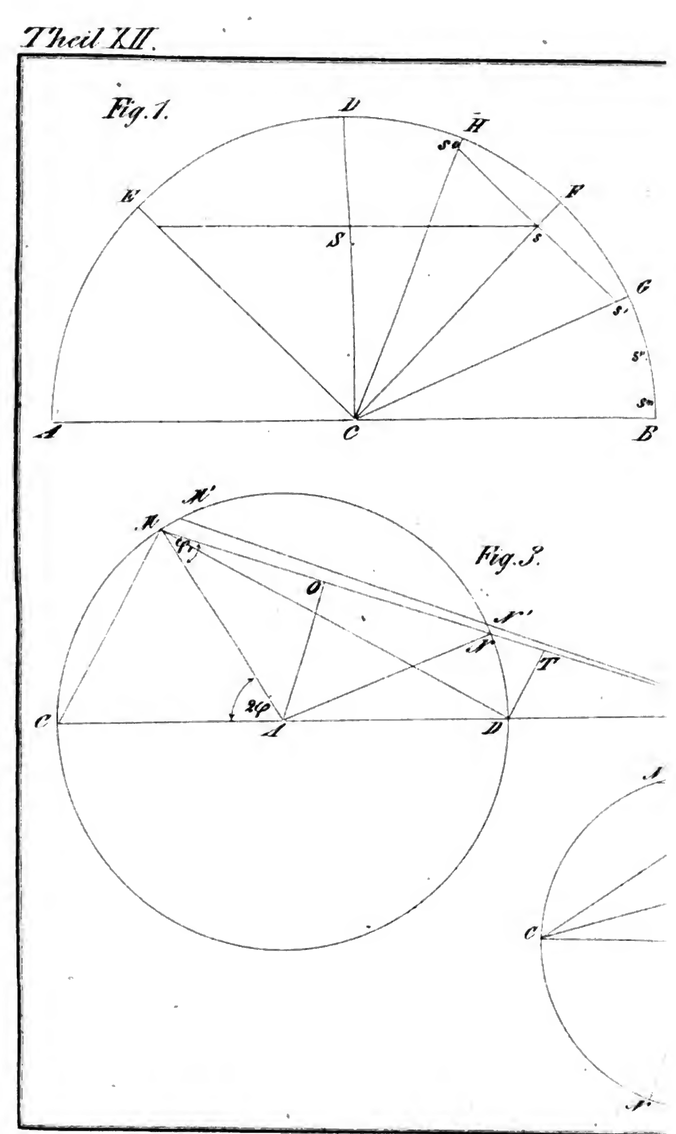
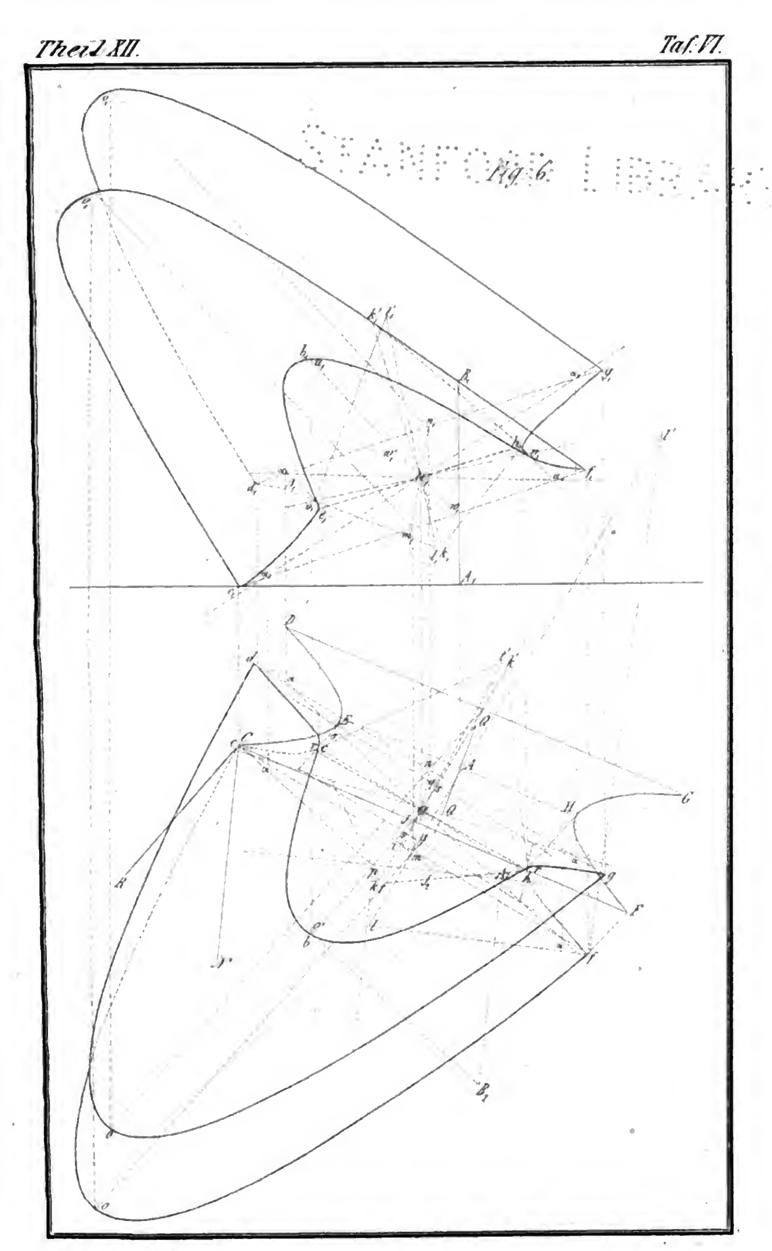
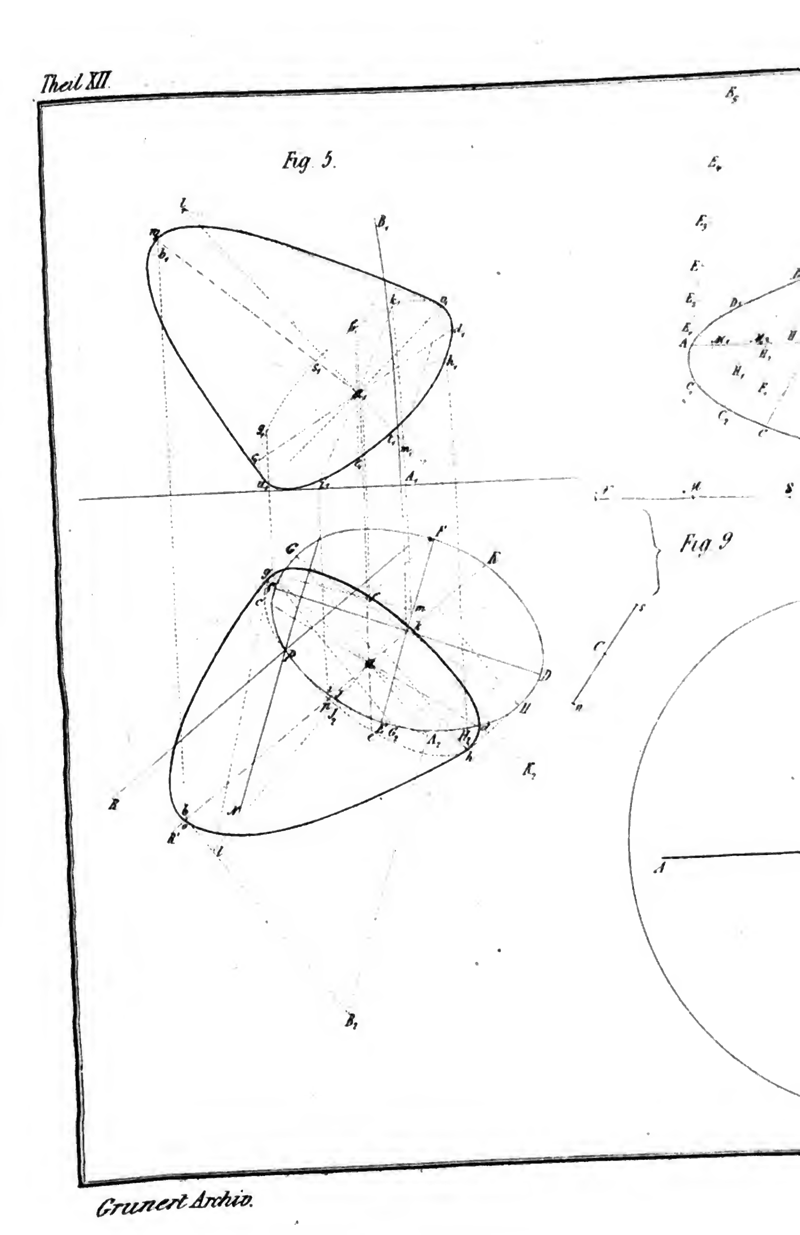

Fig. 1.
D
H
s''
E
F
S
s
G
s'
s''
s'''
A
C
B
M'
M
(φ)
Fig. 3.
O
N'
N
T
2φ
C
A
D
C

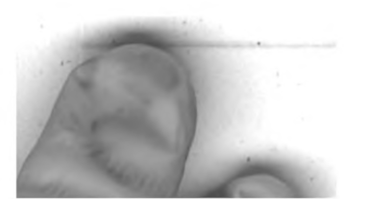
Fig. 1.

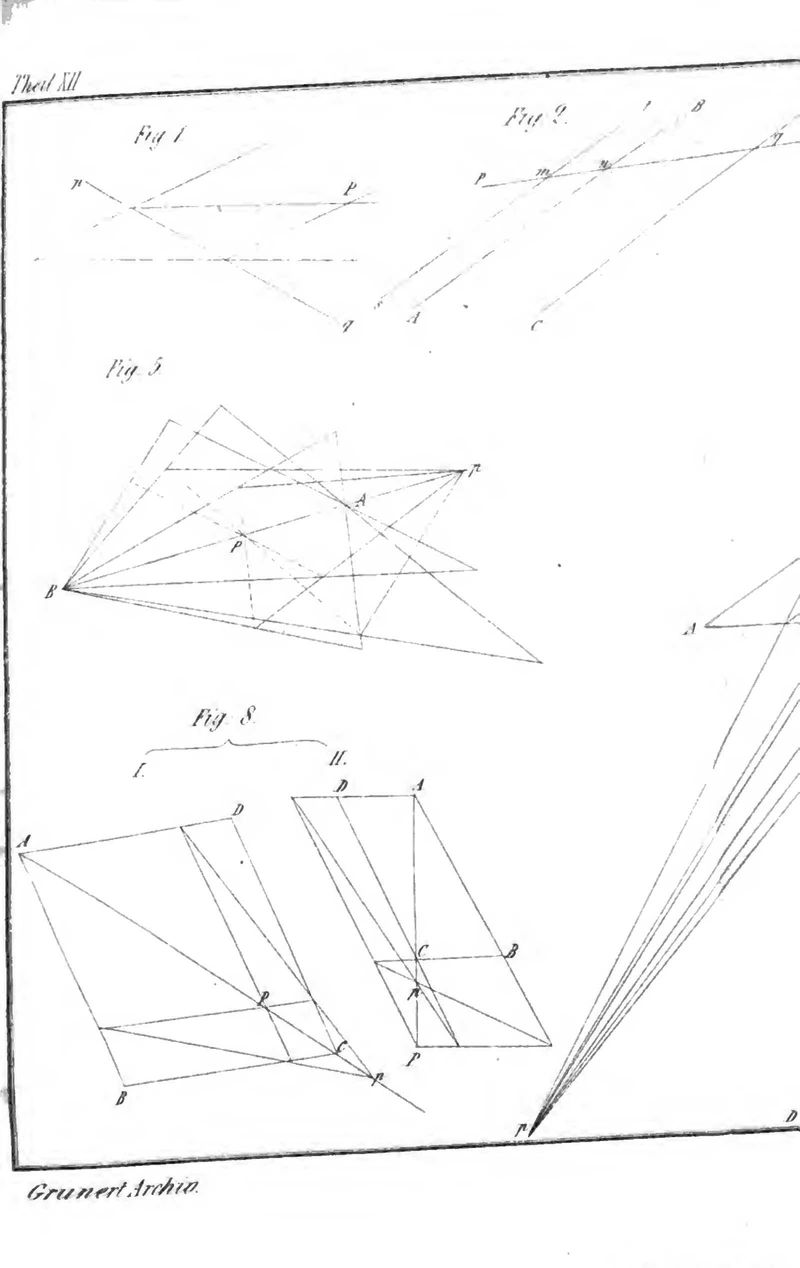


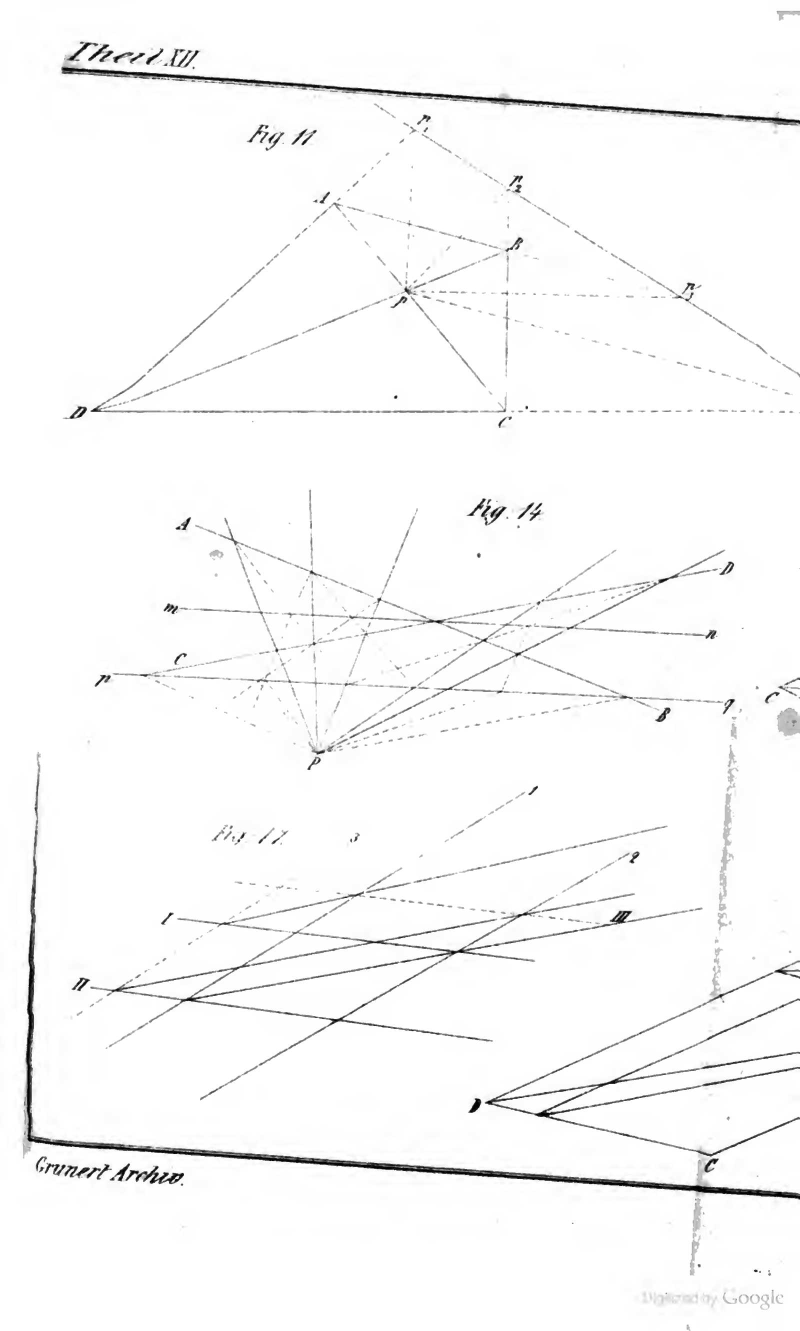
Fig. 3.


Fig. 6.

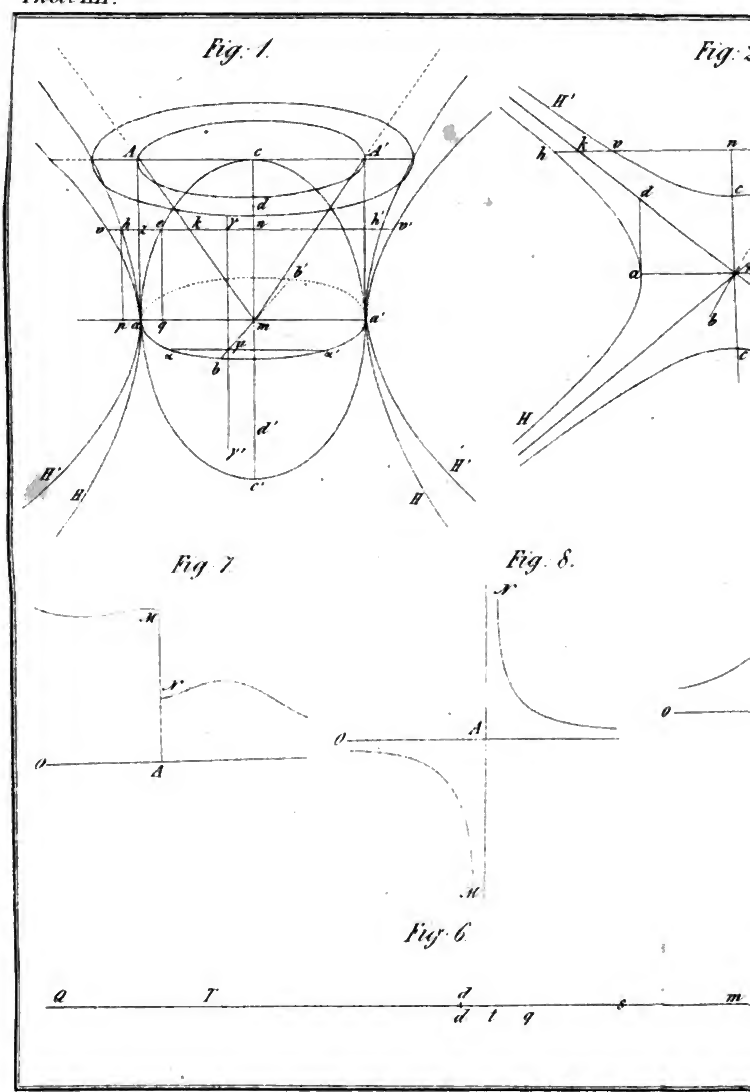

Fig. 5.
Fig. 9




Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 5.
Fig. 8.
I.
II.
A
B
C
D
P
p
q
m
n


Fig. 11
Fig. 14
Fig. 17
A
B
C
D
P
m
n
p
q
I
II
III




Fig: 1.
Fig: 2
Fig: 7.
Fig. 8.
Fig. 6.

